LOS CONTINUOS LINEALES HOMOGENEOS

DE

GEORGE D. BIRKHOFF *

Por Roberto Vázquez García
y Francisco Zubieta Russi.

Se tiene un conjunto H de elementos A, B, C ... y una relación binaria $<$, la cual rige únicamente entre elementos distintos de H. Se supone que se cumplen los postulados siguientes:

I. *Si $A \neq B$, entonces una y sólo una de las proposiciones $A < B$, $B < A$ es válida.*

II. *Si $A < B$ y $B < C$, entonces $A < C$.*

III. *Para cualquier elemento A, existen P y Q tales que $P < A < Q$.*

Definición: Un intervalo (abierto) es un conjunto de elementos X de H de uno cualquiera de los cuatro tipos siguientes:

(1) Intervalo (A, B): todas las X tales que $A < X < B$.

(2) Intervalo $(A, +\infty)$: todas las X tales que $A < X$.

(3) Intervalo $(-\infty, B)$: todas las X tales que $X < B$.

(4) Intervalo $(-\infty, +\infty)$: el conjunto H.

---

* Los autores agradecen al Dr. G. D. Birkhoff el haberles comunicado su sistema de axiomas y brindado su valiosa ayuda, sin la cual no hubiera sido posible realizar este trabajo.

IV. *Cualquiera que sea la "sucesión doble" del tipo creciente* $\ldots < A_{-2} < A_{-1} < A_0 < A_1 < A_2 < \ldots$, *sus elementos* A_n *y las* X *comprendidas* $A_n < X < A_{n+1}$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ *forman un intervalo.*

V. *Entre dos intervalos cualesquiera es posible establecer una correspondencia biunívoca que conserva el orden de precedencia.*

Los postulados I y II nos dicen que la relación $<$ tiene las tres propiedades características de una relación de orden; III expresa que no hay en H un primero ni un último elemento; IV es el postulado de la cerradura y V el de la homogeneidad.

Definición: Cualquier conjunto ordenado H que satisface los cinco axiomas anteriores es un *continuo lineal homogéneo.*

Pasaremos a establecer, en primer término, algunas propiedades generales de los continuos que acabamos de definir: estas propiedades son consecuencias de los axiomas I-V.

TEOR. 1. *Dos elementos distintos de* H *definen un intervalo del primer tipo. De otro modo: Si* $A < B$, *entonces existe* C *tal que* $A < C < B$.

Consideremos los intervalos $(A, +\infty)$ y $(-\infty, +\infty)$. De acuerdo con V, existe entre ambos una correspondencia bi-unívoca que conserva el orden; en esta correspondencia, al elemento A le corresponde $-\infty$ y a B le corresponde B' de H. Sea $C' < B'$; el correspondiente de C' en $(A, +\infty)$ es un elemento C tal que $A < C < B$.

TEOR. 2. *Dados* A *y* B, *existe una sucesión doble que define al intervalo* (A, B).

Consideremos una sucesión doble del tipo creciente $\{A'_n\}$ que define al intervalo (A', B'). Este es homogéneo al intervalo (A, B) y los elementos correspondientes a los de la sucesión doble $\{A'_n\}$ forman una nueva sucesión doble del tipo creciente $\{A_n\}$ que define al intervalo (A, B).

TEOR. 3. *Si dos sucesiones dobles del tipo creciente tienen en común un elemento y todos los anteriores (posteriores) a ése, entonces tales sucesiones definen intervalos con el mismo extremo izquierdo (derecho).*

Consideremos el caso en que las sucesiones $\{A_n\}$ y $\{A'_n\}$ tienen en común un elemento $A_p = A'_q$ y todos los anteriores a ése. Sean (A, B) y (A', B') los intervalos respectivos. Si fuera $A < A'$, el intervalo (A, A') contendría elementos A_n de la primera sucesión y, por eso, contendría elementos A'_n de la segunda, lo que contradice la hipótesis de que el intervalo (A', B') está definido por la sucesión $\{A'_n\}$.

Demostración análoga para el extremo derecho.

TEOR. 4. *Si dos sucesiones dobles del tipo creciente son tales que todo elemento de una de ellas está comprendido entre dos elementos de la otra, entonces ambas sucesiones definen el mismo intervalo.*

COROLARIO: *Si se suprimen elementos de una sucesión doble del tipo creciente y lo que queda es una sucesión doble, esta última define el mismo intervalo que la primera.*

Se adoptan aquí las definiciones clásicas de *punto límite* de un subconjunto de H, de *límite* de una sucesión infinita de elementos de H, de *sucesión convergente* (que tiene límite único), etc., etc., sin que se excluya el considerar como elementos límite a los elementos ideales $-\infty$ y $+\infty$.

