

BOLETIN

DE LA

SOCIEDAD MATEMATICA MEXICANA

VOLUMEN I

NUMERO 3

CONTENIDO

	Página
ORBITAS PERIODICAS DE LA RADIACION COSMICA PRIMARIA.	
<i>Por Carlos Graef Fernández.</i>	1
RESEÑA DE LA PRIMERA ASAMBLEA DE LA SOCIEDAD MATEMATICA MEXICANA, CORRESPONDIENTE AL AÑO DE 1944	33
DISCURSO DEL DOCTOR GEORGE B. BIRKHOFF EN LA PRIMERA ASAMBLEA ANUAL DE 1944	36
NOTA BIBLIOGRAFICA	38
NOTAS VARIAS	39

ABRIL, 1944

MEXICO

SOCIEDAD MATEMATICA MEXICANA

Fundada en la ciudad de México el 30 de junio de 1943

Junta Directiva (1943-1945)

Presidente: *Dr. Alfonso Nápoles Gándara.*
Vicepresidente: *Dr. Carlos Graef Fernández.*
Secretario General: *Ing. Francisco José Alvarez.*
Tesorero: *Ing. Ricardo Monges López.*
Secretario de Actas: *Ing. Genaro Ambía Pedraza.*
Vocal: *Ing. Mariano Hernández.*
Vocal: *M. en C. Alberto Barajas Celis.*

Comité Consultivo

Comité Patrocinador

Dr. Manuel Sandoval Vallarta.
Dr. Blas Cabrera.
Dr. Joaquín Gallo.

Comisión de Publicaciones

M. en C. Francisco Zubieta Russi.
Ing. Javier Barros Sierra.
Prof. Enrique Valle Flores.

BOLETIN DE LA SOCIEDAD MATEMATICA MEXICANA

Publicación Trimestral.

Director: *Dr. A. Nápoles G.*

Redactores: *Prof. F. Zubieta, Ing. J. Barros Sierra, Prof. E. Valle Flores.*

Oficinas: Sociedad Matemática Mexicana. Tacuba Núm. 5. México, D. F.

Precio de cada ejemplar: \$1.00

Los miembros de la Sociedad tienen derecho a recibir gratuitamente este Boletín (Estatutos, Art. 54).

Editado por la Sociedad Matemática Mexicana, con la cooperación económica de la C. I. C. I. C. y de la U. N. A.

ORBITAS PERIODICAS DE LA RADIACION COSMICA PRIMARIA

Carlos Graef Fernández.

Según una teoría sobre el origen de ciertas tormentas magnéticas propuesta por el doctor Manuel Sandoval Vallarta, una emisión abundante de partículas cargadas provenientes del sol puede dar origen a corrientes eléctricas en torno de la tierra, que causan ciertas perturbaciones magnéticas. Las partículas cargadas recorren las órbitas periódicas de la radiación cósmica primaria; esto es posible, porque entre estas órbitas se conocen algunas que son inestables, y que además admiten órbitas asintóticas que pasan por el punto al infinito. Störmer señaló la existencia de dos familias de órbitas periódicas; todos los miembros de ambas familias cortan el ecuador magnético y son perfectamente simétricas con respecto a este plano.

En una primera aproximación se considera que las partículas al recorrer estas órbitas, forman una corriente anular localizada en el ecuador y con centro en el dipolo terrestre.

La corriente anular ecuatorial por sí sola, es únicamente una buena aproximación, en el caso de que no existan otras órbitas periódicas en la vecindad del dipolo que no corten al ecuador. En este trabajo se demuestra que todas las órbitas periódicas de la radiación cósmica primaria cortan al ecuador y que por lo tanto la corriente anular ecuatorial es una buena aproximación en el estudio de las perturbaciones magnéticas causadas por partículas cargadas emitidas por el sol.

Este artículo trata de las órbitas trazadas por una partícula cargada, moviéndose en el campo de un dipolo, en un plano meridiano que gira conteniendo siempre a la partícula.

Con el objeto de estudiar estas órbitas es muy conveniente efectuar una transformación homotética del plano meridiano real, amplificándolo con el factor $|2\gamma_1|$; γ_1 es el bien conocido parámetro introducido por Carl Störmer. En el plano meridiano transformado usamos el eje del dipolo como eje de la ξ , y el eje ecuatorial como eje de las η . Para $\gamma_1 = 0$ no se puede efectuar la transformación y en este caso estudiamos el plano meridiano directamente.

Las ecuaciones del movimiento de la partícula cargada para $\gamma_1 \neq 0$ en el plano ξ, η son las siguientes:¹

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{d^2\xi}{dt^2} = -u \frac{\partial u}{\partial \xi} \\ \frac{d^2\eta}{dt^2} = -u \frac{\partial u}{\partial \eta} \\ \left(\frac{d\xi}{dt} \right)^2 + \left(\frac{d\eta}{dt} \right)^2 = a^2 - u^2 = M \end{cases}$$

$$(2) \quad u = \frac{\xi}{r^3} - \frac{1}{\xi} \text{ para } \gamma_1 > 0$$

$$(3) \quad u = \frac{\xi}{r^3} + \frac{1}{\xi} \text{ para } \gamma_1 < 0$$

$$(4) \quad r = (\xi^2 + \eta^2)^{1/2}$$

$$(5) \quad a = \left(\frac{1}{2\gamma_1} \right)^4$$

¹ Carl STÖRMER.—*Programme for the Quantitative Discussion of Electron Orbits in the Field of a Magnetic Dipole, with Application to Cosmic Rays and Kindred Phenomena*. Comptes Rendus du Congrès International des Mathématiciens. Tomo I, p. 65. Oslo, 1936.

En este sistema de coordenadas existen solamente tres diagramas del campo potencial, uno para $\gamma_1 > 0$, otro para $\gamma_1 < 0$, y el último para $\gamma_1 = 0$. El campo potencial para cada γ_1 particular, se obtiene cambiando la designación de las líneas equipotenciales individuales. El parámetro γ_1 de Störmer desempeña el papel de una constante de energía.

Carl Störmer³ muestra en *Terrestrial Magnetism*, volumen 37, página 381, 1932, los campos potenciales para $\gamma_1 > 0$ y para $\gamma_1 < 0$ en todo detalle.

Para $\gamma_1 = 0$ las ecuaciones del movimiento son:²

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2\xi}{dt^2} = -v \frac{\partial v}{\partial \xi} \\ \frac{d^2\eta}{dt^2} = -v \frac{\partial v}{\partial \eta} \\ \left(\frac{d\xi}{dt} \right)^2 + \left(\frac{d\eta}{dt} \right)^2 = 1 - v^2 \end{array} \right.$$

$$(7) \quad v = \frac{\xi}{r^3} - \frac{1}{\xi}$$

$$(8) \quad r = (\xi^2 + \eta^2)^{1/2}$$

Los valores positivos de γ_1 son los importantes en la Teoría de la Radiación Cósmica; en este trabajo trataremos exclusivamente de ellos, excepto en los casos en que explícitamente se afirme lo contrario.

En el campo potencial para $\gamma_1 > 0$ hay una línea equipotencial muy importante, la línea $u = 0$. (Véase la ecuación (2).) Su ecuación es:

$$(9) \quad \eta = [\xi^{1/3} - \xi^2]^{1/2};$$

2 Carl STÖRMER.—*On the trajectories of electric particles in the field of a magnetic dipole*. P. 11. Observatorio de la Universidad de Oslo. Publicación Núm. 10. Oslo, 1934.

3 Carl STÖRMER.—*Terrestrial Magnetism*, 37, 382, 1932.

Expresada en coordenadas polares, esta ecuación es:

$$(10) \quad r = \cos^2 \Theta$$

A esta línea la llama Störmer, línea $U = 0^{(2)}$. Lemaitre y Vallarta llaman a esta línea, la línea $\Theta = 0^{(4)}$. Desde hace muchos años se ha designado a esta línea en discusiones verbales con el nombre de "Talweg".

A la depresión del campo potencial que tiene por línea de potencial mínimo al Talweg, se le designa con el nombre de "Valle".

Es posible reducir el problema dinámico del movimiento de una partícula cargada en el campo de un dipolo magnético, al problema geométrico de determinar las geodésicas en una superficie, llamada la superficie característica. Esta transformación tiene la ventaja de eliminar a la variable tiempo del problema. El análisis de la geometría de las órbitas se efectúa más fácilmente a partir de las ecuaciones diferenciales de las geodésicas, que a partir de las ecuaciones dinámicas del movimiento.

La transformación se obtiene inmediatamente a partir del principio de la acción mínima.⁵ Sea h la constante de la energía, V la energía potencial, y T la energía cinética de un problema dinámico en un espacio euclideo de dos dimensiones con las coordenadas cartesianas ξ y η . El principio de la acción mínima se expresa entonces como sigue:

$$(11) \quad \delta \int_A^B \sqrt{\left\{ (h - V) \left[\left(\frac{d\xi}{dt} \right)^2 + \left(\frac{d\eta}{dt} \right)^2 \right] \right\}} dt = 0$$

Eliminando a t de (11) se obtiene:

$$(12) \quad \delta \int_A^B \sqrt{(h - V) (d\xi^2 + d\eta^2)} = 0$$

La ecuación (12) es la ecuación variacional de las geodésicas de la superficie cuya ds^2 es:

$$(13) \quad ds^2 = (h - V) (d\xi^2 + d\eta^2)$$

4 G. LEMAITRE y M. S. VALLARTA.—*Physical Review*, 49, 719. 1936.

5 A. J. MCCONNELL.—*Applications of the Absolute Differential Calculus*. Págs. 228-230. Londres, 1931.

La superficie definida por (13) es la superficie característica.

$$\text{En nuestro problema } h = 0 \text{ y } V = -\frac{1}{2}M.$$

La superficie característica está definida por:

$$(14) \quad ds^2 = 1/2 M(d\xi^2 + d\eta^2)$$

Por un simple cambio de la unidad de longitud en la superficie, (14) se transforma en:

$$(15) \quad ds^2 = M(d\xi^2 + d\eta^2)$$

La ecuación diferencial de las geodésicas en la superficie característica, es idéntica a la ecuación diferencial de las trayectorias de las partículas cargadas en el plano meridiano.

