EL CONCEPTO MATEMATICO DE TIEMPO Y LA GRAVITACION

Por el Dr. George D. Birkhoff, de la Universidad de Harvard. *

PARTE I

DISCUSION GENERAL DEL CONCEPTO DE TIEMPO

1. *El tiempo absoluto*

No es difícil explicar el tiempo (absoluto) del sentido común desde el punto de vista genético. Hasta el descubrimiento de la finitud de la velocidad de la luz (Römer, 1675), se consideraba como natural que los acontecimientos sucedan en el instante en que se los ve. Este juicio casi intuitivo fué aplicado de la misma manera a los sucesos estelares y a los que tienen lugar sobre la tierra. Los físicos y astrónomos trataron de dar una descripción completa de los fenómenos y sus leyes, empleando la idea adicional de un "espacio absoluto" de tres dimensiones (el de Euclides). Así se proveyeron los físicos y astrónomos de un tablado en el que todo acontecimiento podía desempeñar su papel. Con estos instrumentos de pensar se obtuvo el éxito magnífico de la época clásica en las ciencias físicas.

Ni a Newton, ni a sus sucesores les pareció que el descubrimiento de la finitud de la velocidad de la luz afectara la validez de la idea física de un

---

* Este trabajo fué presentado por su autor al Congreso Internacional de Astrofísica, efectuado en Tonanzintla, Puebla, en febrero de 1942.

tiempo absoluto t. Dijo Newton en el primer *scholium* de sus célebres "Principia":

"I. El tiempo absoluto, verdadero y matemático, por sí mismo y por naturaleza propia, fluye regularmente, sin consideración a ninguna cosa externa y por otro nombre se llama duración; el tiempo relativo, aparente y común, consiste en una medida sensitiva y externa de tiempo (más o menos) por el movimiento."

Este "tiempo relativo" de Newton corresponde al tiempo cualitativo, mencionado abajo.

Ahora nos es claro que la noción intuitiva "tiempo absoluto" perdió su fuerza primitiva en el momento en que la observación de Römer sobre los satélites de Júpiter probó la finitud de la velocidad de la luz. Pero el mundo científico contemporáneo de Newton y sus sucesores continuaba siguiendo ciegamente al gran matemático y no se dió cuenta de la verdadera situación. Solamente su famoso rival, el filósofo y matemático Leibniz rehusó aceptar este concepto y afirmó que el tiempo es una entidad relativa. Dijo Leibniz: "Tengo tanto al espacio como al tiempo como cosas puramente relativas. El espacio es un *orden de existencias* de la misma manera que el tiempo es un *orden de sucesiones.*" Demostró dicha relatividad de tiempo (o de espacio) empleando su "principio de la razón suficiente". De acuerdo con este principio Dios no se serviría del tiempo absoluto porque siempre elige únicamente lo mejor; y en el tiempo absoluto no hay ninguna diferencia entre los distintos instantes.

La mecánica clásica de Galileo y Newton empezó a modificarse cuando Faraday hizo sus descubrimientos electromagnéticos. Faraday concibió en todo el espacio fuerzas eléctricas y magnéticas con interrelaciones íntimas. Para su comprensión inventó el éter electromagnético o espacio en que se desarrollan estas fuerzas. Mientras que el espacio absoluto de Newton admite una velocidad de movimiento de traslación uniforme, el éter de Faraday no la admite. Desgraciadamente, experimentos muy cuidadosos de Michelson y Morley (1887) para determinar la velocidad de la tierra en el éter condujeron a resultados negativos. En efecto: ¡mostraron que esta velocidad es siempre nula!

De los resultados inesperados de Michelson y Morley siguió inevitablemente un ulterior desarrollo de las nociones físicas de tiempo hacia las de la relatividad especial de Lorentz y Einstein. Pero antes de considerarlas, examinemos un poco más en detalle la naturaleza abstracta del tiempo absoluto, y el universo ideal correspondiente y su historia peculiar.

2. *La abstracción de tiempo absoluto*

Se puede caracterizar cualitativamente el concepto de tiempo absoluto con los siete postulados siguientes:

(1) Existe una clase E de elementos ("instantes"): A, B, C, ...
(2) Si $A < B$ (léase: A precede a B), entonces $A \neq B$.
(3) Si $A \neq B$, o $A < B$ o $B < A$.
(4) Si $A \neq B$, $A < B$ y $B < A$ es imposible.[1]
(5) Si $A < B$ y $B < C$, entonces $A < C$.
(6) *Existe para cualesquiera* A, B $(A < B)$ *un* C *tal que* $A < C < B$.
(7) *Para toda sucesión doble:*

$A_1 < A_2 < A_3 \ldots\ldots\ldots < \ldots\ldots\ldots B_3 < B_2 < B_1$, los elementos X tales que $A_i < X < B_j$ (i, j, cualesquiera) constituyen un intervalo.[2]

Notemos que el último postulado afirma que una serie de intervalos (A_n, B_n) tales que (A_n, B_n) incluye (A_{n-1}, B_{n-1}) en su interior, $(n = 1, 2\ldots)$, tiende siempre a un intervalo límite.