TEOR. 5. *Toda sucesión infinita creciente $A_0 < A_1 < A_2 < \ldots$ de elementos de H es convergente. Toda sucesión decreciente también converge.*

En efecto, sea B el extremo derecho común a todos los intervalos definidos por sucesiones dobles del tipo creciente $\{A'_p\}$ que tienen en común con la sucesión dada un elemento y todos los posteriores a él; es inmediato que todo $A_n < B$; además, cualquier elemento $C < B$ pertenece a algún intervalo definido por una de las sucesiones dobles escogidas y por eso, para algún valor del índice p se tendrá $A'_p = C$, o bien, $A'_p < C < A'_{p+1}$. Se concluye que cualquier $C < B$ hace que el intervalo (C, B) contenga todos los elementos de la sucesión dada a partir de un cierto rango: B es el límite (único) de la sucesión dada.

Se demuestra análogamente que cualquier sucesión infinita decreciente converge.

Nótese que, si el teorema 5 se tomara como axioma, podría demostrarse el postulado IV.

TEOR. 6 *La condición necesaria y suficiente para que B sea el límite de la sucesión infinita creciente $A_0 < A_1 < A_2 < \ldots$ es que $A_n < B$ para toda n y, si $C \neq B$ y $A_n < C$ para toda n, entonces $B < C$.*

La condición es necesaria. Porque, si B es el elemento definido en la demostración anterior, se debe tener $A_n < B$ para toda *n*; además, si $C < B$, hay elementos A_n en el intervalo (C, B) y no puede ser $A_n < C$ para toda n; luego, si $A_n < C$ para toda *n* y $C \neq B$, entonces $B < C$.

La condición es suficiente. Porque, si todo $A_n < B$ y ningún $C < B$ es tal que $A_n < C$ para toda n, entonces todo intervalo (C, B') conteniendo *a B debe contener todos los puntos de la sucesión considerada a partir de un cierto rango.*

TEOR. 7. *Ningún conjunto H que satisface los axiomas I-V puede ser numerable.*

Porque, si lo fuera, constituiría una clase ordenada del tipo η (postulados I. II, III, y teorema 1) y podría ponerse en correspondencia biunívoca ordenada con el conjunto de los números racionales del intervalo $0 < X < 1$. En una tal correspondencia, a toda sucesión creciente de estos números cuyo límite fuera un número irracional le correspondería una sucesión creciente de elementos de H que no tendría límite, lo cual es contradictorio con el teorema 5.

Aparte de los cinco postulados anteriores que definen la clase de los continuos lineales homogéneos de Birkhoff, vamos a considerar el siguiente:

VI. *Todo conjunto de intervalos completamente distintos (sin elementos comunes) es numerable.* (Souslin.)

Haremos ver que un continuo lineal homogéneo que satisface VI, coincide con el continuo ordinario de la línea recta. En otras palabras: no existe sino un solo continuo definido por los axiomas I-VI. A este continuo lo llamaremos H_0.

TEOR. 8. *Sea H un conjunto que satisface I-VI y sea A un subconjunto de H que contiene todos sus puntos límite. Si $A \neq H$, el complemento de A está formado de intervalos abiertos cuyos extremos son puntos de A.*

Llamemos "puntos B" a los elementos de H que forman el complemento de A. Por hipótesis, los puntos B forman un conjunto no-vacío. Sea B_0 uno cualquiera de ellos; existe un intervalo (C'_1, C_1) conteniendo a B_0 y formado exclusivamente por puntos B. Probaremos que este intervalo se puede extender a la derecha, hasta alcanzar un primer punto C que no es un B, y a la izquierda, hasta alcanzar un C′ que tampoco es un B. Habremos demostrado así que el punto B_0 pertenece a un intervalo formado exclusivamente por puntos B y cuyos extremos son puntos A.