Esta ecuación diferencial es: ⁶

$$(16) \quad \frac{d^2\eta}{d\xi^2} = \frac{1}{2M} \left[1 + \left(\frac{d\eta}{d\xi} \right)^2 \right] \left[\frac{\partial M}{\partial \eta} - \frac{\partial M}{\partial \xi} \frac{d\eta}{d\xi} \right]$$

, o también

$$(17) \quad \frac{d^2\xi}{d\eta^2} = \frac{1}{2M} \left[1 + \left(\frac{d\xi}{d\eta} \right)^2 \right] \left[\frac{\partial M}{\partial \xi} - \frac{\partial M}{\partial \eta} \frac{d\xi}{d\eta} \right]$$

Con objeto de hacer más clara la exposición nos referiremos al plano con las coordenadas cartesianas ξ y η con el nombre de "plano ξ, η " y nos referiremos a la superficie con las coordenadas curvilíneas ξ y η con el nombre de "superficie ξ, η ". A las curvas definidas por (16) ó (17) en el plano ξ, η las llamamos "trayectorias", y a las curvas definidas en la superficie por las mismas ecuaciones (16) y (17), las llamamos "geodésicas".

⁶ Luigi BIANCHI.—*Lezioni di Geometria Differenziale*. Vol. I, p. 277. Pisa, 1922.

Las trayectorias forman una familia natural en el sentido de Painlevé;⁷ de manera que la región permitida en el plano ξ, η con su red cartesiana y sus trayectorias, es una imagen conforme de la superficie característica ξ, η , con su red de coordenadas curvilíneas y sus geodésicas.

La curvatura Gaussiana de la superficie definida por (15) es:⁸

$$(18) \quad K = \frac{(\nabla M)^2 - M\Delta M}{2M^3},$$

en donde:

$$(19) \quad (\nabla M)^2 = \left(\frac{\partial M}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial M}{\partial \eta} \right)^2,$$

y donde:

$$(20) \quad \Delta M = \frac{\partial^2 M}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 M}{\partial \eta^2}.$$

K es positiva en toda la extensión de la región permitida del plano ξ, η para valores positivos de γ_1 .

Teorema 1.—La superficie característica tiene curvatura Gaussiana positiva en todos sus puntos.

Al acercarse de cualquier manera, de un punto en el que $M \neq 0$ a otro en el que $M = 0$, $K \rightarrow \infty$. Los puntos de la línea $M = 0$ corresponden a puntos singulares de la superficie característica.

Analicemos en detalle, qué singularidades de la superficie característica corresponden a las líneas $M = 0$ del plano ξ, η . Con este objeto es conveniente distinguir tres casos, que son, $0 < \gamma_1 < 1$, $\gamma_1 = 1$ y $1 < \gamma_1$.

Las figuras 1, 2 y 3 muestran las líneas $M = 0$ y las regiones permitidas y prohibidas en estos tres casos.

Con objeto de describir a las singularidades de la superficie característica es conveniente introducir los siguientes conceptos:

⁷ Edward KASNER.—*Differential Geometric Aspects of Dynamics*. Págs. 34-37 y nota en la p. 37. American Mathematical Society. New York, 1913.

⁸ Luigi BIANCHI, *loc. cit.* (6), p. 124.

1. Un punto m es un punto singular de una superficie, del tipo de la singularidad en el vértice de un cono; la conectividad de la superficie en un punto m es la misma que la conectividad en el vértice de un cono de un número finito de hojas, en el cual, la primera y la última, están unidas como las hojas de una superficie de Riemann, que tuviera al vértice del cono como punto de ramificación.

2. Un punto n es un punto singular en una superficie, del tipo de la singularidad en el vértice de un cono; la conectividad de la superficie en un punto n es la misma que la conectividad de una superficie de Riemann con un número infinito de hojas de forma cónica con el vértice del cono como punto de ramificación.

Podemos describir ahora a las superficies características correspondientes a los tres casos esencialmente diferentes que tenemos que considerar.

Primer caso: $0 < \gamma_1 < 1$.

La superficie característica consiste de una sola superficie, con un punto n como punto singular.

Segundo caso: $1 < \gamma_1$.

La superficie característica consiste de dos hojas separadas. Una hoja tiene un punto n como punto singular y un área infinita. Es la imagen de la región permitida marcada con A_1 en la figura 2.

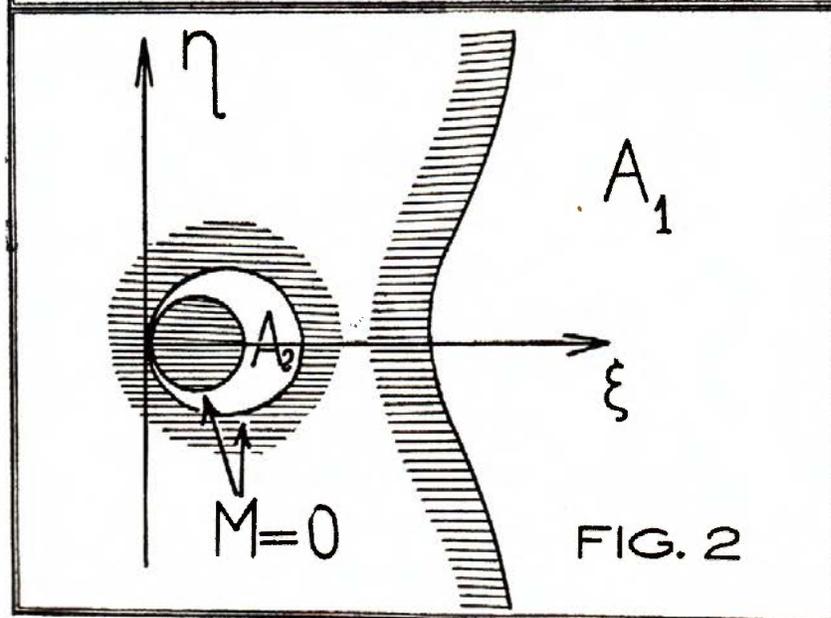
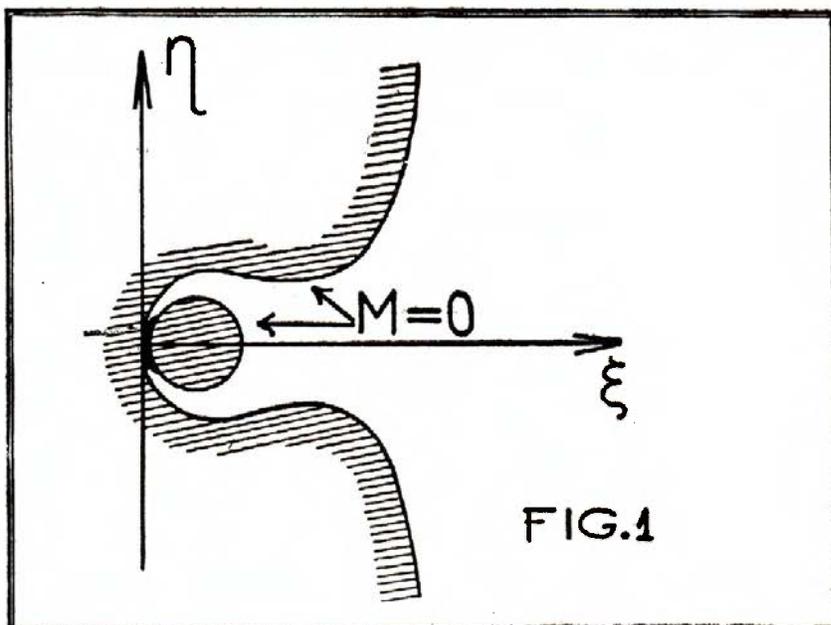
La otra hoja es una superficie cerrada de curvatura Gaussiana positiva; tiene un área finita y un punto m como singularidad; esta hoja es la imagen conforme de la región marcada con A_2 en la figura 2.

Tercer caso: $1 = \gamma_1$.

La superficie característica consiste de dos hojas topológicamente equivalentes a las descritas para $\gamma_1 = 1$, pero osculándose en sus puntos singulares.

En los casos segundo y tercero, la parte de la superficie característica correspondiente a la región interior permitida del plano meridiano, es una superficie cerrada de curvatura Gaussiana positiva. Poincaré⁹ demostró

9 Henri POINCARÉ.—*American Mathematical Society Transactions*, 6, 237-274, 1905.



que en una superficie de este tipo existen por lo menos tres geodésicas cerradas. Estas tres curvas corresponden a tres órbitas periódicas del plano meridiano.

Teorema II.—En la región permitida interior para $\gamma_1 \geq 1$, existen por lo menos tres órbitas periódicas.

Desde hace mucho tiempo se conocen dos órbitas periódicas en esta región, la órbita ecuatorial y la órbita periódica interior principal. Carl Störmer encontró para valores especiales de γ_1 , otra órbita periódica que empieza y termina en la línea interior $M = 0$. Esta parece ser la tercera órbita periódica que predice el teorema de Poincaré.

La parte interior de la región permitida del plano ξ, η puede dividirse en subregiones, caracterizadas por el tipo de extremo que tengan ξ y η en cada subregión.

Los dos lugares geométricos:

$$(21) \quad \frac{d^2\xi}{d\eta^2} = \frac{d\xi}{d\eta} = 0.$$

$$(22) \quad \frac{d^2\eta}{d\xi^2} = \frac{d\eta}{d\xi} = 0$$

forman las fronteras de estas subregiones. Es conveniente escribir las ecuaciones de estos dos lugares geométricos en coordenadas polares. El primer lugar tiene dos ramas. La ecuación de la primera rama es:

$$(23) \quad r = \cos^2\lambda.$$

Esta primera rama es el Talweg. La ecuación de la segunda rama es:

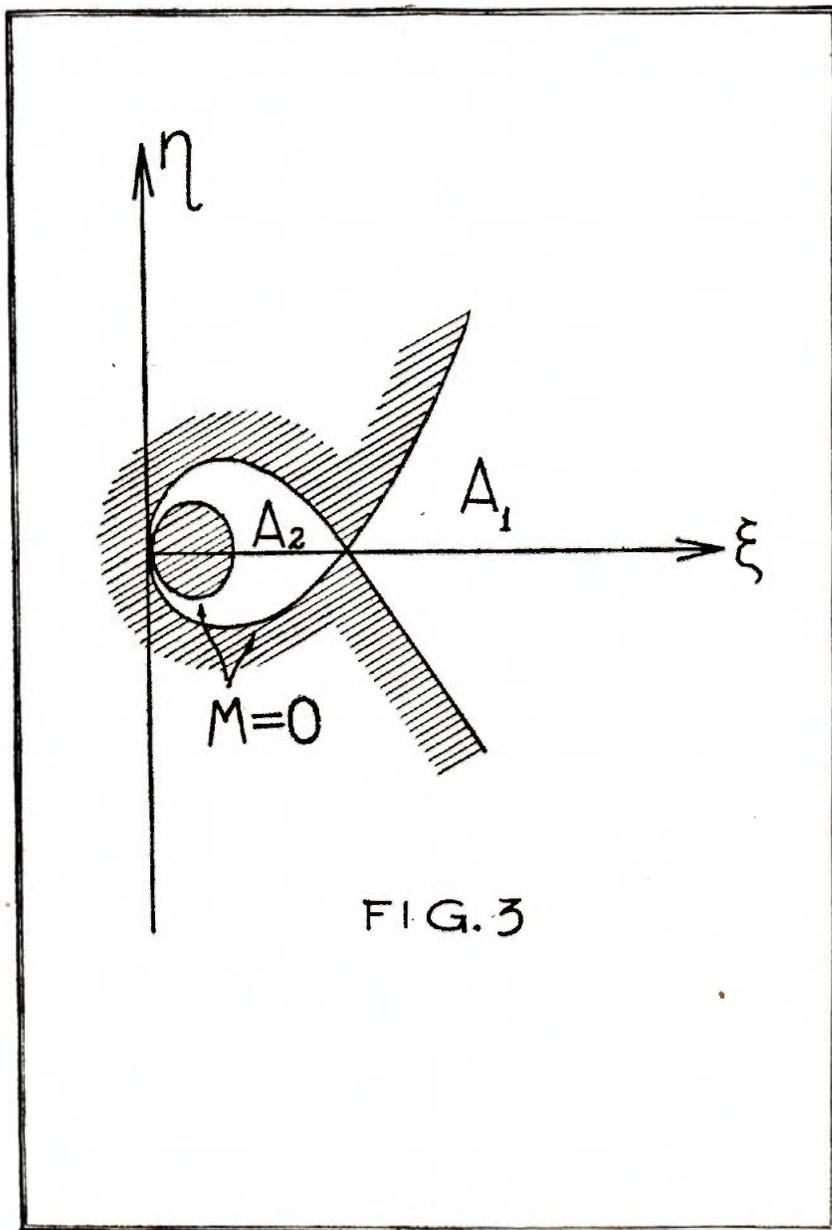
$$(24) \quad r = -\cos^2\lambda + 3\cos^4\lambda.$$

El segundo lugar geométrico tiene también dos ramas. La primera es:

$$(25) \quad \lambda = 0, \text{ que es el ecuador.}$$

y la segunda es:

$$(26) \quad r = \cos^2\lambda, \text{ que es el Talweg.}$$



La figura 4 muestra las 8 subregiones en que queda dividido el plano ξ, η por los lugares geométricos (23), (24), (25) y (26). Los lugares mismos son completamente independientes de γ_1 ; su posición relativa con respecto a las líneas $M = 0$, sí depende de γ_1 . En la figura 4 utilizamos el signo $\bar{\eta}$ para denotar un máximo en η , y el signo η para denotar un mínimo en η . Al signo $\bar{\xi}$ lo utilizamos para denotar un máximo en ξ , y al signo ξ para denotar un mínimo en ξ .

Además de los extremos normales considerados más arriba existen dos tipos de extremos degenerados, que tienen que analizarse separadamente. Los puntos de autoretroceso y los puntos al infinito con asíntotas paralelas a los ejes.

Un estudio cuidadoso muestra que las órbitas que tienen un punto común con la línea $M = 0$ pueden considerarse como trayectorias en que se confundieron la rama ascendente y la descendente. El punto común con $M = 0$ (punto de autoretroceso), es al mismo tiempo un extremo en ξ , y un extremo en η .

No existen órbitas con puntos al infinito y asíntotas paralelas al eje de las η . Las órbitas con un punto al infinito y asíntotas paralelas al eje de las ξ se estudian con ayuda de la transformación proyectiva:

$$(27) \quad \begin{cases} x = \frac{1}{\xi} \\ y = \frac{\eta}{\xi} \end{cases}$$

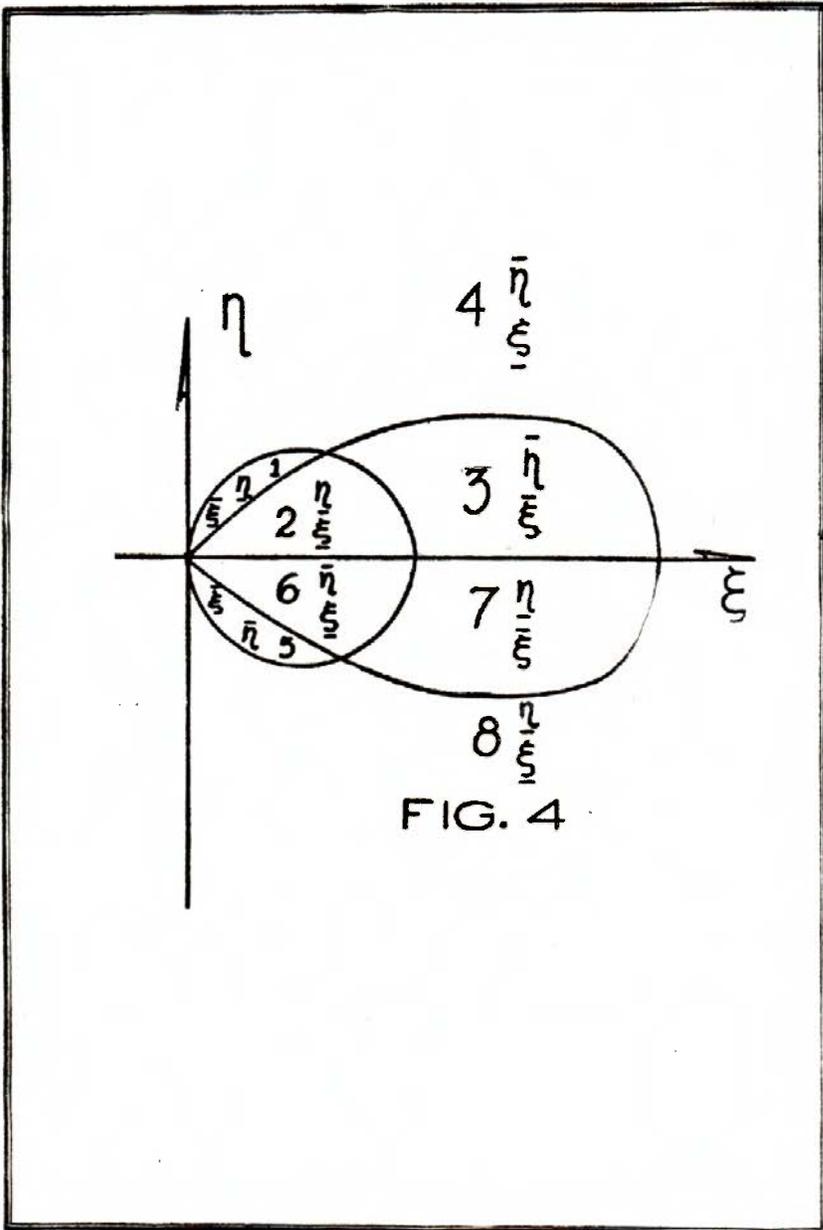
Si la órbita se acerca a su asíntota con valores crecientes de η , diremos que η tiene un máximo en el infinito; y si se acerca a su asíntota con valores decrecientes de η , diremos que η tiene un mínimo en el infinito.

Los extremos degenerados son perfectamente compatibles con la figura 4.

Inspeccionando cuidadosamente la figura 4 se puede demostrar fácilmente un teorema establecido por O. Godart. (No ha sido publicado.)

Teorema III.—Todas las órbitas cortan al lugar geométrico formado por el ecuador y el Talweg combinados.

Este lugar geométrico separa las subregiones de máximos de η de las subregiones de mínimos de η .



No se puede obtener un teorema semejante considerando el lugar geométrico que separa a las subregiones de máximos de ξ de las subregiones de mínimo de ξ , debido a la posible existencia de órbitas con un mínimo de ξ en la región, 4, 8 y con dos asíntotas. (Estas órbitas realmente existen; son órbitas que pasan muy lejos del dipolo; las llamamos "hiperbólicas").¹⁰

Para cada terna $\xi, \eta, \frac{d\eta}{d\xi}$; ó $\xi, \eta, \frac{d\xi}{d\eta}$; $\frac{d^2\eta}{d\xi^2}$ y $\frac{d^2\xi}{d\eta^2}$

están dadas por las ecuaciones diferenciales (16) y (17). Por medio de la derivación sucesiva se pueden obtener las derivadas de orden superior de η con respecto a ξ , y de ξ con respecto a η .

Para cada punto $P(\xi, \eta)$ de la región permitida, y para cada dirección definida por $\frac{d\eta}{d\xi}$ ó por $\frac{d\xi}{d\eta}$, se pueden calcular las dos sucesiones de derivadas:

$$\begin{array}{ccc} \frac{d^2\eta}{d\xi^2}, & \frac{d^3\eta}{d\xi^3}, & \frac{d^4\eta}{d\xi^4}, \dots; \text{ y} \\ \frac{d^2\xi}{d\eta^2}, & \frac{d^3\xi}{d\eta^3}, & \frac{d^4\xi}{d\eta^4}, \dots \end{array}$$

El orden de la primera derivada no nula en cualquiera de las dos sucesiones, determina el carácter del contacto entre la órbita y su tangente

en el punto P , en la dirección dada por $\frac{d\eta}{d\xi}$ o por $\frac{d\xi}{d\eta}$.

Si el orden de la primera derivada no nula es 2, el contacto es ordinario; si este orden es par y mayor que 2, el contacto es más íntimo, y la órbita tiene un punto chato en P .

El sentido de la concavidad en los puntos ordinarios y en los puntos chatos está dado por el signo de la primera derivada no nula. Según

10 Carlos GRAEF.—*An Analysis of Periodic Orbits of Particles of Primary Cosmic Radiation*. Pág. 17. Tesis doctoral. Instituto Técnico de Massachusetts, 1940.

el sentido de la concavidad clasificamos a estos puntos en "puntos levantados" y "puntos deprimidos".

Llamamos "puntos deprimidos" a los puntos chatos cuya concavidad apunta hacia las η positivas, y "puntos levantados" a los puntos chatos cuya concavidad apunta hacia las η negativas. Los puntos chatos con tangentes paralelas al eje de las η , no pertenecen a ninguna de las dos clases, pero esto no causa ninguna dificultad en este estudio. Si el orden de la primera derivada no nula es impar, la órbita tiene una inflexión en P. El tipo de la inflexión lo determina el signo de la primera derivada no nula. Distinguimos dos tipos de inflexiones. Las "inflexiones S" son aquellas que semejan la inflexión de la letra "S", y las "inflexiones 2" son aquellas que semejan la inflexión de la cifra "2".