No es difícil demostrar que un sistema de elementos A, B..., con una relación $<$, que obedezca a estos postulados, puede representarse por los puntos de una línea recta infinita, de manera que el elemento A precede a otro B, cuando el punto P_A correspondiente a A precede a P_B en aquella línea orientada en sentido definido.

Los siete postulados parecen ser muy naturales, y evidentemente sirven para definir el tiempo absoluto desde el punto de vista cualitativo. Si añadimos otro postulado, igualmente natural desde el punto de vista físico:

(8) *Todas las partes de esta línea de tiempo son idénticas en sus propiedades físicas,*

concluiremos que se puede definir un número real t como coordenada en esta línea que *mide* la distancia temporal entre dos sucesos A y B, esto es: $t_B - t_A$, de manera que si $A < B$, entonces $t_A < t_B$, e inversamente.

---

1 El postulado (4) no es independiente de (1), (3) y (5).

2 Es decir, un solo elemento si $A = X = B$ o una clase de elementos, para $A \neq B$.

Se puede llamar a (8) el postulado de isotropismo del tiempo.

Nuestra formulación del postulado (8) no es muy exacta. Para darle una forma matemática más aceptable es conveniente introducir la idea de un automorfismo físico del sistema de elementos y relación considerado como una correspondencia biunívoca que conserva la relación entre los elementos y toda otra propiedad física. Entonces (8) podría formularse de la manera siguiente: Hay un automorfismo y uno solo que hace corresponder un elemento arbitrario A con otro elemento arbitrario B. Evidentemente, para fijar el tiempo como entidad física es solamente necesario un instante arbitrario que sirva de origen.

3. *El universo correspondiente y su historia*

El universo ideal de Newton, basado en las ideas de tiempo absoluto y de cuerpo rígido, nos da una primera aproximación notable de nuestro universo actual. Al astrónomo, este universo ideal le parece sobre todo regido por la ley de gravitación universal de Newton. Si se restringe la atención al caso sencillo de n partículas (puntos materiales) de masas $m_1, m_2 \ldots, m_n$, podemos describir en sus rasgos generales la historia completa (futuro y pasado) del sistema.

Ciertas consideraciones matemáticas debidas a Sundman en el caso $n = 3$ muestran que, por lo general, las masas no chocan nunca. Pero si dos chocan, se separan inmediatamente en una manera determinada (continuación analítica después del choque). Para no complicar demasiado la situación, ignoremos los casos, muy raros, en que tiene lugar un choque entre más de dos masas. Debo hacer notar que aún siendo tales resultados muy sencillos y elementales no están completamente demostrados por los matemáticos.

En el caso particular de tres masas ($n = 3$), con fuerzas fijas angulares de impulsión alrededor del centro de gravedad *no todas nulas,* demostró Sundman de manera rigurosa que las tres masas no pueden chocar en ningún instante. Así se puede continuar el movimiento para

$$-\infty < t < +\infty,$$

sin más que choques dobles en número finito en todo intervalo finito. Y yo demostré con sus métodos que las tres masas P_1, P_2, P_3 no pueden acercarse entre sí sin que en el triángulo $P_1P_2P_3$, uno de los lados P_1P_2 permanezca siempre pequeño relativamente a los otros dos lados P_1P_3,

P_2P_3; y que la suma $P_1P_2 + P_2P_3 + P_3P_1$ tendería hacia el infinito en ambas direcciones del tiempo. De manera semejante parece muy probable que en tal sistema, puesto que el acercamiento de dos masas proporciona una cantidad grande de energía cinética, en general las tres masas se separarán a la larga, aisladas todas, o una aislada y las restantes en un par, y retrocederán del centro de masa hacia el infinito con velocidades uniformes en el límite. Como el sistema de tres masas es reversible, la misma conclusión permanece válida para el pasado.

En el caso de $n(>3)$ masas, semejantes consideraciones nos conducen a conclusiones análogas: En el futuro y en el pasado las n masas retrocederán, o aisladas o en pares y se alejarán hacia el infinito con velocidades uniformes. Naturalmente, pueden existir casos excepcionales, como el del movimiento periódico. Aunque nuestro conocimiento matemático avance muy rápidamente en la dirección deseada, los problemas son difíciles y todavía no resueltos.

De aquellos resultados y conjeturas, vemos que en cierta configuración intermedia, las n masas deben estar lo más cerca posible entre sí, y se separan, en la manera indicada, de esta posición en las dos direcciones de tiempo. Así, este modelo abstracto, el más sencillo, presenta un "universo en expansión" tanto en el pasado como en el futuro. Y comparando los hechos observados con estas conclusiones teóricas, concluimos que nuestro universo está en el segundo estado de su existencia.