Consideremos el intervalo elegido (C'_1, C_1) que contiene a B_0. Si C_1 es un B, existe un nuevo intervalo (C'_2, C_2) conteniendo a C_1 y formado exclusivamente por puntos B; si C_2 es un B, existe un intervalo análogo (C'_3, C_3) que contiene a C_2; ... Proseguimos así, construyendo intervalos (C'_n, C_n) formados por puntos B y conteniendo el extremo derecho C_{n-1} del intervalo anterior. Si, para algún valor finito de n, C_n es un A, el proceso habrá terminado; en el caso contrario, obtenemos la sucesión infinita $C_1 < C_2 < \ldots < C_n < \ldots$ que converge hacia un punto C_w, que puede ser un A o un B. Si C_w es un B, procedemos con él como se hizo con B_0 y, si el proceso no termina después de un número finito de pasos, obtendremos la nueva sucesión infinita $C_{w+1} < C_{w+2} < \ldots$ que converge hacia $C_{w.2}$, que puede ser un A o un B. Si es un B, recomenzamos. Es claro que terminaremos con la formación de una sucesión transfinita $C_1 < C_2 < \ldots < C_w < \ldots < C_{w.2} \ldots < C_a$, donde C_a es un A y a es un número ordinal de la segunda clase, puesto que no puede haber en H una infinidad no-numerable de intervalos completamente distintos.

Análogamente se alcanza, a la izquierda de B_0, un primer elemento C'_b que es un A, y el intervalo (C'_b, C_a) contiene a B_0 y está formado exclusivamente por puntos B.

TEOR. 9. *Todo conjunto H, que satisface los axiomas I-VI, es separable.*

En otras palabras: *H contiene un sub-conjunto numerable denso en todas partes.*

Daremos la demostración por un procedimiento constructivo que consta de una sucesión transfinita, numerable, de etapas en las que se hace uso del axioma V, al cabo de las cuales se obtiene un conjunto numerable denso en todas partes de H.

En la primera etapa se construye una sucesión doble $\{A'_n\}$ de elementos de H que determina el intervalo $(-\infty, +\infty)$; este intervalo queda descompuesto en una infinidad numerable de intervalos parciales (A'_n, A'_{n+1}) sin elementos comunes. En la segunda etapa se hace una representación biunívoca ordenada del intervalo $(-\infty, +\infty)$ sobre todos los intervalos obtenidos en la etapa anterior, y en esa representación se toma como nuevos puntos de división los del conjunto (A''_n) cuyos elementos son las imágenes de los de la sucesión doble $\{A'_n\}$ en los intervalos (A'_n, A'_{n+1}): cada uno de estos intervalos (y también H) queda descompuesto en una nueva infinidad numerable de intervalos completamente distintos. Se prosigue así, por etapas que corresponden a cada uno de los números ordinales finitos: en la etapa de orden n se hace la representación biunívoca ordenada del intervalo $(-\infty, +\infty)$ sobre cada uno de los intervalos parciales obtenidos en la etapa anterior y se toma como nuevos puntos de división, en esos intervalos, las imágenes de los de la primitiva sucesión $\{A'_n\}$. Notemos que los puntos de división obtenidos en cada etapa vienen a ser puntos límite (por ambos lados) de los puntos de división de la etapa siguiente.

En la etapa ω, obtenemos un conjunto numerable (A_n), haciendo la unión de los conjuntos (A'_n), (A''_n), ... de los puntos de división construídos en cada una de las etapas de orden finito. Es inmediato que este conjunto (A_n) es denso en sí mismo y no tiene primero ni último elementos: (A_n) es una clase ordenada del tipo η que abraza a todo el conjunto H. Del hecho que (A_n) es denso en sí mismo, no podemos concluir que es denso en H, como es fácil comprobar con ejemplos. Si (A_n) no es denso en todas partes de H, este conjunto queda descompuesto en dos partes: los puntos A, que son los del conjunto (A_n) y sus puntos límite, y los puntos B, que son todos los restantes. Estos puntos B forman intervalos abiertos (teorema 8). En la etapa $\omega+1$ se hace la representación biunívoca ordenada del intervalo $(-\infty, +\infty)$ sobre cada uno de los intervalos B, y se toma como puntos de división de estos intervalos las imágenes de los de la primitiva sucesión doble $\{A'_n\}$. Se opera como en las etapas de orden finito, pasando ahora a través de las etapas $\omega+2$, $\omega+3$, ...

En la etapa $\omega \cdot 2$ se hace la unión de los puntos de división de las anteriores, contadas a partir de $\omega+1$, obteniendo un nuevo conjunto numerable (B_n) denso en sí mismo. El conjunto $(A_n)+(B_n)$ es una nueva clase ordenada del tipo η que abraza a todo el conjunto H. Si este conjunto es denso en todas partes de H, el proceso ha terminado. En el caso contrario, el conjunto H queda descompuesto en dos partes: los puntos A, que son los del conjunto $(A_n)+(B_n)$ y sus puntos límite, y los puntos B, que forman intervalos abiertos (teorema 8). En la etapa $\omega \cdot 2+1$, recomenzamos el proceso, como en la etapa $\omega+1$, ...