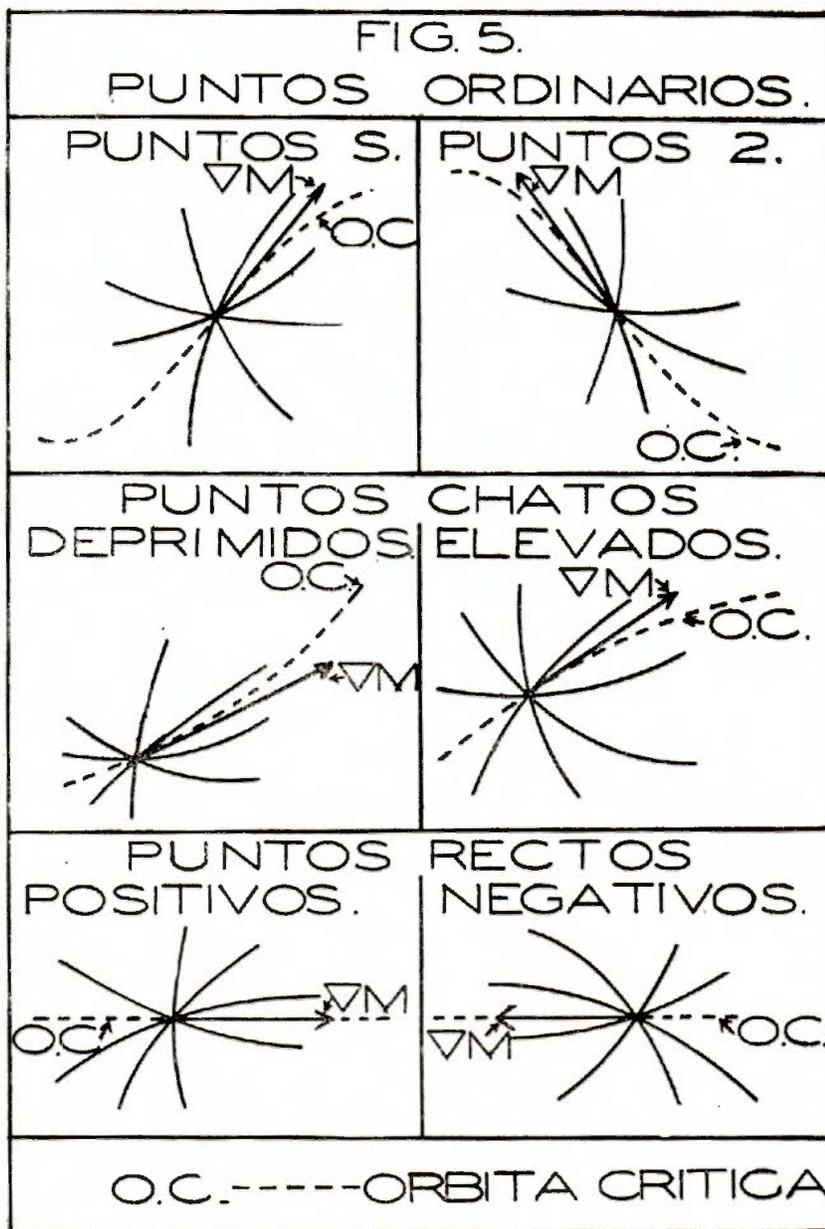
Analicemos el comportamiento de las órbitas que emergen de cada punto de la región permitida del plano ξ, η .

Para llevar a cabo este análisis es conveniente dividir a los puntos en dos clases, una clase de los puntos ordinarios y otra de los puntos extraordinarios.

Llamamos puntos ordinarios en el *interior* de la región permitida, a los puntos para los cuales ∇M está definido, y llamamos extraordinarios a todos los otros puntos. Los puntos extraordinarios son los puntos de las líneas $M = 0$, los puntos del Talweg, el punto (2,0) del ecuador, y los puntos al infinito.

En cada punto ordinario hay una dirección crítica, la dirección de ∇M . Con excepción de la órbita en esta dirección particular, todas las otras órbitas tienen su concavidad apuntando en la dirección de ∇M . La órbita crítica, o sea la órbita en la dirección crítica, en un punto ordinario, tiene una inflexión o un punto chato. La inflexión puede ser una "inflexión S" o una "inflexión 2". En el caso del punto chato, la órbita puede ser una línea recta, o puede tener un punto elevado, o un punto deprimido. Clasificamos por lo tanto a los puntos ordinarios en "puntos S", "puntos 2", "puntos rectos", "puntos elevados" y "puntos deprimidos", según el comportamiento de la órbita crítica. Los "puntos rectos" solamente se encuentran en el ecuador y se dividen en dos clases, una clase positiva, en la que ∇M apunta hacia las ξ positivas, y una clase negativa, en la que ∇M apunta hacia las ξ negativas. Las configuraciones de las órbitas en las seis clases de puntos se ven en la figura 5.

Los puntos extraordinarios se clasifican por su localización.



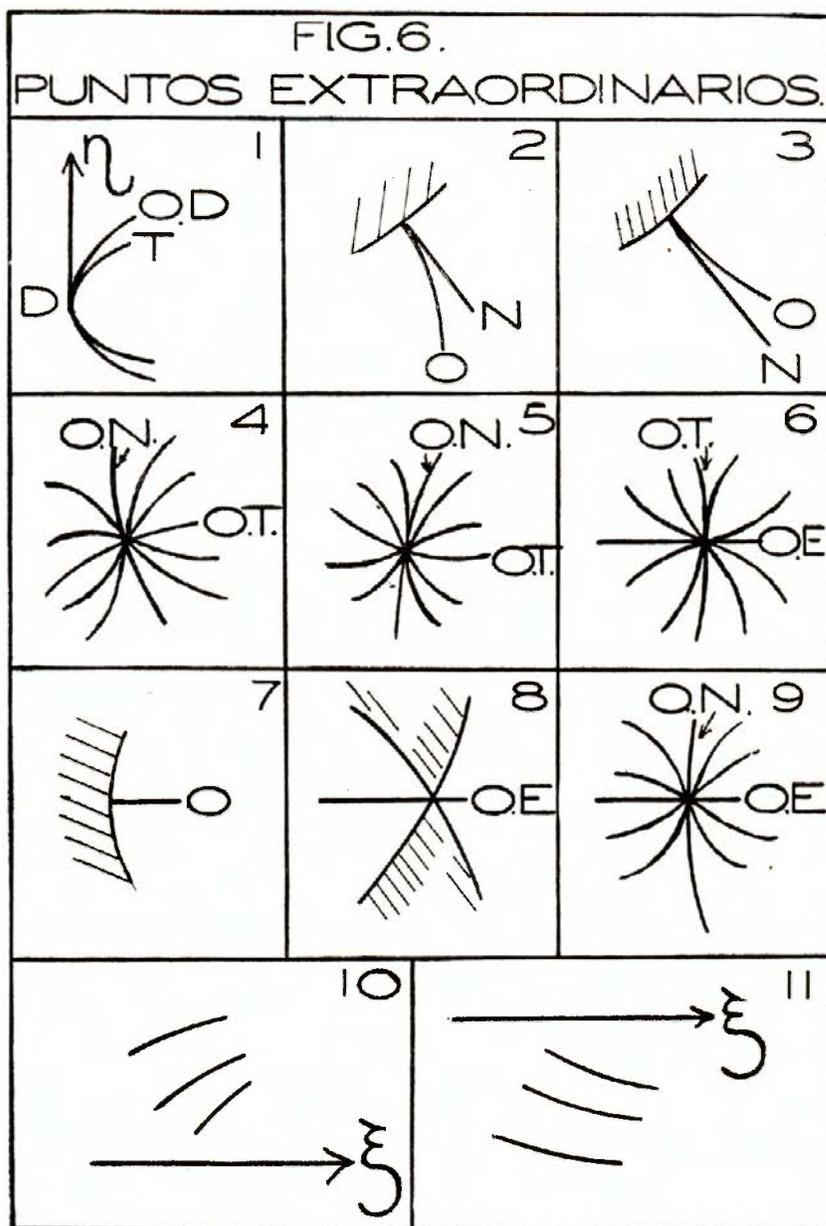


FIGURA 6. SIGNOS CONVENCIONALES Y NOTAS

1. Dipolo. Punto de la línea $M = 0$.
 D..... Dipolo.
 O.D..... Orbita del dipolo.
 T..... Talweg.
2. Col derecho. Punto de la línea $M = 0$.
 N..... Normal.
 O..... Orbita que retrocede sobre sí misma.
3. Col izquierdo. Punto de la línea $M = 0$.
 N..... Normal.
 O..... Orbita que retrocede sobre sí misma.
4. Punto rehilete. Punto del Talweg. (η positiva.)
 O.N..... Orbita normal.
 O.T..... Orbita tangencial.
5. Punto rehilete. Punto del Talweg. (η negativa.)
 O.N..... Orbita normal.
 O.T..... Orbita tangencial.
6. Punto (1,0). Punto del Talweg.
 O.E..... Orbita ecuatorial.
 O.T..... Orbita tangencial.
7. Punto del ecuador. Col recto.
 O..... Orbita.
8. Punto (2,0) para $\gamma_1 = 1$. Punto del ecuador.
 O.E..... Orbita ecuatorial.
9. Punto (2,0) para $\gamma_1 \neq 1$. Punto del ecuador.
 O.N..... Orbita Normal.
 O.E..... Orbita ecuatorial.
10. Punto al infinito de η positiva.
11. Punto al infinito de η negativa.

Consideremos primero los puntos en las líneas $M = 0$. Empecemos con el dipolo. Para cada valor de γ_1 hay dos órbitas, simétricas con respecto al ecuador, que emergen del dipolo,¹¹ estas órbitas son las "órbitas del dipolo". Ninguna otra órbita pasa por el dipolo. Las "órbitas del dipolo" son tangentes al Talweg en el dipolo; el contacto es del quinto orden.¹² (Véase Fig. 6.)

Para analizar los otros puntos de las líneas $M = 0$, es conveniente aplicar el criterio determinante de Poincaré.¹³ De acuerdo con este criterio los puntos son del tipo "col." (cuello). A un col sólo llega una trayectoria aislada; las otras trayectorias permanecen a distancias no nulas del col. Estas trayectorias aisladas son trayectorias que retroceden sobre sí mismas en el col; son, además, perpendiculares a las líneas $M = 0$.