Evidentemente, el universo actual es enormemente más complejo que nuestro modelo de n masas en el espacio y tiempo de Newton. Naturalmente los astrónomos siempre corrigieron las observaciones a causa de la velocidad finita de la luz. Empleando estos instrumentos e introduciendo los cuerpos rígidos, los flúidos, etc., lograron explicar muchos y variados fenómenos.

4. *El tiempo local y sus postulados*

Los resultados experimentales de Michelson y Morley nos indican, ni más ni menos, que en la naturaleza, el espacio y el tiempo admiten un tipo nuevo de relatividad no sospechado, el de la relatividad restringida (o especial) de Einstein (1905). Desde el punto de vista del astrónomo, con su reloj y su telescopio, el modelo inmediato y sencillo que presenta el universo de las estrellas es uno en el que todas éstas juegan un papel en apariencia idéntico. De acuerdo con este modelo, parece muy razonable que haya una relatividad en el espacio-tiempo correspondiente que no permita distinguirlas entre si como objetos físicos; y esta relatividad explica los experimentos de Michelson y Morley. Además el matemático Minkowski (1908) vió que las ecuaciones fundamentales del campo electromagnético están de acuerdo con la nueva relatividad.

Los postulados del "tiempo local", ideados por Lorentz y que están incluídos en la relatividad restringida, se pueden formular del modo abreviado siguiente:

(1) En coordenadas conformes relativas t, x, y, z de una partícula (¡o estrella!), (t mide el tiempo local; x, y, z miden su espacio propio) toda partícula y todo rayo de luz se mueven en líneas rectas con velocidades uniformes.

(2) La velocidad de la luz en el espacio-tiempo relativo es siempre una constante c, que tomamos por 1, puesto que el segundo-luz (186,300 millas) es la unidad de distancia. La velocidad de una partícula cualquiera es menor que $c = 1$.

(3) Las marchas de relojes idénticos que miden los tiempos locales s, con respecto a una partícula cualquiera, no varían y dependen sólo de la velocidad relativa de la partícula observada. Con tal que aceptemos esos postulados, obtenemos sin dificultad la fórmula fundamental de la teoría:

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

en donde ds es el elemento de tiempo local de la partícula entre dos sucesos próximos con coordenadas t, x, y, z que difieren en dt, dx, dy, dz, respectivamente.

Pero en tal universo astronómico el concepto de la simultaneidad absoluta, que implica la noción de tiempo absoluto, pierde toda su fuerza. De la misma manera desaparece el concepto de cuerpo rígido que fué un instrumento teórico fundamental en la física clásica. En verdad, ¡aún hasta hoy no hemos podido hallar ningún instrumento que pueda reemplazarlo en la física moderna! Por ejemplo, en la física clásica era legítimo imaginar una esfera rígida cargada de electricidad con intensidad dada. Ningún concepto análogo se halla en la relatividad especial aunque de hecho nos rodean cuerpos más o menos rígidos.

Notemos que en un universo tal se puede definir un tipo de tiempo cósmico. Explicaré el método general para proceder solamente en el caso más sencillo en que n partículas de masas naturales $m_1, m_2, \ldots, m_n$ se mueven en trayectorias rectilíneas con velocidades uniformes. Es fácil demostrar que en este caso existe una única partícula ideal I, que es el centro de gravedad exacto del sistema. Evidentemente se define así un "tiempo cósmico" único y conveniente.

En el fondo, el espacio-tiempo de la relatividad especial no presenta ningún misterio y forma un sistema consistente y completo.

Ahora este tipo de relatividad es aceptado por todos los que trabajan en el dominio del electromagnetismo. Desgraciadamente no existe hasta ahora en esta teoría ninguna explicación de los fenómenos de gravitación que esté de acuerdo con ella.

En la segunda parte de este artículo presentaré un ensayo para hacerlo. Sin embargo, la teoría de la relatividad restringida queda incompleta aún siendo aceptada nuestra teoría. Pero ciertamente no sería más incompleta que la teoría generalizada de Einstein (1915) inventada solamente para explicar los fenómenos de gravitación. No sería difícil definir un "tiempo cósmico" apropiado a la nueva teoría de gravitación, al menos cuando la masa y energía total son finitas.

5. *Historia de un sistema con relatividad restringida*

¿Cómo es el universo que corresponde al espacio-tiempo de la relatividad restringida? Considerando muy brevemente esta cuestión aceptaremos la teoría de la gravitación de la parte II de este artículo.

En el caso más sencillo el universo contendrá n masas (puntos) de magnitudes m_1, m_2, ..., m_n. Para velocidades relativas moderadas, se comportarán las masas en primera aproximación como si estuvieran de acuerdo con la ley de gravitación de Newton. Entonces esperaríamos que el desarrollo de nuestro universo no difiriera mucho de lo predicho en la teoría clásica. Pero con respecto al centro de gravedad I y su tiempo cósmico, los relojes locales de las partículas (estrellas) en retroceso parecerían andar más despacio que el del centro de masa I.