Es importante notar que todo intervalo obtenido en una etapa correspondiente a un número ordinal límite está contenido propiamente en un intervalo de cada una de las etapas anteriores. Teniendo en cuenta este hecho, es fácil dar un criterio que permita asignar un intervalo a cada etapa límite del proceso, de tal modo que no tengan puntos comunes los intervalos asignados a etapas diferentes. Concluimos de aquí que el proceso debe terminar en algún número ordinal límite de la segunda clase, pues no puede haber en H una infinidad no-numerable de intervalos completamente distintos (postulado VI). Esto significa que hemos obtenido un conjunto numerable $(A_n)+(B_n)+\ldots$ denso en todas partes de H.

El teorema 9 da una respuesta afirmativa a una cuestión prevista por Birkhoff, a saber: *Que el continuo ordinario puede caracterizarse como un continuo lineal homogéneo que satisface al postulado de Souslin.*

Aparte del continuo H_0, existen otros continuos lineales homogéneos esencialmente distintos del H_0, que no cumplen VI.

Vamos a dar un ejemplo de un continuo lineal homogéneo H_1, distinto de H_0.

Empezaremos por construir continuos lineales homogéneos: H_0^1, $H_0^2, \ldots, H_0^n, \ldots$; H_0^ω, $H_0^{\omega+1}, \ldots$; $H_0^{\omega.2}, \ldots$; correspondientes a todos los números ordinales de la 1ª y 2ª clases. Cada uno de estos continuos resultará equivalente al H_0.

H_0^1 está formado por todos los símbolos $[x_1]$, donde x_1 es cualquier número real del intervalo $0 < x < 1$.

H_0^2 está constituído por todos los símbolos de una entrada $[\alpha_1]$ y por los de dos entradas $[p/q, x_2]$, donde α_1, p/q, x_2 son, respectivamente, números irracional, racional y real cualesquiera del intervalo $0 \leqq x \leqq 1$ exceptuando para p/q los valores 0 y 1. Dos símbolos distintos pueden diferir en la primera entrada, o bien tener ésta común y diferir en la segunda; ordenaremos H_0^2 lexicográficamente, es decir, dados los elementos A y B de H_0^2, $A < B$ si y sólo si:

1) La primera entrada de B es mayor que la primera en A;

2) en caso de ser las primeras entradas iguales entre sí, la segunda entrada de B es mayor que la correspondiente en A.

Es fácil ver que H_0^2 así ordenado, satisface los postulados I, II, III y IV. Además, entre los símbolos $[p/q, x_2]$ figuran los de dos entradas racionales: $[p/q, r/s]$, $0 < r/s < 1$. Estos últimos forman un conjunto N_2, numerable y denso en todas partes de H_0^2. Por consiguiente, se puede establecer una correspondencia biunívoca, que conserve el orden, entre H_0^2 y H_0. En consecuencia, H_0^2 es equivalente a H_0.

Nota. En lo que sigue, las α_i, x_i, representarán, respectivamente, números irracionales y reales cualesquiera del intervalo cerrado $(0, 1)$; p/q, $r/s, \ldots$ denotarán fracciones comprendidas entre 0 y 1. Los símbolos $[0]$ y $[1]$, que no pertenecen propiamente al continuo, son elementos ideales de éste, con un papel análogo al de $-\infty$ y $+\infty$ en las definiciones de intervalo y de límite de una sucesión.

Continuando, tenemos los elementos de $H_0^3, \ldots, H_0^n, \ldots$ que son del tipo:

H_0^3 : $[\alpha_1]$, $[p/q, \alpha_2]$, $[p/q, r/s, x_3]$,

. . . .

H_0^n : $[\alpha_1]$, $[p/q, \alpha_2]$, $[p/q, r/s, \alpha_3], \ldots,$ $[p/q, r/s, \ldots, t/u, \alpha_{n-1}]$, $[p/q, r/s, \ldots, t/u, v/w, x_n]$.

....

H_0^ω : $[\alpha_1]$, $[p/q, \alpha_2]$, $[p/q, r/s, \alpha_3], \ldots,$ $[p/q, r/s, \ldots, v/w, \alpha_n]$, $\ldots;$ $[p/q, r/s, \ldots, v/w, \ldots]$.