La concavidad de las órbitas que retroceden sobre sí mismas puede estar dirigida hacia la derecha o hacia la izquierda de la normal a $M = 0$ en el col, suponiendo al observador en $M = 0$, viendo hacia la región permitida. En el primer caso, el col se designa con el nombre de "col derecho", y en el segundo caso con el nombre de "col izquierdo". (Véase la Fig. 6.) Hay además puntos especiales en la línea $M = 0$, y son aquellos en que ésta corta al ecuador. La órbita que retrocede sobre sí misma es en este caso una recta; a estos puntos se les llama "coles rectos".

Nos falta tratar todavía a un punto muy especial en $M = 0$, el punto $(2, 0)$ para $\gamma_1 = 1$. A este punto llegan dos órbitas ecuatoriales, ninguna otra órbita pasa por él. (Véase la Fig. 6.)

Las consideraciones hechas hasta aquí cubren todos los puntos posibles en las líneas $M = 0$.

Consideremos ahora los puntos del Talweg.

A pesar de que el dipolo pertenece al Talweg, ya ha sido considerado entre los puntos de las líneas $M = 0$.

Los otros puntos del Talweg son los que llamamos "puntos rehilete". (Véase la Fig. 6.) En un punto rehilete todas las trayectorias, excepto dos, tienen puntos de inflexión. Estas dos trayectorias excepcionales son la trayectoria tangencial al Talweg, y la trayectoria normal al mismo. La trayectoria tangencial tiene un punto chato en el punto rehilete y su con-

11 Carl STÖRMER.—*Loc. cit.* (3).

12 Carlos GRAEF.—*Loc. cit.* (10), p. 31.

13 Henri POINCARÉ.—*Oeuvres de Henri Poincaré*. Tomo I, pp. 167-181. París, 1928.

cavidad está dirigida hacia el Talweg; la trayectoria está completamente afuera del área encerrada por el Talweg en la inmediata vecindad del punto rehilete. La trayectoria normal también tiene un punto chato en el punto rehilete, su *convexidad* apunta hacia el dipolo, excepto en el caso de la trayectoria normal en el punto $(1, 0)$, que es rectilínea; se trata en este caso de la órbita ecuatorial.

Las órbitas que tienen una inflexión en el punto rehilete, tienen su concavidad dirigida hacia el Talweg, en la inmediata vecindad del punto de intersección.

Entre los puntos extraordinarios que tenemos que considerar está el punto $(2, 0)$, para todas las γ_1 diferentes de 1. Por este punto pasa la órbita rectilínea ecuatorial, y una trayectoria con un punto chato, la trayectoria normal al ecuador. Esta última tiene su concavidad dirigida hacia las ξ positivas. Todas las demás trayectorias apoyadas en $(2, 0)$ tienen allí una inflexión; su concavidad está dirigida hacia el ecuador en la inmediata vecindad de la intersección. (Fig. 6.)

La última clase de puntos extraordinarios que tenemos que considerar son los puntos al infinito.

Para estudiar estos puntos, efectuamos la transformación proyectiva:

$$x = \frac{1}{\xi}$$

$$y = \frac{\eta}{x}$$

La concavidad de los puntos al infinito está dirigida hacia el eje de las ξ . No existen órbitas con asíntotas paralelas al eje de las η .

La figura 6 muestra todas las clases de puntos extraordinarios.

La figura 7 muestra la distribución de los puntos ordinarios y extraordinarios en la región permitida del plano meridiano.

Esta distribución depende esencialmente del lugar geométrico:

$$(28) \quad \frac{d^2\eta}{d\xi^2} = \frac{d^3\eta}{d\xi^3} = 0$$

que consiste en tres ramas, cuyas ecuaciones en coordenadas polares son:

$$(29) \quad \lambda = 0, \text{ que es el ecuador,}$$

$$(30) \quad r = \cos^2\lambda, \text{ que es el Talweg, y}$$

$$(31) \quad r = \cos^2\lambda \frac{4 - \cos^2\lambda + \sqrt{4 + 21 \cos^4\lambda}}{2(5\cos^2\lambda - 3)}$$

que es la "tercera rama".

Estas curvas dividen al plano ξ, η en las 6 regiones: I, II, III, IV, V y VI.

Analicemos ahora las órbitas que emergen de un punto del Talweg.

Consideramos exclusivamente la porción del Talweg que corresponde a η positivas; esto está perfectamente justificado, puesto que el problema es simétrico con respecto al ecuador.

Sea P un punto del Talweg de ordenada positiva, y elijase para dirección positiva en P, aquella hacia la que apunta el vector tangente al Talweg en P, cuya componente en el eje de las ξ es positiva.

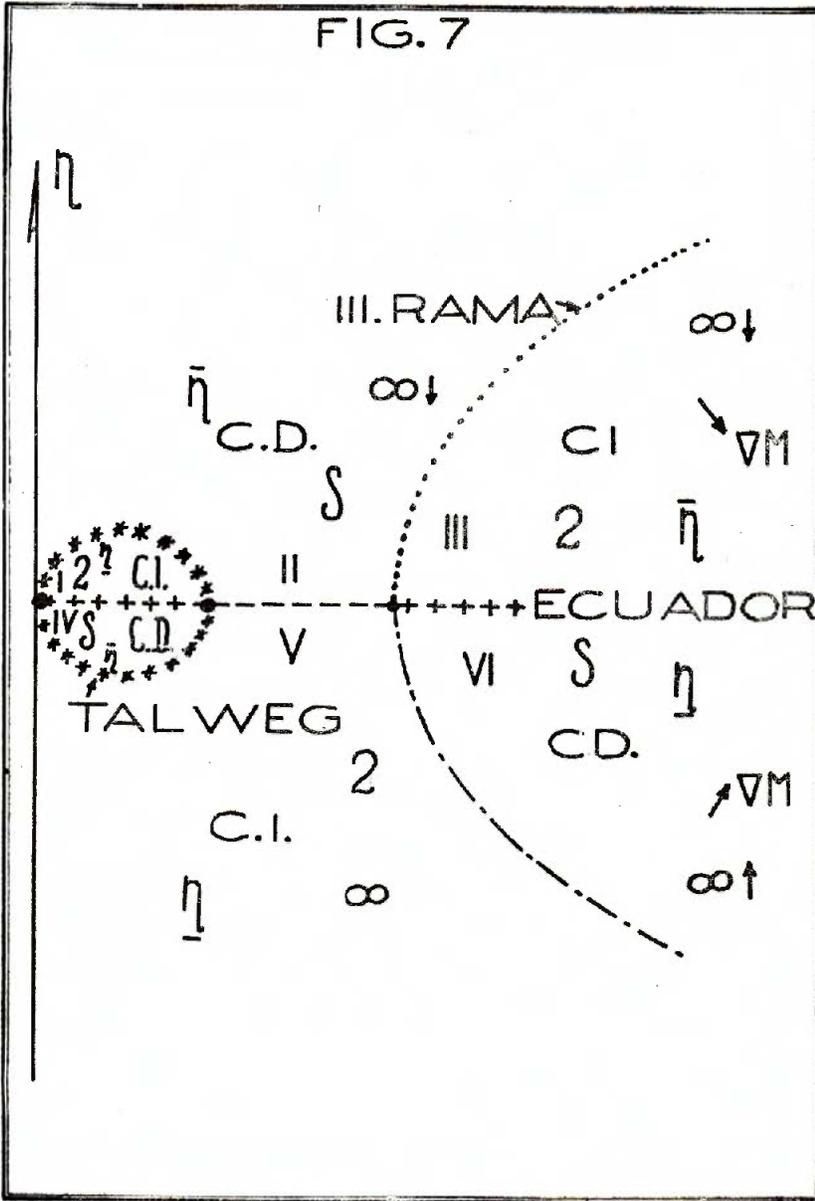
De cada órbita que emerge de P fijémonos en la parte que apunta en la dirección positiva; únicamente en el caso de la órbita normal al Talweg en P, fijémonos en ambas partes.

Las órbitas que emergen de P hacia la región II tienen su concavidad hacia la derecha. (Véanse las figuras 7 y 8.) Estas órbitas no pueden tener un punto de inflexión en esta región, porque solamente hay inflexiones S en la misma.

Examinemos las posibilidades de estas órbitas.

Una órbita con la concavidad hacia la derecha puede volver a cortar el Talweg en un punto más alejado del dipolo. (Véase Fig. 8, arco 1.) En el punto de intersección el ángulo formado por la dirección positiva de la órbita y la dirección positiva del Talweg tiene que ser menor que 90° . A este ángulo lo llamamos, ángulo formado por la trayectoria con el Talweg.

Los arcos 2 y 3 de la figura 8 ilustran los casos de trayectorias que cortan al ecuador entre los puntos (1,0) y (2, 0); ambos arcos son compatibles con la figura 7.



Los signos convencionales usados en la figura 7 son los siguientes:

- a) S puntos S.
- b) 2 puntos 2.
- c) —.—.— puntos chatos elevados.
- d) puntos chatos deprimidos.
- e) +++++ puntos rectos positivos y coles rectos.
- f) ——— puntos rectos negativos y coles rectos.
- g) D dipolo.
- h) CD col derecho.
- i) CI col izquierdo.
- j) * * * puntos rebilete.
- k) (1,0) punto (1,0).
- l) (2,0) punto (2,0).
- m) $\infty \downarrow$ punto al infinito; la concavidad dirigida en el sentido de las η negativas.
- n) $\infty \uparrow$ punto al infinito; la concavidad dirigida en el sentido de las η positivas.
- o) $\overline{\eta}$ (testada) máximos en η .
- p) η (subrayada) mínimos en η .

NOTAS A LA FIGURA 7

A) Las líneas $M = 0$ no aparecen en la figura. Para cada valor particular de γ_1 tiene uno que imaginarse trazadas las líneas $M = 0$ en la figura 7. Los símbolos solamente tienen sentido en las regiones permitidas.

B) Los símbolos "CD" y "CI" deben interpretarse como sigue: imaginense las líneas $M = 0$ trazadas en la figura 7, las porciones de esas líneas contenidas en las regiones CD están formadas por coles derechos, y las porciones contenidas en las regiones CI están formadas por coles izquierdos.

C) Las intersecciones diferentes de D de las líneas $M = 0$ con el ecuador, son coles rectos.

D) Las intersecciones de las líneas $M = 0$ con la tercera rama (véase la ecuación (31)), deben considerarse como pertenecientes a la región hacia la que apunta la convexidad de la tercera rama.

E) Para todos los puntos de las regiones III y IV, ∇M apunta hacia el eje de las ξ , como está indicado en la figura.

F) Los símbolos escritos dentro de una región no valen en sus fronteras, excepto cuando lo especifica así expresamente alguna de las notas anteriores.

El arco 4 de la figura 8 ilustra el caso de una trayectoria que corta al ecuador en el punto $(2, 0)$; esta órbita tiene allí un punto de inflexión. El arco 4 es compatible con las condiciones expresadas en la figura 7.