Pero el sistema no sería completamente reversible en el tiempo puesto que los potenciales gravitacionales de dicha teoría envuelven la determinación de ciertos *potenciales retardados*. Aunque no lo he demostrado, creo que existe una disminución muy lenta en la energía; en lo que sigue voy a hacer esta hipótesis, aunque no esté demostrada.

Por razones explicadas más tarde, yo he empleado en la teoría propuesta un "flúido perfecto" en lugar del "polvo frío" o materia de estructura indeterminada que entra en la teoría de Einstein. Con cuerpos, casi esféricos, formados de un tal flúido perfecto y que se mueven con pequeñas velocidades relativas, se obtiene un buen modelo del sistema celeste desde el punto de vista gravitacional. En verdad, no sólo será válida la ley de Newton, sino que las desviaciones, predichas por la teoría de Einstein y verificadas por las observaciones, son igualmente predichas por la nueva teoría.

En el universo ideal me parece probable que con velocidades relativas suficientes de las masas, éstas tenderán a separarse, aisladas o en pares; pero me parece también que a la larga los pares chocarán, en el caso de masas flúidas, o se aproximarán indefinidamente.

Puesto que tales sistemas no son reversibles, no podemos inferir su historia pasada. Es claro que las posibilidades son muchas y varias.

¡Un sastre apto prefiere siempre hacer un traje de una sola pieza de paño! No obstante, después de la aparición de la relatividad restringida, todos los físicos han hecho al universo físico un traje teórico, compuesto de las ideas de la relatividad restringida (y aún generalizada) y también de las ideas contradictorias de la física clásica (como las de cuerpos rígidos, flúidos ordinarios, etc.).

Sin embargo, no cabe duda de que los antiguos conceptos de espacio y tiempo no reaparecerán nunca. Como dijo Minkowski en una frase muy bien conocida: "De ahora en adelante, el espacio solo y el tiempo aisladamente no desempeñarán otros papeles que los de sombras, y solamente una combinación de los dos poseerá una significación actual."

6. *Tiempo generalizado de Einstein*

Las ideas de Minkowski sobre las ecuaciones electro-magnéticas en la relatividad restringida (1908) manifestaron claramente la importancia central de la fórmula que da ds^2 en esta teoría. Se hizo evidente que el espacio-tiempo correspondiente no es otra cosa que una geometría especial del tipo considerado por el matemático Riemann hace más de un siglo. Fué Einstein el que reemplazó el elemento ds^2 por un elemento más complejo:

$$ds^2 = g_{ij}\, dx^i\, dx^j.$$

(Notación del cálculo diferencial absoluto de Ricci y Levi-Civita.) Las g_{ij} $(i, j = 1, \ldots, 4)$ con $g_{ij} = g_{ji}$ son los "potenciales gravitacionales". Desde su punto de vista las trayectorias de las partículas son las curvas geodésicas tales que $\delta \int ds = 0$ a lo largo de ellas, con $ds^2 > 0$; los rayos de luz son las curvas geodésicas tales que $ds = 0$. Es evidente que en la teoría restringida esta interpretación es válida.

Procediendo así, Einstein introdujo diez nuevas funciones desconocidas g_{ij}, mientras que en la teoría de Newton no hay sino una única función g. Para determinar estas funciones Einstein supuso que las condiciones semejantes a

$$R_{ij} - \tfrac{1}{2} R g_{ij} = T_{ij}$$

son válidas. (T_{ij} designa "el tensor de energía de materia", y R_{ij} es "el tensor contraído de la curvatura".)

Con tales hipótesis se obtuvo la ley observada de gravitación como primera aproximación, y se propusieron tres resultados derivados de su teoría. La predicción del avance del perihelio de Mercurio estuvo de acuerdo con las observaciones. La de la curvatura de la luz por el Sol, fué verificada experimentalmente más tarde. La tercera fué también verificada; pero una verificación completamente satisfactoria es muy difícil.

Aparte de la predicción de estos tres efectos muy pequeños, la teoría generalizada de la relatividad de Einstein no posee ninguna otra justificación que la de dar una teoría elegante de la gravitación, que falta en la teoría restringida. Desgraciadamente, para hacerlo Einstein tuvo que reemplazar el espacio-tiempo sencillo y natural de su teoría especial por un tipo de espacio-tiempo enormemente más complejo.

Aunque nuestra teoría retiene el espacio-tiempo de la relatividad especial y es más sencilla, no obstante está igualmente de acuerdo con los hechos observados.

Ciertamente es importante tener una variedad de teorías posibles. En consecuencia, presento aquí una nueva teoría de gravitación, sin preferir ésta o la otra definitivamente. En verdad, lo que es más probable es que otras teorías reemplazarán algún día a la mayor parte de las teorías de hoy.

La genial intuición con que Einstein comenzó la teoría general de la relatividad es la siguiente: La materia debe afectar la estructura del espacio-tiempo. Pero existen muchas intuiciones muy naturales y no todas pueden ser verdaderas al mismo tiempo.