En H_0^ω el último tipo de símbolo: $[p/q, r/s, \ldots, v/w, \ldots]$, está formado por una sucesión infinita de fracciones del intervalo abierto $(0, 1)$. Todos los símbolos de un tipo anterior terminan en un α_p cuyo índice es el número de elementos del símbolo correspondiente.

Notemos que, si a cada símbolo se le asigna un rango de acuerdo con el número ordinal de la sucesión de sus elementos, a los símbolos del último tipo les corresponde el rango ω.

Entre los símbolos $[p/q, r/s, \ldots, v/w, \ldots]$ del rango ω, que figuran en H_0^ω, hay algunos que tienen todas sus entradas iguales a e/m, a partir de una de ellas; estos símbolos, que denotaremos por $[p/q, \ldots, e/m]$, constituyen un conjunto N_w numerable. A los símbolos restantes del rango ω los representaremos por $[p_r/q_r]_1^\omega$.

Suprimamos de H_0^ω todos los símbolos $[p/q, \ldots, e/m]$ y agreguemos los nuevos símbolos $[p/q, \ldots, e/m; x_{w+1}]$, para obtener $H_0^{\omega+1}$:

$H_0^{\omega+1}$: $[\alpha_1]$, $[p/q, \alpha_2], \ldots,$ $[p/q, \ldots\ v/w. \alpha_n]\ \ldots;$ $[p_r/q_r]_1^\omega$, $[p/q, \ldots, e/m; x_{w+1}]$.

Estos conjuntos $H_0^3, \ldots,$ H_0^ω, $H_0^{\omega+1}$, resultan equivalentes al H_0 si se ordenan lexicográficamente (es decir, dados dos símbolos A, B, $A \neq B$, $A < B$ si y sólo si, en la primera entrada en que difieran, B posee la de mayor valor). La demostración de su equivalencia con H_0 se dará después, junto con la del resto de ellos.

Definiremos por inducción los continuos lineales homogéneos restantes; utilizaremos símbolos cuyos elementos forman sucesiones finitas o transfinitas de números del intervalo cerrado $(0, 1)$, y para simplificar la exposición, llamaremos segmento de un símbolo dado a aquel cuyos elementos son un segmento de la sucesión de tal símbolo. Rango de un símbolo será el número ordinal del conjunto ordenado de sus elementos.

En todos los H_0^σ ya definidos podemos observar las características siguientes:

a) El conjunto de símbolos de máximo rango tiene un subconjunto N^σ, numerable y denso en todas partes. Los elementos de N^σ están constituídos por sucesiones de racionales del intervalo abierto $(0, 1)$.

b) Para definir a $H_0^{\sigma+1}$ se suprimen los elementos de N^σ y se añaden nuevos símbolos: los que resultan de agregar a los suprimidos un número real cualquiera del intervalo cerrado $(0, 1)$.

c) Para que un símbolo de rango inferior a σ sea elemento de H_0^σ es necesario y suficiente que:

c_1) Si tiene un último elemento, este debe ser un α_i, 0 ó 1.

c_2) Todo segmento del símbolo debe ser un símbolo suprimido en una etapa anterior.

La condición c_2) por sí sola es necesaria y suficiente para que un símbolo de rango σ sea elemento de H_0^σ.

d) Todo símbolo A de N^σ se puede obtener de algún símbolo B de rango σ', suprimido en una etapa anterior, agregándole a éste una sucesión de orden $\sigma - \sigma'$ de elementos iguales a un mismo número racional. Recíprocamente, si B es un símbolo de rango $\sigma' < \sigma$, suprimido en una etapa anterior, al agregarle una sucesión de elementos iguales a un mismo número racional y de orden $\sigma - \sigma'$, se obtiene un elemento de N^σ.

Sea ahora σ un número de la segunda clase; definiremos H_0^σ suponiendo que $H_0^{\sigma'}$ se ha definido ya para todo $\sigma' < \sigma$, y en tal forma que se satisfacen a) — d).

Consideremos primero el caso en que σ es número límite.

Para obtener H_0^σ, tomemos el conjunto de los símbolos que figuran en todas las $H_0^{\sigma'}$ a partir de alguna etapa, y agreguémosle todos los símbolos de rango σ, constituídos únicamente por racionales del intervalo abierto $(0, 1)$, que satisfagan la condición: todo segmento es un símbolo suprimido en una etapa anterior.

Demostraremos a continuación que H_0^σ tiene las características a) y d):

Si a cualquier elemento eliminado en alguna etapa anterior a σ, le agregamos un mismo número racional, tantas veces como sea necesario para obtener una sucesión de orden σ, tendremos un símbolo con la propiedad de que todo segmento es un elemento suprimido antes; por consiguiente, todos los símbolos así formados son miembros de máximo rango en H_0^σ, y constituyen un conjunto numerable N^σ. Veremos ahora que N^σ es denso en todas partes de H_0^σ.

