NOTA SOBRE EL CONTINUO

Por Francisco Zubieta Russi, y
Roberto Vázquez García.

El continuo ordinario ha sido definido por Cantor como un conjunto ordenado H, de elementos a, b, c,... que satisface los postulados siguientes:

1. *Cualquiera que sea el elemento a (de H), existen b, c, (de H) tales que $b < a < c$.*

2. *Cualesquiera que sean a y b, existe c tal que $a < c < b$.*

3. *Toda sucesión infinita creciente de elementos de H es convergente, o bien sus elementos sobrepasan a cualquier elemento dado, a partir de cierto rango (que depende del elemento dado).*

4. *H es separable; es decir: contiene un subconjunto numerable, denso en todas partes de H.*

Dos proposiciones muy importantes se deducen de los postulados anteriores, y son éstas:

5. *Entre dos intervalos cualesquiera de H, existe una correspondencia bi-unívoca que conserva el orden de precedencia.*

6. *Todo conjunto de intervalos completamente distintos es numerable.*

Esta nota tiene por objeto presentar la solución de un importante problema sobre el continuo, propuesto por Souslin en Moscú. El problema es éste: ¿Puede definirse el continuo ordinario como un conjunto ordenado H' que satisface a las proposiciones 1, 2, 3 y 6?

En otro artículo que aparece en la presente edición de este Boletín (ver teorema 9), presentamos la respuesta a un problema análogo, propuesto por

Birkhoff, a saber: *Los postulados 1, 3, 5 y 6 definen completamente al continuo ordinario.*

La solución del problema de Souslin está dada por el teorema D, que viene después. En lo que sigue, H′ es el conjunto definido por los postulados 1, 2, 3 y 6.

TEOREMA A. *Todo elemento b de H′ es el límite de una sucesión infinita creciente de elementos de H′.*

Por 1, existe un elemento $b_1 < b$, y por 2, existe b_2 tal que $b_1 < b_2 < b$; también existe b_3 tal que $b_2 < b_3 < b; \ldots$ podemos formar así una sucesión infinita $b_1 < b_2 < b_3 < \ldots$ que converge, por 3, hacia un elemento límite $b_w \leqq b$. Si $b_w = b$, el teorema está demostrado. Si $b_w < b$, podemos construir una nueva sucesión infinita $b_{w+1} < b_{w+2} < \ldots$ que converge hacia un límite $b_{w.2} \leqq b$. Con este nuevo elemento límite, repetimos el razonamiento hecho con b_w, y proseguimos así, hasta detenernos, en vista de 6, en un elemento $b_a = b$, siendo a un número ordinal límite de la segunda clase. La sucesión transfinita $b_1 < b_2 < \ldots < b_w < \ldots < b_a$ puede reemplazarse por una sucesión infinita $b'_1 < b'_2 < b'_3 < \ldots$ cuyo límite es $b'_w = b$.

Una proposición equivalente al postulado 3 es ésta:

3′. *Toda sucesión infinita decreciente converge hacia un elemento (único) de H′, o bien sus elementos se hacen inferiores a cualquier elemento dado, a partir de cierto rango.*

La equivalencia entre 3 y 3′ salta a la vista, si se toma en cuenta la relación $>$, inversa de $<$.

COROLARIO 1: *Todo elemento a de H′ es el límite de una sucesión infinita decreciente de H′.*

COROLARIO 2: *Todo intervalo abierto (a, b) de H′ puede abrazarse por medio de una sucesión doble del tipo creciente* $\ldots < a_{-1} < a_0 < a_1 < a_2 < \ldots$, *contenida totalmente en (a, b) y cuyos límites son los extremos del intervalo.*

Análogamente se prueba la existencia de sucesiones dobles del tipo creciente que abrazan al intervalo total H′.

TEOREMA B. *Toda cortadura en el conjunto ordenado H′ define un elemento y sólo uno de H′.*

Sea [A, B] una cortadura cualquiera de H′: la clase A precede totalmente a la clase B. Supongamos que no hay en A un último elemento ni hay en B un primer elemento. Con tal hipótesis, es fácil ver que A satisface los mismos axiomas 1, 2, 3 y 6 que H′. Existe, por lo tanto, una sucesión infinita creciente de elementos de A cuyos elementos, a partir de cierto rango, sobrepasan a cualquier elemento dado en A: tal sucesión, que es una sucesión acotada en H′, no puede converger hacia un elemento de A, ni puede converger hacia uno de B, si B no tiene un primer elemento. Hemos llegado así a una contradicción con el postulado 3. Concluimos que, en toda cortadura [A, B] de H′, la clase A tiene un último elemento o B tiene un primer elemento; no pudiendo suceder ambas cosas, porque, si a fuera el último elemento de A y b fuera el primero de B, entre a y b no habría otros elementos de H′, en contradicción con el postulado 2.

TEOREMA C. *Si A es un sub-conjunto abierto no-vacío de H′, A está constituído por intervalos abiertos cuyos extremos pertenecen al complemento.*

Este teorema es equivalente al anterior.

TEOREMA D. *El continuo H′ es separable.*

Es claro, en vista de un corolario anterior, que la demostración del teorema 9 del otro artículo se aplica ahora, pues podemos abrazar cada intervalo de H′ por medio de una sucesión doble del tipo creciente, sin usar para ello el postulado de la homogeneidad; además, en cada etapa correspondiente a un número ordinal límite los puntos B, si los hay, forman intervalos abiertos en virtud del teorema C. La analogía puesta en claro entre ambos problemas (el de Birkhoff y el de Souslin) nos condujo a buscar una demostración común y de allí surgió la del citado teorema 9.

En resumen: Se tienen tres definiciones equivalentes del continuo ordinario:

1) la de Cantor, con los axiomas 1, 2, 3 y 4;

2) la de Birkhoff, con los axiomas 1, 3, 5 y 6;

3) la de Souslin, con los axiomas 1, 2, 3 y 6.