No trataré de considerar el universo correspondiente a la segunda teoría relativista de Einstein, y su desarrollo histórico, en ningún caso. La teoría matemática de las ecuaciones diferenciales correspondientes es una verdadera *terra incognita* en todas direcciones. Pero me atrevo a conjeturar que si tales ecuaciones definen un universo matemático con consistencia lógica, será posible otra vez definir un tiempo cósmico, al menos en el caso de masa y energía finitas. Conjeturo también que se podrá seguir la historia futura y pasada de ese universo durante un largo intervalo de tiempo. Fuera de un tal intervalo, creo que no será posible inferir lo que acontece, hasta el momento en que sean descubiertas las verdaderas leyes de la estructura última de la materia.

7. *Tiempo en la física cuántica*

No podremos hacer más que notar la falta de un verdadero tiempo local en la física cuántica. Solamente podemos definir un tiempo constituído por la agrupación de intervalos finitos.

En 1926, pocos meses después del descubrimiento de la ecuación famosa de Schrödinger, publiqué un artículo en que traté de utilizar las teorías relativistas de Einstein para obtener la ecuación de Schrödinger. Si se lograse éxito en tal empresa, sería posible retener la idea de tiempo local. Y si fuese desarrollada la teoría de gravitación que doy aquí o modificada en una dirección constructiva, sería aún posible retener el espacio-tiempo de la relatividad restringida.

Me parece que tales posibilidades merecen nuestra cuidadosa atención. Procederé a formular en detalle dicha teoría de la gravitación.

PARTE II

TEORIA DE LA GRAVITACION

1. *El flúido perfecto*

El elemento de tiempo local de la teoría de la relatividad restringida se define del modo siguiente:

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = \delta_{ab}\, dx^a\, dx^b, \tag{1}$$

en donde

$$x^1 = t,\ x^2 = x,\ x^3 = y, x^4 = z;$$

$\delta_{ij} \neq 0$, cuando $i \neq j$ y $\delta_{11} = 1$, $\delta_{22} = \delta_{33} = \delta_{44} = -1$. Usaremos en este artículo la notación ordinaria del cálculo diferencial absoluto de Ricci y de Levi-Civita.[1]

Imaginemos un flúido que se encuentra en el espacio físico a gran distancia de cualquier masa, de manera que se puedan despreciar las fuerzas gravitacionales.

Postulemos como ecuaciones del flúido las siguientes:

$$\frac{\partial T^{ia}}{\partial x^a} = f^i, \tag{2}$$

en donde

$$T^{ij} = \varrho u^i u^j - p\delta^{ij} \tag{3}$$

y f^i denota el tensor de la fuerza por unidad de volumen. Aquí ϱ designa la densidad y u^i el tensor de la velocidad:

$$u^i = \frac{dx^i}{ds}.$$

Una consecuencia inmediata de (1) es:

$$\delta_{ab}\, u^a u^b = 1. \tag{4}$$

Para el sistema de referencia en reposo: $u^1 = 1$, $u^2 = u^3 = u^4 = 0$. Las ecuaciones (2) se reducen, en este caso, a:

$$\left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial x^1}(\varrho - p) + \varrho\left(\frac{\partial u^2}{\partial x^2} + \frac{\partial u^3}{\partial x^3} + \frac{\partial u^4}{\partial x^4}\right) = 0\\
&\varrho \frac{\partial u^2}{\partial x^1} = -\frac{\partial p}{\partial x^2} + f^2.\\
&\varrho \frac{\partial u^3}{\partial x^1} = -\frac{\partial p}{\partial x^3} + f^3.\\
&\varrho \frac{\partial u^4}{\partial x^1} = -\frac{\partial p}{\partial x^4} + f^4.
\end{aligned}\right. \tag{2'}$$

1 Véase, por ejemplo, mi libro "Relativity and Modern Physics", Second Edition, 1927.

De la primera de las ecuaciones (2′) se concluye inmediatamente que la integral

$$(5) \qquad \iiint \varrho e^{-\int \frac{dp}{\varrho}} dx^2\, dx^3\, dx^4,$$

calculada para las coordenadas de reposo, y extendida a un volumen cualquiera del flúido, es invariante en el movimiento del flúido.

Si se postula para el flúido una ecuación arbitraria de estado

$$(6) \qquad p = f(\varrho),$$

se presentan dificultades esenciales.

El polvo frío se puede considerar como un flúido en que $p = f(\varrho) = 0$. Imaginemos una nube de polvo de densidad constante en el instante $t = 0$, y supongamos que todas las partículas de ese polvo se mueven hacia el origen con velocidades constantes y proporcionales a sus distancias a aquél en $t = 0$. Toda partícula de polvo llegará al origen en el mismo instante t; de manera que se tendría en este caso una concentración de masa finita en un punto.