Sean A y B, $A < B$, dos símbolos de H_0^σ; denotando por τ el orden de la primera entrada en que difieran, llamemos v/w y v'/w' a dichas entradas en A y B, respectivamente, $(v/w < v'/w')$. El segmento común a A y B está formado por todas las entradas anteriores a la de orden τ y es un símbolo suprimido antes; agreguémosle el número racional $\frac{1}{2}(v/w + v'/w')$ repetidamente hasta obtener un símbolo C de N^{σ}. Es claro que $A < C < B$. Queda pues demostrado que H_0^{σ}, cuando σ es número límite, tiene las propiedades a) y d).

Por otra parte, dada la manera en que H_0^{σ} está definido, es inmediato que se satisface c).

Demostraremos ahora que toda sucesión creciente de elementos de H_0^{σ} converge:.

Supongamos primero que todos los elementos de la sucesión $A_1 < A_2 < A_3 < \ldots$ son de rango σ. Tomemos la primera entrada en cada A_n; resulta así una sucesión no decreciente de números racionales $\{p_n/q_n\}$ y tenemos dos posibilidades:

i) $\{p_n/q_n\}$ contiene un número infinito de elementos diferentes.

ii) los números p_n/q_n son todos iguales a partir de cierto rango.

Si se da i) sea $y = \lim\limits_{n \to \infty} p_n/q_n$. Definamos B.

como $$B = \begin{cases} [y], \text{ si } y \text{ es } 1 \text{ ó irracional.} \\ [y, o], \text{ si } y \text{ es racional} < 1. \end{cases}$$

Por lo tanto, B es un elemento de H_0^{σ}; además, $B > A_n$ para toda n, y si $C \neq B$ es tal que $C > A_n$ para cada valor de n, entonces $C > B$:

$$\therefore \quad B = \lim A_n, \text{ por el teorema 6.}$$

Si se da ii), p_n/q_n tiene el mismo valor para $n \geqq n_1$. Sea G_{n_1} el segmento común a A_{n_1}, $A_{n_1+1} \ldots$ (G_{n_1} tiene un elemento al menos); si nos fijamos ahora en la primera entrada (en cada A_n) posterior a los elementos de G_{n_1}, vemos que forman una sucesión no decreciente a partir de $n = n_1$, y se nos presentan dos casos análogos a i) y ii). En el último caso tendríamos un número $n_2 > n_1$ y un segmento G_{n_2}, conteniendo a G_{n_1}, común a A_{n_2}, A_{n_2+1}, $A_{n_2+2} \ldots$; entonces podemos subdividir ii) en dos casos:

ii)$_1$: la sucesión de números $n_1, n_2, \ldots$ es finita: $n_1 < n_2 < \ldots < n_m$.

ii)$_2$: la sucesión de números $n_1, n_2, \ldots$; es infinita.

Si se da ii)$_1$, consideremos la primera entrada después de los elementos de G_{n_m}, en cada A_n. Tales entradas constituyen una sucesión $\{S_n\}$ no decreciente a partir de n_m y con una infinidad de elementos distintos. Ahora bien, los símbolos $\{A_n\}$ tienen, para $n \geqq n_m$, el segmento común Gn_m; luego, éste es un símbolo [C] que se ha suprimido antes. Si $y = \lim S_n$, definamos B como

$$B = \begin{cases} [C, y] \text{ si } y \text{ es } 1 \text{ ó irracional.} \\ [C\ y, 0] \text{ si } y \text{ es racional} < 1. \end{cases}$$

Por consiguiente, B es símbolo de H_0^σ y es claro que $B = \lim A_n$.