Supongamos que una órbita que originalmente es ascendente penetra en la región III después de tener un máximo, o que una órbita originalmente descendente penetra directamente en esta región. El arco 5 de la figura 8 ilustra estos casos.

La órbita mencionada es descendente al penetrar en la región III. Una órbita de este tipo tiene que seguir en la dirección de las ξ positivas; no puede retroceder después de tener un máximo en ξ , porque este tipo de extremos está prohibido en la región III. (Véase Fig. 4.)

Una órbita descendente en la región III con su concavidad hacia la derecha, no puede cortar al ecuador antes de tener una inflexión, porque los puntos del ecuador son puntos rectos positivos.

Estas órbitas descendentes de la región III no pueden irse al infinito y tener allá una asíntota horizontal, porque la concavidad de la órbita al infinito está dirigida hacia abajo.

Una órbita descendente en III tiene que tener forzosamente una inflexión 2, y tiene que cortar al ecuador.

El arco (6) de la figura 8 ilustra el caso de una órbita ascendente que penetra en la región III y alcanza un máximo en η . Después de este máximo la órbita se porta como el arco 5.

Los arcos (7) y (8) de la figura 8 ilustran los casos de órbitas que se van al infinito conservando su concavidad hacia la derecha.

Todos estos arcos son compatibles con las condiciones expresadas por la figura 7. Los 8 casos representan todas las posibilidades para las órbitas que emergen del Talweg hacia la región II, para valores positivos de γ_1 por supuesto.

Examinemos ahora las órbitas que emergen de P hacia la región I. Estas órbitas no pueden tener una inflexión en esta región, porque empiezan con su concavidad hacia la izquierda, y solamente se permiten inflexiones 2 en I.

En este caso solamente hay tres posibilidades:

El arco 9 de la figura 8 ilustra la primera posibilidad. La órbita corta al Talweg otra vez, bajo un ángulo de menos de 90° , sufriendo en el punto de intersección una inflexión.

La intersección con el Talweg puede ocurrir en el punto $(1, 0)$; el arco 10 ilustra este caso. (Fig. 8.)

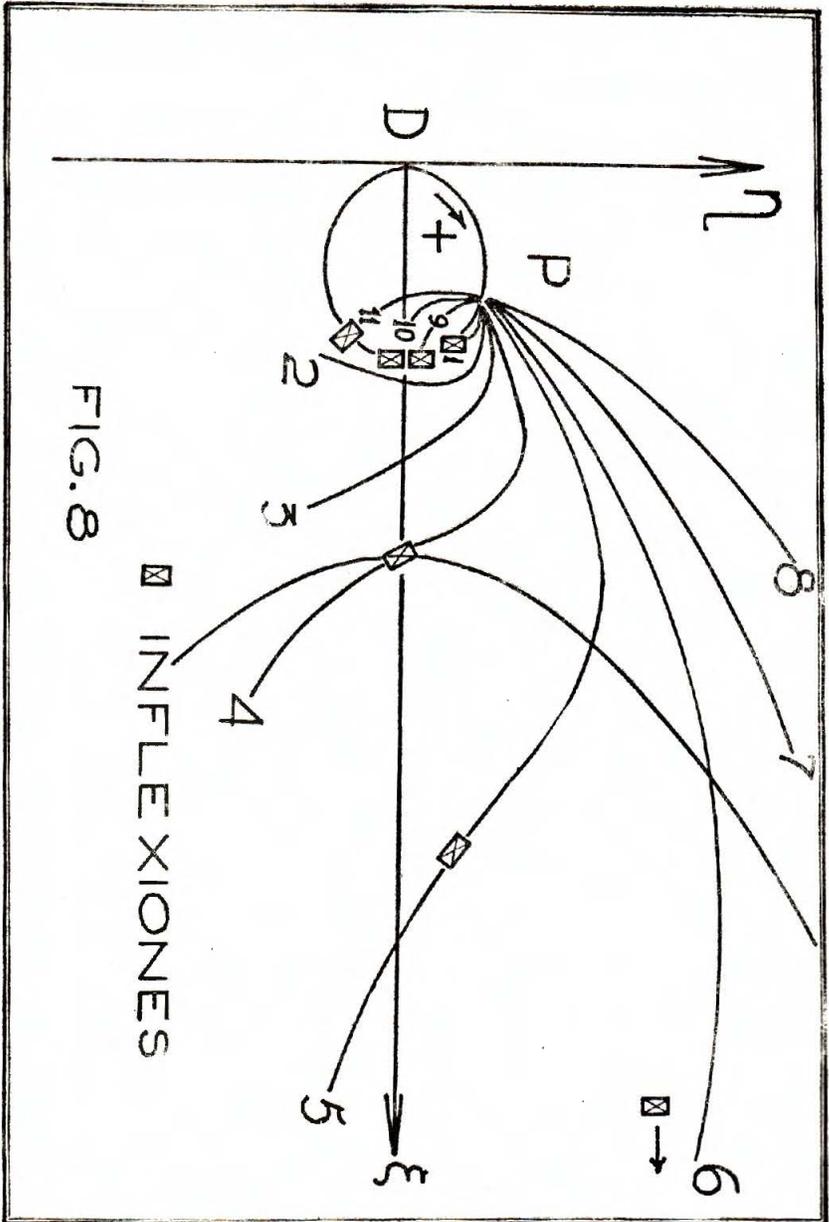


FIG. 8

☐ → INFLEXIONES

El arco 11 de la figura 8, muestra la última posibilidad para las órbitas que cortan el Talweg. El arco 11 corta al ecuador directamente. La concavidad de la órbita permite esta intersección.

Analicemos ahora el problema de ver si existen órbitas que oscilen entre las líneas $M = 0$ exterior e interior (teniendo coles en $M = 0$) y que satisfagan las siguientes condiciones:

- a) Ser simples, o sea no tener puntos dobles.
- b) Cortar al Talweg una sola vez.
- c) No cortar al ecuador.

A órbitas de este tipo les llamaremos: "órbitas periódicas simples en el valle".

Empecemos en la línea $M = 0$ interior, en la región I (Fig. 7). El punto de partida es un col izquierdo, y la órbita empieza ascendiendo.

Como tiene su concavidad hacia la izquierda, la órbita no puede tener inflexiones en la región I, en donde sólo se permiten inflexiones 2.

La órbita es ascendente, pero no puede alcanzar un máximo de η en la región I, porque solamente se permiten mínimos de η en esta región; por eso tiene que cortar la órbita al Talweg. Llamemos P al punto de intersección. En P tiene la órbita una inflexión S, de manera que penetra en la región II con su concavidad hacia la derecha.

Todas las formas posibles que la órbita pueda tener después de cortar al Talweg en P, han sido analizadas previamente; se muestran en la figura 8.

Ninguno de los 8 arcos posibles puede producir una órbita que satisfaga la condición de ser simple y periódica en el valle.

Teorema IV.—No existen en el valle órbitas periódicas que oscilen entre las líneas $M = 0$ interior y exterior, y que no corten al ecuador, pero que corten al Talweg una vez solamente. Con lo expuesto más arriba se puede demostrar que todas las órbitas que pasan por un punto P del Talweg tienen una rama que corta al ecuador, o que pasa por el punto al infinito.

Fijémonos en un punto P del Talweg, de ordenada positiva y consideremos la rama de cada órbita apoyada en P que apunta en la dirección positiva. Solamente en la órbita normal al Talweg, consideremos ambas ramas.

La figura 8 muestra todos los tipos de arcos posibles que una órbita de ese tipo puede adoptar.

Los arcos 7 y 8 pasan por el punto al infinito. Los arcos 10, 11, 2, 3, 4, 5 y 6, cortan al ecuador. Tenemos que analizar con cuidado los arcos 1 y 9.

Llamemos P_1 a la intersección del arco 1 con el Talweg. P_1 está más cerca del ecuador a lo largo del Talweg, que P . El ángulo formado por la trayectoria y el Talweg en P_1 , es menor que 90° . En P_1 tiene la trayectoria una inflexión 2, y emerge del otro lado como arco del tipo 9, 10 u 11. Los arcos de los tipos 10 y 11 cortan al ecuador; el arco del tipo 9 corta otra vez al Talweg en un punto P_2 , más cerca del ecuador a lo largo del Talweg, que P_1 . En P_2 la órbita tiene una inflexión S, y emerge del otro lado como arco del tipo 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 u 8, porque en la intersección el ángulo formado por la trayectoria con el Talweg es menor que 90° . De todos estos arcos sólo el de tipo I es crítico, pues todos los otros, o cortan al ecuador o pasan por el punto al infinito. El arco de tipo I que emerge de P_2 se porta exactamente como el arco del mismo tipo que emerge de P .

De manera que una órbita del tipo I que emerge de P , o corta al ecuador después de una o varias intersecciones con el Talweg, o pasa por el punto al infinito, o corta al Talweg en una sucesión de puntos:

$$P_1, P_2, P_3, \dots P_n, \dots$$

que están más y más cerca del ecuador a lo largo del Talweg a medida que crece en n .

Consideremos ahora un arco del tipo 9 que emerge de P , y que sea Q_1 la intersección de este arco con el Talweg. En Q_1 , la órbita hace un ángulo con el Talweg de menos de 90° , y la órbita, después de sufrir una inflexión S en Q_1 , emerge del otro lado como un arco del tipo 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 u 8, esto significa que hay tres posibilidades para la órbita, o corta al ecuador, o pasa por el punto al infinito, o corta al Talweg otra vez en un punto Q_2 , etc.

De manera que un arco del tipo 9 que emerge de P , o corta al ecuador después de una o varias intersecciones con el Talweg, o corta al Talweg en una sucesión de puntos:

$$Q_1, Q_2, Q_3, \dots Q_n, \dots$$

que están más y más cerca del ecuador a lo largo del Talweg, a medida que n crece.

Hay dos posibilidades para las sucesiones:

$$P_1, P_2, P_3, \dots ; Q_1, Q_2, Q_3, \dots ;$$

o estas sucesiones tienen su punto de acumulación A en un punto del Talweg antes de $(1, 0)$, o tienen su punto de acumulación A en $(1, 0)$. Examinaremos primero el caso en que el punto de acumulación A no es $(1, 0)$. Llamemos a_n al arco de órbita que une a P_n con P_{n+2} y b_n al arco de órbita que una a Q_n con Q_{n+2} . Ambos arcos están formados por dos partes separadas por un punto de inflexión, P_{n+1} y Q_{n+1} , respectivamente. Ambas partes tienen la concavidad dirigida hacia el Talweg en todos sus puntos. Cuando $n \rightarrow \infty$ P_n, P_{n+1} y P_{n+2} tienden a A y $a_n \rightarrow a$; Q_n, Q_{n+1} y Q_{n+2} tienden a A y b_n tiende a b . a y b son los límites de los arcos a_n y b_n .