Cualquier hipótesis distinta de $p = \frac{1}{2}\varrho$ conduce a una dificultad fundamental. Consideremos el caso de un flúido de densidad uniforme ϱ_0 y que se encuentre en estado de reposo. La velocidad de la onda de perturbación es entonces:

$$v_0 = \frac{f'(\varrho_0)}{1 - f'(\varrho_0)}.$$

Supongamos que $f'(\varrho_0) \neq \frac{1}{2}$; entonces $v_0 \neq 1$. No está de acuerdo con el espíritu de la relatividad restringida el que la velocidad v_0 sea mayor que uno. Podemos suponer entonces que v_0 es menor que uno. Imaginemos dos porciones de flúido perfecto, simétricas con respecto a un plano, que se acercan con velocidades perpendiculares a aquél, y cuya rapidez de acercamiento v es mayor que v_0 y menor que 1. En el instante del choque la onda de perturbación tiene una velocidad menor que la de la masa flúida que la provoca. Las ecuaciones del movimiento fallan en el caso del choque de porciones de flúido. Nos vemos obligados a suponer $v_0 = 1$, y de esto se deduce inmediatamente $p = \frac{1}{2}\varrho$, ignorando la constante de integración, que no interviene en las ecuaciones del movimiento. Supondremos que en el caso de equilibrio: $\varrho = \varrho_0 > 0$. Con esta ecuación de estado, la integral (5) se transforma en

(5′)
$$\int\int\int \sqrt{\varrho}\, dx^2\, dx^3\, dx^4.$$

Por consiguiente, vemos que el flúido perfecto no tiene masa constante. Lo que se conserva en el movimiento del flúido perfecto es una masa ficticia cuya densidad es $\sqrt{\varrho}$. Debido a la enorme velocidad de la onda de perturbación, para velocidades moderadas el flúido perfecto es casi incompresible.

Supongamos que una porción esférica de flúido perfecto se mueve lentamente en un sistema de referencia inercial. Si una fuerza moderada, cuya dirección no cambia rápidamente, urge a este cuerpo, entonces, el movimiento se efectúa en primera aproximación como el de un flúido incompresible en la física clásica. En efecto, podemos escribir las ecuaciones del movimiento para $i = 2, 3, 4$ en la forma:

$$\frac{d}{ds}\left(\varrho\,\frac{dx^1}{ds}\right) + \varrho u^j \left(\frac{\partial u^1}{\partial x^1} + \frac{\partial u^2}{\partial x^2} + \frac{\partial u^3}{\partial x^3} + \frac{\partial u^4}{\partial x^4}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x^1} + f^1.$$

La cantidad entre paréntesis es muy pequeña porque el flúido es casi incompresible, de manera que las ecuaciones son esencialmente las de la hidrodinámica clásica.

2. *Los potenciales y las fuerzas gravitacionales*

Introduzcamos el tensor simétrico h_{ij} de los potenciales gravitacionales, definido por las ecuaciones:

(7)
$$\Box h^{ij} = 8\pi T^{ij}$$

en donde $\Box$ designa el operador de D'Alembert:

$$\frac{\partial^2}{(\partial x^1)^2} - \frac{\partial^2}{(\partial x^2)^2} - \frac{\partial^2}{(\partial x^3)^2} - \frac{\partial^2}{(\partial x^4)^2} = \delta^{ab}\,\frac{\partial}{\partial x^a}\,\frac{\partial}{\partial x^b}.$$

En el espacio vacío: $T^{ij} = 0$. La forma de estas ecuaciones está de acuerdo con el espíritu de la Relatividad Restringida y las h^{ij} quedan definidas como potenciales retardados. Nótese que las ecuaciones (7) no son de tipo reversible en el tiempo $t = x^1$, puesto que un potencial retardado se transforma en un potencial avanzado cuando t cambia de signo. Como se ve, las ecuaciones (7) son del tipo de la ecuación de Poisson:

$$\Delta g = -4\pi\varrho.$$

El tensor f^i (o también el f_i) queda definido por los dos postulados siguientes:

(1) Las fuerzas f_i (fuerzas por unidad de masa) son funciones lineales y homogéneas de las primeras derivadas de los potenciales h_{ij}.

(2) Las fuerzas f_i son funciones pares y cuadráticas de la u^i y solamente dependen de las primeras derivadas de los potenciales gravitacionales y de las velocidades. Nótese que la condición universal

$$f_a u^a = 0 \tag{8}$$

muestra claramente que f_i depende del tensor u^i.