Si el caso es $ii)_2$, tomemos en cada A_n entradas del mismo rango que figuren en alguno de los segmentos Gn_1, Gn_2, $Gn_3, \ldots$ Las sucesiones formadas por ellas tienen límites racionales; consideremos el símbolo [C] formado por tales límites. Todo segmento de [C] es común a las A_n a partir de cierto rango, luego [C] es un elemento de H_0^σ o un símbolo suprimido antes. Definamos.

$$B = \begin{cases} [C, O], \text{ si } [C] \text{ es un símbolo suprimido antes.} \\ [C], \text{ si } [C] \text{ es de } H_0^\sigma. \end{cases}$$

Ahora bien, la primera entrada de B es mayor que la primera entrada de A_n para $1 \leqq n < n_1$, luego $B > A_n$ para $1 \leqq n < n_1$. Tomando ahora de B la primera entrada después del segmento Gn_1, vemos que es mayor que las correspondientes en A_n para $n_1 \leqq n < n_2$; luego $B > A_n$ para $n_1 \leqq n < n_2$, etc. Pero la sucesión $n_1, n_2, \ldots$ es infinita; por lo tanto, $B > A_n$ para toda n. Además, si $B' \neq B$ es tal que $B' > A_n$ para cada n, tenemos, para cualquier m, que An_m, An_m+1, $An_m+2 \ldots$ poseen el segmento común Gn_m; luego, todo segmento de B' de orden inferior o igual al de Gn_m tiene todas sus entradas iguales respectivamente que las de éste, o alguna mayor. Por consiguiente, debe ser $B' > B$ y queda demostrado que $B = \lim A_n$.

Finalmente, sea $D_1 < D_2 < D_3 < \ldots$ una sucesión creciente de elementos cualesquiera de H_0^σ; ya que N^σ es denso en todas partes, se puede extraer una sucesión $\{A_n\}$ de N^σ tal que $D_1 < A_1 < D_2 < A_2 < D_3 < A_3 < \ldots$

Llamando B al límite de A_n, tendremos también $B = \lim D_n$. Queda demostrado así que toda sucesión creciente de H_0^σ converge a algún elemento de H_0^σ.

Supongamos ahora que σ no es número límite, es decir, existe $\sigma - 1$. Definamos H_0^σ como el conjunto que resulta de las dos operaciones siguientes:

1^{a}, se suprime en $H_0^{\sigma-1}$ el conjunto $N^{\sigma-1}$.

2^{a}, se agregan nuevos símbolos (de orden σ) formados al añadir a cada elemento de $N^{\sigma-1}$ un número real cualquiera, del intervalo $0 \leqq x \leqq 1$.

Definamos a N^{σ} como el conjunto de símbolos de orden σ que terminan en un $p/q, 0 < p/q < 1$. Evidentemente N^{σ} es numerable, y se demuestra en forma análoga a como se hizo antes, que N^{σ} es denso en todas partes; luego se satisface a). Se ve fácilmente que se satisfacen también las restantes.

Ahora bien, si $A_1 < A_2 < A_3 < \ldots$ son elementos de rango σ, definamos A'_n como el segmento que resulta de suprimir en A_n la última entrada. Luego $\{A'_n\}$ es una sucesión no decreciente de elementos de $N^{\sigma-1}$ y tenemos dos posibilidades:

i) A'_n contiene una infinidad de elementos distintos;

ii) las A'_n son iguales entre sí a partir de cierto rango n_1.

En el caso i) sea $B' = \lim A'_n$ y definamos

$$B = \begin{cases} [B', 0] \text{ si } B' \text{ es de } N^{\sigma-1}; \\ B', \text{ si } B' \text{ no es de } N^{\sigma-1}. \end{cases}$$

En consecuencia, B es de H_0^{σ} y $B = \lim A_n$.

Si se tiene el caso ii), la última entrada en A_n forma una sucesión creciente para $n \geqq n_1$; llamemos y al límite de tal sucesión y definamos

$$B = [A'_{n_1}\ y].$$
$$\therefore B = \lim A_n.$$

En resumen, se ha definido H_0^{σ} donde σ es cualquier número de la primera y segunda clases.

Estos conjuntos satisfacen los postulados I, II, III y IV y posee, cada uno de ellos, un subconjunto (el N^{σ}) numerable y denso en todas partes. En consecuencia, son equivalentes al H_0.

El conjunto H_1:

Definamos H_1 como el conjunto de los símbolos que aparecen en todas las H_0^{σ}, a partir de algún valor de σ en adelante. Es inmediato que H_1, ordenado lexicográficamente, satisface los postulados I al III.

Sea ahora $A_1 < A_2 < A_3 < \ldots$ una sucesión creciente de elementos de H_1 Como estas A_n forman un conjunto numerable, existe un número ordinal τ de la primera o segunda clase, superior al rango de cualquiera de los símbolos A_n. Por consiguiente, la totalidad de estos figura en $H_0{}^\tau$; luego $A_n \rightarrow C$ de $H_0{}^\tau$. Definamos B como

$$B = \begin{cases} C, \text{ si } C \text{ es de } H_1\,; \\ [C\,0] \text{ si } C \text{ es de } N^\tau. \end{cases}$$

$$\therefore\; B = \text{lím } A_n \text{ en } H_1.$$

Análogamente se demostraría que toda sucesión decreciente de elementos de H_1 converge hacia un símbolo de H_1. En consecuencia, H_1 satisface el postulado IV.