La figura 9 muestra la primera órbita, la apoyada en P, P_1, P_2, P_3, \dots , el Talweg y el límite a de a_n .

Sea R un punto de la línea a que esté en $M = M_1 = \text{const.}$ La línea $M = M_1$ corta a los arcos a_n en una sucesión de puntos que tienen a R como límite. Sean estos puntos R_n, R_{n+1}, R_{n+2} , etc., entonces:

$$\text{Lim. } R_{n+k} = R$$

$$k \rightarrow \infty$$

(Véase Fig. 9.)

Sean:

$$\left(\frac{d\eta}{d\xi} \right)_m, \left(\frac{d^2\eta}{d\xi^2} \right)_m, \dots, \left(\frac{d^s\eta}{d\xi^s} \right)_m, \dots,$$

las derivadas sucesivas de η con respecto a ξ calculadas en el punto R_m , entonces:

$$\text{Lim. } \left(\frac{d^s\eta}{d\xi^s} \right)_m = \left(\frac{d^s\eta}{d\xi^s} \right)_R$$

en el que el segundo miembro expresa el valor de la derivada de orden S de η con respecto a ξ calculada en el punto R en el arco a .

De aquí se deduce que el arco a satisface la misma ecuación diferencial que la órbita apoyada en P, P_1, P_2, P_3, \dots , y que es, por lo tanto, otra órbita. La órbita apoyada en las P_n es asintótica al arco a . El arco a es una órbita periódica.

Como a tiene dos puntos de autorretroceso, que son U y V , y como tales puntos sólo ocurren en las líneas $M = 0$, se deduce de aquí que a es una órbita periódica en el valle, que oscila entre las líneas $M = 0$ interior y exterior.

Se ha demostrado previamente que no existen órbitas del tipo a . Se concluye, pues, que la sucesión

$$P, P_1, P_2, P_3, \dots$$

solamente puede tener su punto de acumulación en el ecuador.

Lo que se demostró para las P , se puede demostrar para las Q .

Teorema V.—Todas las órbitas apoyadas en un punto del Talweg tienen una rama que, o corta al ecuador, o se acerca asintóticamente al ecuador; en este último caso diremos de un modo convencional que corta al ecuador.

Si se efectúa una inversión por radios vectores recíprocos definida por las ecuaciones:

$$x = \frac{\xi}{r^2} \quad y = \frac{\eta}{r^2} \quad r^2 = \xi^2 + \eta^2$$

entonces el punto al infinito se transforma en el origen, el dipolo se transforma en el punto al infinito, y el ecuador se transforma en sí mismo. El teorema anterior se transforma en el siguiente:

Teorema VI.—Las transformadas por radios vectores recíprocos de las órbitas de partículas cargadas que se mueven en el campo de un dipolo, cortan todas al ecuador.

Nota.—Después de la transformación sólo dos imágenes de órbitas pasan por el punto al infinito, las imágenes de las órbitas del dipolo. Todas las demás imágenes de órbitas, permanecen a distancia finita del origen.

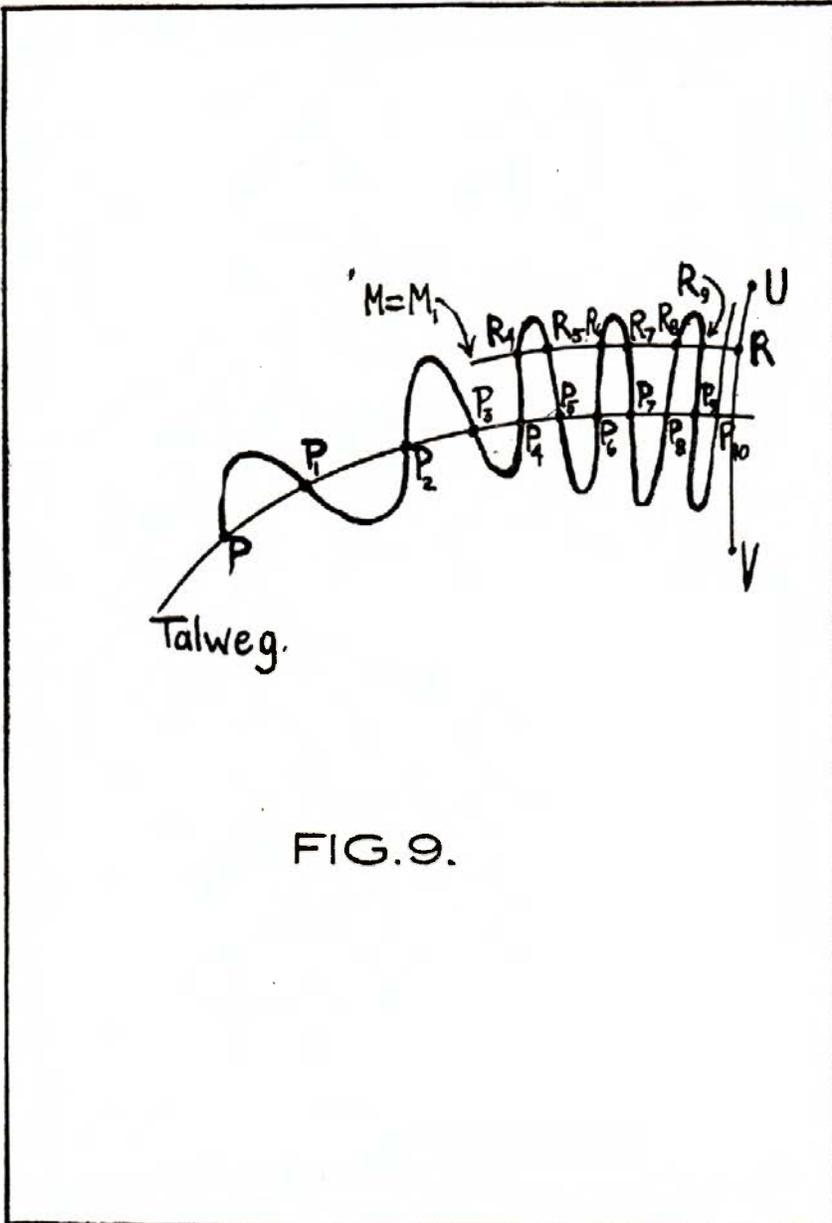


FIG.9.

Considerando las imágenes de las órbitas en la transformación por radios vectores recíprocos, como trayectorias de otro problema dinámico, se ha demostrado entonces que en el nuevo problema todas las trayectorias cortan al ecuador y que todas, con excepción de dos, permanecen a distancia finita del origen. A cada trayectoria del nuevo problema se le puede hacer corresponder otra de un tercer problema, en que las coordenadas son x , y y Θ siendo Θ la inclinación de la órbita en el punto (x, y) con respecto al eje de las x . En el espacio x, y, Θ el ecuador es una superficie de sección en el sentido de G. Birkhoff.

Analicemos las órbitas para el caso $\gamma_1 \geq 1$.

En este caso tenemos que considerar dos regiones permitidas, la región externa infinita, y la región interna finita.

Según el teorema de O. Godart (teorema III), todas las órbitas cortan el lugar geométrico formado por ecuador y Talweg combinados. En la región finita interna, fijémonos en las órbitas que cortan el Talweg. Según el teorema V todas ellas, o pasan por el punto al infinito, o cortan al ecuador. Como desde la región interna finita es inaccesible el punto al infinito, todas las órbitas que emergen del Talweg cortan, pues, al ecuador. De aquí se concluye que para $\gamma_1 \geq 1$ todas las órbitas de la región interna finita cortan al ecuador.

Como para las órbitas de la región externa infinita el Talweg es inaccesible, todas cortan al ecuador.

Teorema VII.—Para $\gamma_1 \geq 1$ todas las órbitas de las partículas cargadas cortan al ecuador magnético.

Analicemos las órbitas para $0 < \gamma_1 < 1$. Según el teorema V, todas las órbitas para $\gamma_1 > 0$ tienen una rama que, o se apoya en el punto al infinito, o corta al ecuador. Como ninguna órbita periódica pasa por el punto al infinito, se deduce inmediatamente el teorema siguiente:

Teorema VIII.—Para $0 < \gamma_1 < 1$ todas las órbitas periódicas cortan al ecuador.

Aplicando el mismo método geométrico de ataque utilizado para $\gamma_1 > 0$ a valores negativos de γ_1 y a $\gamma_1 = 0$, se obtienen los siguientes resultados:

Teorema IX.—Para $\gamma_1 \leq 0$ las órbitas de las partículas cargadas, o tienen un valor extremo en η , en cuyo caso sólo tienen uno, y no cortan al ecuador, o no tienen ningún valor extremo de η , en cuyo caso cortan al ecuador.

Teorema X.—Para $\gamma_1 \leq 0$, ninguna órbita de las que regresan sobre sí mismas, corta al ecuador.

Teorema XI.—Para $\gamma_1 = 0$, el eje del dipolo es accesible a las partículas.

El autor desea expresar su más profunda gratitud a su maestro, doctor Manuel S. Vallarta, por su constante estímulo y sus valiosas sugerencias. A la Universidad Nacional Autónoma de México, a la John Simon Guggenheim Memorial Foundation, y al Instituto Tecnológico de Massachusetts, les agradece sinceramente las becas que le permitieron ejecutar este estudio.

INSTITUTO DE MATEMÁTICAS, U. N. A.

RESEÑA DE LA PRIMERA ASAMBLEA DE LA SOCIEDAD
MATEMÁTICA MEXICANA, CORRESPONDIENTE
AL AÑO DE 1944

El viernes 3 de marzo, por la noche, en el Salón de Actos del Palacio de Minería, se efectuó en solemne ceremonia la Primera Asamblea anual de la Sociedad Matemática Mexicana con la asistencia de noventa socios y de distinguidos invitados de honor; la ceremonia se desarrolló con la siguiente orden del día:

I. Informe del Presidente de la Sociedad Matemática Mexicana, doctor Alfonso Nápoles Gándara.

II. Entrega de diploma de Presidente Honorario y Patrocinador de la primera asamblea regional reunida en la ciudad de Cuernavaca, al señor licenciado Jesús Castillo López, Gobernador Constitucional del Estado de Morelos.

III. Declaratoria de socios honorarios y entrega de los diplomas correspondientes a los señores doctores George D. Birkhoff y Harlow Shapley, de la Universidad de Harvard.