La forma de las f_i se determina haciendo el siguiente razonamiento, que si bien no es completo, sí es, en cambio, rápido y sencillo. Los tensores que intervienen en la expresión de f_i son:

$$u^i \quad y \quad \frac{\partial h_{ij}}{\partial x^r};$$

utilizamos aquí las componentes contravariantes del vector velocidad. Para formar el tensor más general que satisfaga los postulados (1) y (2), introduzcamos las variables normales:

$$\mathit{x}^1 = x^1, \quad \mathit{x}^2 = \sqrt{-1}\,x^2, \quad \mathit{x}^3 = \sqrt{-1}\,x^3, \quad \mathit{x}^4 = \sqrt{-1}\,x^4.$$

Usaremos cursivas para todas las letras que representen a componentes de tensores en el sistema $\mathit{x}^1, \mathit{x}^2, \mathit{x}^3, \mathit{x}^4$. Las relaciones que hay entre las componentes de un tensor contravariante simple en uno y otro sistema, son:

$$\mathit{u}^1 = u^1, \quad \mathit{u}^2 = \sqrt{-1}\,u^2, \quad \mathit{u}^3 = \sqrt{-1}\,u^3, \quad \mathit{u}^4 = \sqrt{-1}\,u^4.$$

Las ecuaciones de transformación de las componentes son las siguientes en el caso de un tensor doblemente covariante:

$$a_{11} = \mathrm{a}_{11}\,; \quad a_{1s} = -\sqrt{-1}\ \mathrm{a}_{1s}, \quad s \neq 1$$

$$a_{s1} = -\sqrt{-1}\ \mathrm{a}_{s1}, \quad s \neq 1$$

$$a_{rs} = -\mathrm{a}_{rs} \qquad r,\ s \neq 1.$$

El tensor f_i de la fuerza gravitacional es entonces una combinación lineal de los cuatro vectores:

$$\frac{\partial h_{ia}}{\partial x^a}, \qquad \frac{\partial h_{aa}}{\partial x^i}, \qquad \frac{\partial h_{ia}}{\partial x^b}\, u^a u^b, \qquad \frac{\partial h_{ab}}{\partial x^i}\, u^a u^b.$$

Sean A, B, C, D los cuatro coeficientes de la combinación lineal; entonces:

$$f_i = \mathrm{A}\,\frac{\partial h_{ia}}{\partial x^a} + \mathrm{B}\,\frac{\partial h_{aa}}{\partial x^i} + \mathrm{C}\,\frac{\partial h_{ia}}{\partial x^b}\, u^a u^b + \mathrm{D}\,\frac{\partial h_{ab}}{\partial x_i}\, u^a u^b.$$

De la condición $f_i u^i = 0$ se obtiene inmediatamente:

$$\left(\mathrm{A}\,\frac{\partial h_{ia}}{\partial x^a} + \mathrm{B}\,\frac{\partial h_{aa}}{\partial x^i}\right) u^i + (\mathrm{C} + \mathrm{D})\,\frac{\partial h_{ia}}{\partial x^b}\, u^a u^b u^i = 0.$$

De esta ecuación se deduce:

$$\mathrm{A} = \mathrm{B} = \mathrm{C} + \mathrm{D} = 0.$$

El tensor f está definido entonces por:

$$(9) \qquad f_i = \left(\frac{\partial h_{ia}}{\partial x^b} - \frac{\partial h_{ab}}{\partial x^i}\right) u^a u^b.$$

Transformando las componentes de f_i del sistema x^i al sistem ob-tiene:

$$(10) \qquad \mathrm{f}_i = \left(\frac{\partial \mathrm{h}_{ia}}{\partial \mathrm{x}^b} - \frac{\partial \mathrm{h}_{ab}}{\partial \mathrm{x}^i}\right) \mathrm{u}^a \mathrm{u}^b.$$

Consideremos ahora el caso de una esfera de flúido perfecto en movimiento lento, de modo que su velocidad sea despreciable en comparación con la velocidad de la luz. En primera aproximación se tiene, entonces:

$$u^1 = 1\,;\ u^2 = u^3 = u^4 = 0\,;$$

$$T^{11} = T^{22} = T^{33} = T^{44} = \tfrac{1}{2}\,\varrho\,;\ T^{ij} = 0 \quad (i \neq j).$$

Con ayuda de la ecuación (7), se obtiene:

$$\Box\, h^{ij} = 4\pi\varrho \qquad (i = j)\,;\ \Box\, h^{ij} = 0 \qquad (i \neq j).$$

Para el caso estático que se está considerando, estas ecuaciones se reducen a:

$$\nabla^2 h^{ij} = -\,4\pi\varrho \ \ (i = j)\,;\ \ \nabla^2 h^{ij} = 0 \qquad (i \neq j).$$

Las soluciones de estas ecuaciones, son:

$$h^{ij} = h \qquad (i = j)\,;\ \ h^{ij} = 0 \qquad (i \neq j),$$

en donde h es el potencial Newtoniano correspondiente a la masa dada y calculado en unidades absolutas.

Las fuerzas correspondientes al tensor h^{ij}, son:

$$f^i = -\,f_i = \frac{\partial h}{\partial x^i} \qquad (i = 2, 3, 4).$$

Por consiguiente, un sistema de partículas, moviéndose en el campo gravitacional de una masa en movimiento lento, obedecerá en primera aproximación las leyes de Newton.