Demostraremos ahora que H_1 es homogéneo:

Sean A, B, A′, B′ ($A < B$ y $A' < B'$), cuatro elementos de H_1. Denotemos por $H_0{}^\sigma$ el primer continuo en que figuran A, B, A′, B′. Sean M_1 y M_2 las partes comunes a N^σ y (A, B), N^σ y (A', B'), respectivamente. Se sabe que hay una correspondencia biunívoca entre (A, B) y (A', B'), que conserva el orden, y en la cual M_2 es la imagen de M_1. Ahora bien, dado cualquier otro símbolo C de H^1, con rango superior a σ y tal que $A < C < B$, consideremos el símbolo C_0: segmento de rango σ de C. C_0 debe ser un elemento de M_1 y le corresponde un elemento C'_0 de M_2. Construyamos el elemento C' de igual rango que C, agregando a C'_0 todas las entradas de C de orden posterior a σ. Es claro que $A' < C' < B'$, y esta correspondencia entre los intervalos (A, B) y (A', B') en H_1 es biunívoca. Por otra parte, se ve fácilmente que dicha correspondencia conserva el orden. Queda demostrado así que H_1 es un continuo lineal homogéneo.

Veremos ahora que H_1 no es equivalente a H_0 porque H_1 contiene un conjunto no-numerable de intervalos completamente distintos:

A todo número σ de la primera o segunda clase, que no sea número límite, asociémosle al símbolo que tenga como última entrada un cierto número irracional $\alpha > 0$, y todas las entradas anteriores iguales a un cierto racional p/q. Este conjunto de símbolos, que son elementos de H_1, es de potencia alef-uno y determina un conjunto, de potencia alef-uno también, de intervalos completamente distintos en la forma siguiente:

$$[\alpha] < [p/q, \alpha] < [p/q, p/q, \alpha] < \ldots < [p/q\,; \alpha] < [p/q, p/q, \alpha] < \ldots$$

Por otra parte, si a todos los símbolos de las N^σ para $\sigma = 1, 2, \ldots$ ω, $\omega + 1, \ldots$, les agregamos un cero al final de ellos, obtendremos un subconjunto de H_1, denso en todas partes y cuyo número cardinal es alef-uno. Por consiguiente, H_1 no puede contener una familia de potencia superior a alef-uno, de intervalos completamente distintos.

Observaciones:

1ª En H_1 no hay un teorema análogo al de Dedekind, esto es, no toda cortadura determina un elemento de H_1. Por ejemplo, si tomamos como clase I la formada por todo elemento de H_1, que sea anterior a alguno de los símbolos del tipo considerado antes: $[\alpha]$, $[p/q, \alpha]$, $[p/q, p/q, \alpha], \ldots$; $[p/q, \alpha]$, $[p/q\,; p/q, \alpha], \ldots$ y como clase D tomamos el complemento de I en H_1, obtendremos una cortadura de Dedekind que no determina elemento alguno de H_1. Este hecho lo podemos expresar en otra forma equivalente, diciendo que hay conjuntos abiertos en H_1 que no pueden descomponerse en intervalos.

2ª Sea H un conjunto cuyos elementos son sucesiones de números del intervalo $(0, 1)$, con la única limitación de que el número ordinal de ellas sea inferior a ω_1. Aceptando la hipótesis del continuo tendríamos que la potencia de H no es superior a alef-uno; por consiguiente, la limitación impuesta a sus elementos no permite que H contenga conjuntos de intervalos completamente distintos, de número cardinal superior a alef-uno.

Por otra parte, si además de los elementos de rango inferior a ω_1, utilizáramos símbolos de rango superior o igual a éste, nos encontraríamos en la situación siguiente: los símbolos del último tipo son límite de sucesiones crecientes de número ordinal $\tau \geqq \omega_1$; por consiguiente, no pueden ser límite de sucesiones crecientes de número ordinal ω. Luego, no habría homogeneidad.

Vemos así que, al continuar el proceso por el cual obtuvimos H_1, no llegaríamos a nuevos continuos lineales homogéneos que tuvieran familias, de potencia superior a alef-uno, de intervalos completamente distintos.

México, D. F., enero de 1944.

INSTITUTO DE MATEMÁTICAS, U. N. A.