IV. Distribución de diplomas a los socios fundadores de la Sociedad Matemática Mexicana.

V. Presentación de la labor desarrollada en México por los doctores George D. Birkhoff y Harlow Shapley, por el Vicepresidente de la Sociedad, doctor Carlos Graef Fernández.

Son puntos sobresalientes del informe que rindió el Presidente, doctor Alfonso Nápoles Gándara, la realización de la Primera Asamblea Regional que se efectuó en la ciudad de Cuernavaca en noviembre de 1942 y la creación del Boletín de la Sociedad, del cual se han publicado ya dos números.

Respecto a la Asamblea de Cuernavaca, el doctor Nápoles llamó la atención sobre la importancia de los trabajos presentados en ella, tanto de investigación original como las conferencias sustentadas (un informe detallado de estas actividades puede encontrarse en la página 21, nota II, del número 2 de este Boletín).

En lo que se refiere a publicaciones dijo el señor Nápoles que la creación del Boletín de nuestra Sociedad satisfacía una justa aspiración de los profesores de matemáticas y de los investigadores y personas interesadas en el desarrollo de las ciencias exactas en México; expresó el señor Nápoles su confianza en que esta publicación redundaría en beneficio del progreso de las ciencias exactas puras y aplicadas en nuestro país, y comunicó también que tenía en proyecto la publicación de otra revista matemática con carácter de divulgación.

Después del informe rendido, el Presidente de la Sociedad expresó algunas palabras de agradecimiento en homenaje al señor licenciado Jesús Castillo López, Gobernador del Estado de Morelos, y a los doctores G. D. Birkhoff y H. Shapley, a quienes entregó en seguida, en nombre de la Sociedad Matemática Mexicana, los diplomas correspondientes, con las declaraciones respectivas.

El señor licenciado Jesús Castillo López y el doctor George D. Birkhoff recibieron personalmente su diploma; el doctor Shapley estuvo representado por el señor Cónsul General de los Estados Unidos en México. El doctor Birkhoff, en aplaudido discurso, que por separado se publica, agradeció efusivamente la distinción recibida; hizo patente su esperanza de que en el futuro, la intercomunicación y amistad de los hombres de ciencia de su país y los del nuestro serán perfectas.

A continuación se procedió a la distribución de los diplomas a los socios fundadores, quienes recibieron personalmente este diploma de manos del señor Sandoval Vallarta, representante personal del señor Secretario de Educación Pública.

Para finalizar la velada, el señor doctor Carlos Graef Fernández, Vicepresidente de la Sociedad, pronunció un discurso en que se refirió a la labor que en México han desarrollado a favor de la investigación matemática los señores Birkhoff y Shapley. El primero, como huésped del Instituto de Matemáticas de la Universidad Nacional desde hace tres meses, ha propuesto sugestivos e importantes problemas, en los que, gracias a su desinteresada ayuda, los investigadores mexicanos han obtenido ya resultados importantísimos, que pronto darán prestigio a México en el extran-

jero. Por su parte, la cooperación del doctor Shapley ha consistido en obtener la donación al citado Instituto de valiosísimas colecciones de libros y revistas matemáticas.

Asistieron a esta ceremonia representantes personales del señor Secretario de Educación Pública y del señor Rector de la Universidad Nacional; asistió personalmente el ciudadano Gobernador del Estado de Morelos, licenciado Jesús Castillo López, el señor Cónsul General de los Estados Unidos, Mr. L. Stafford, el Presidente de la Sociedad Mexicana de Geografía y Estadística, señor doctor Benavides, el Vicepresidente del Ateneo de Ciencias, arquitecto E. Zamudio, el señor Director del Instituto de Geología, ingeniero Teodoro Flores, el Secretario de la Sociedad de Estudios Astronómicos y Geofísicos, señor C. Martínez Becerril, así como representantes de la Comisión Impulsora y Coordinadora de la Investigación Científica y de la Academia Nacional de Ciencias "Antonio Alzate". Asistieron, además, noventa distinguidos profesores y profesionistas, socios de la Sociedad Matemática Mexicana, cuyos nombres no anotamos por no hacer una omisión de algunos de ellos.

DISCURSO DEL DOCTOR GEORGE D. BIRKHOFF
EN LA PRIMERA ASAMBLEA
ANUAL DE 1944

Señor Presidente de la Sociedad Matemática Mexicana,
Señores invitados de honor,
Señoras y señores:

Será inolvidable para mí esta Primera Asamblea de la Sociedad Matemática Mexicana, en la cual ustedes nos han conferido a mi colega el señor doctor Harlow Shapley, del Observatorio de Harvard, y a mí, el alto honor de nombrarnos los dos primeros miembros honorarios de esta Sociedad. Este acto constituye una expresión de aprobación científica y de amistad personal hacia nosotros, que apreciamos profundamente. Además, constituye un precioso símbolo de la verdadera unidad de espíritu que enlaza a los matemáticos y a otros científicos de la gran República de México con los de mi propio país.

A mi distinguido querido amigo, su primer Presidente, el señor profesor Alfonso Nápoles Gándara, le doy mis más sinceros agradecimientos. Deseo asegurarles a él y a todos los miembros de la Sociedad, que trataré de hacer todo lo posible para ser digno de su confianza y consideración.

La reciente fundación de la Sociedad y del Instituto de Matemáticas presentan con evidencia concreta un aumento de recursos matemáticos materiales, sin los cuales es casi imposible hacer mucho progreso. Los señores profesores Carlos Graef, Alberto Barajas, Roberto Vázquez y Francisco Zubieta han hecho importantes trabajos. ¡Felicitó al señor Rector de la Universidad por su Instituto de Matemáticas!

¿No es verdad que la maravillosa y hermosa estructura de las matemáticas, fundada sobre la lógica pura, domina a toda la ciencia exacta y a sus innumerables aplicaciones? ¿No constituye una poderosa y activa

tradición matemática una espléndida gloria para una nación? A mi me parece evidente que estas dos preguntas no admiten otra respuesta que la afirmativa, y estoy seguro de que ustedes todos están de acuerdo conmigo. ¡Trabajemos entonces para intensificar los intereses matemáticos de nuestros dos países con el fin de alcanzar un nivel digno y apropiado!

Ha sido para mi un inestimable privilegio colaborar con los miembros del Instituto de Matemáticas de la grande y tan antigua Universidad Nacional de México, y con el eminente físico, señor profesor Manuel Sandoval Vallarta. Les doy mis más sinceros agradecimientos a todos estos colegas y queridos amigos por su valiosa cooperación. Este primer Instituto de Matemáticas en México ya forma un poderoso centro matemático. Este Instituto y la Sociedad Matemática Mexicana formarán, respectivamente, los puntos focales y el ambiente general para el feliz desarrollo matemático en México, que ya ha comenzado con tanto éxito.

No hay duda de que la asociación de nuestros dos países en el dominio matemático, se pondrá cada vez más importante y acarreará un gran estímulo para todos nosotros. Ya han aparecido fuerzas de ambos lados que son muy favorables a esta tendencia. Todos los matemáticos de mi país se sienten profundamente interesados e intentan aprovechar cuanto sea posible esta amistosa asociación y mutua ayuda con los matemáticos mexicanos.

En conclusión, deseo expresar otra vez nuestros agradecimientos. Confío mucho en que estas oportunidades de intercambio fructífero van a presentarse con más frecuencia; y me propongo trabajar personalmente en este sentido con todo esfuerzo. ¡Ya hemos entrado en este tan bello camino, y deseamos continuar en él para siempre!

NOTA BIBLIOGRAFICA

En el número de marzo de los "Proceedings of the National Academy of Sciences", apareció el artículo titulado *Birkhoff's theory of gravitation and Einstein's theory for weak fields*, cuyo autor es el señor Alberto Barajas Celis, del Instituto de Matemáticas de la Universidad Nacional. Este trabajo es el primero hecho en este país que le ha sido publicado a un mexicano en la Sección de Matemáticas de la revista científica más importante de los Estados Unidos, lo cual es altamente satisfactorio para la Sociedad Matemática Mexicana.

En próximo número de este Boletín publicaremos la traducción castellana del artículo del profesor Barajas.

E. V. F.

NOTAS VARIAS

I

Rumbo al Estado de California, de la vecina República del Norte, partió de la ciudad de México, el día 13 del pasado mes de marzo, el doctor George D. Birkhoff, después de su breve y fructífera estancia entre nosotros. Los lectores de este Boletín conocen sin duda la personalidad de tan ilustre hombre de ciencia y están parcialmente enterados de los trabajos que matemáticos mexicanos han realizado, colaborando con él, y que son una prueba de las ventajas de cooperaciones de este tipo. El doctor Birkhoff permanecerá durante algún tiempo en el Estado de California, sustentando conferencias sobre su nueva teoría de la gravitación universal, elaborada con la cooperación de los señores Barajas, Graef y Vallarta; allí recibirá un grado honorario que agregará a la larga lista de los que le han sido otorgados por sus méritos.

II

Para los primeros días del presente mes de abril se espera la presencia en esta ciudad de México, del doctor Solomon Lefschetz, distinguido matemático de nacionalidad norteamericana, catedrático de la Universidad de Princeton y autor de muy importantes descubrimientos en la Topología y la Geometría Algebraica, por los cuales ha obtenido merecidos honores. El doctor Lefschetz, como huésped del Instituto de Matemáticas, desarrollará un interesante programa de trabajos, incluyendo un curso de topología combinatoria.

III

Para el próximo mes de mayo (días 25 a 28), se anuncia la Segunda Asamblea Regional de la Sociedad Matemática Mexicana, que tendrá lugar en la ciudad de Guanajuato, y para cuya feliz realización ha ofrecido su más amplia cooperación el Gobernador del Estado, señor Ernesto Hidalgo. La convocatoria correspondiente invita a los miembros de la Sociedad a participar ya sea de modo activo mediante la presentación de trabajos y sustentando conferencias o bien asistiendo a los diversos actos que con tal motivo se desarrollarán.

IV

El distinguido filósofo español doctor Juan David García Bacca, del Colegio de México, impartirá un breve curso sobre Lógica Matemática, en forma de conferencias, los lunes de las 20 a las 21 horas, en el local de la Escuela Nacional de Ingenieros.

V

El doctor Manuel Sandoval Vallarta y el Coronel Enrique Sánchez Lamego, miembros de la Sociedad Matemática Mexicana, fueron nombrados, respectivamente, Director y Secretario General del Instituto Politécnico Nacional. Recibimos con beneplácito esta noticia por tratarse de personas de reconocida competencia científica y esperamos que tan acertada designación redunde en beneficio de la ciencia en general y de la matemática en particular.