3. *Los potenciales exactos de una esfera en reposo*

En el caso de simetría esférica completa y de un estado de reposo:

$$u^1 = 1\,,\quad u^2 = u^3 = u^4 = 0,$$

y en el espacio vacío valen las ecuaciones:

$$\Box\, h^{ij} = 0.$$

Como se trata de potenciales estáticos, las últimas ecuaciones son equivalentes a:

$$\nabla^2 h^{ij} = 0.$$

La solución más general de estas ecuaciones, que tenga simetría *esférica* y no *solamente central,* y que se anule al infinito, es:

$$h^{ij} = \frac{m^{ij}}{r}$$

en donde r es la distancia al centro.

Para determinar las m^{ij} basta considerar las h^{ij} en el interior de la esfera, en donde:

$$T^{11} = T^{22} = T^{33} = T^{44} = \tfrac{1}{2}\,\varrho\,;$$

$$T^{ij} = 0, \ \ (i \neq j)\,;$$

$$h^{ij} = \frac{m}{r}.$$

Las componentes doblemente covariantes del tensor gravitacional son iguales a sus componentes doblemente contravariantes:

$$h^{ij} = h_{ij}.$$

Entonces:

$$h_{11} = h_{22} = h_{33} = h_{44} = \frac{m}{r}; \quad h_{ij} = 0 \ (i \neq j)\,; \tag{11}$$

m es aquí la masa de la esfera.

4. *El campo gravitacional de fuerzas de una esfera en reposo*

La ecuación (10) se reduce, para $i = 2$ y utilizando la (11), a:

$$f_2 = \frac{\partial h}{\partial x^b}\, u^2 u^b - \frac{\partial h}{\partial x^2}\, [(u^1)^2 + (u^2)^2 + (u^3)^2 + (u^4)^2].$$

Como $h = \dfrac{m}{r}$,

$$f_2 = -\frac{mu^2}{r^3}(x^2 u^2 + x^3 u^3 + x^4 u^4)$$

$$+\frac{mx^2}{r^3}[(u^1)^2 + (u^2)^2 + (u^3)^2 + (u^4)^2].$$

Reemplazamos x^2, x^3, x^4 por x, y, z, respectivamente, y u^2, u^3, u^4 por

$\dfrac{dx}{ds}$, $\dfrac{dy}{ds}$ y $\dfrac{dz}{ds}$.

La fuerza en la dirección del eje de las x es, entonces:

$$F^x = f^2 = -f_2$$

$$(12) \qquad = -\frac{mx}{r^3} - \frac{2mx}{r^3}(x'^2 + y'^2 + z'^2) + \frac{mx'r'}{r^2},$$

en donde designamos por medio de un acento la derivada con respecto a s. Las fórmulas para F^y y F^z se obtienen de un modo análogo.

Para una partícula (como un planeta en el campo gravitacional del sol) que se mueve en un plano, las ecuaciones del movimiento son:

$$(13) \qquad \begin{cases} x'' = -\dfrac{mx}{r^3} - \dfrac{2mx}{r^3}(x'^2 + y'^2) + \dfrac{mx'r'}{r^2} \\[2ex] y'' = -\dfrac{my}{r^3} - \dfrac{2my}{r^3}(x'^2 + y'^2) + \dfrac{my'r'}{r^2}. \end{cases}$$

No es necesario escribir la ecuación análoga para t'', porque esta última es una consecuencia de las ecuaciones (13), que son integrables como veremos en seguida.

4. *Integración de las ecuaciones del movimiento*

Si multiplicamos la primera de las ecuaciones (13) por y y la segunda por x, y si restamos miembro a miembro, obtenemos una ecuación diferencial que se puede integrar de un modo inmediato; el resultado es el siguiente:

$$\log (xy' - yx') = -\frac{m}{r} - C.$$

Introduciendo cooordenadas polares, se obtiene:

$$r^2 \frac{d\vartheta}{ds} = he^{-\frac{m}{r} - c}. \tag{14}$$

Aquí C es una constante superflua que definiremos dentro de un momento.

Multiplicando otra vez a la primera de las ecuaciones (13) por x' y a la segunda por y', y sumando miembro a miembro, se obtiene:

$$x'\,x'' + y'\,y'' = \frac{mr'}{r^2}(x'^2 + y'^2).$$

La integral de esta ecuación diferencial es:

$$x'^2 + y'^2 = e^{2\left(\frac{m}{r} + C\right)} - 1. \tag{15}$$

De las ecuaciones (14) y (15) se elimina s, y se obtiene la ecuación diferencial geométrica de la trayectoria de una partícula:

$$h^2 \left[\left(\frac{du}{d\vartheta}\right)^2 + u^2\right] = e^{2\,(mu + C)}\left[e^{2\,(mu + C)} - 1\right] \tag{16}$$

en donde $u = 1/r$.

Integrando la ecuación diferencial (16) obtenemos:

$$\vartheta = \int \frac{hdu}{\sqrt{e^{2\,(mu + C)}\left[e^{2\,(mu + C)} - h^2u^2\right]}}. \tag{17.1}$$

También s y t se pueden expresar por medio de u en la siguiente forma:

$$s = \int \frac{e^{mu + C}}{hu^2}\, d\vartheta \tag{17.2}$$

$$t = \int \frac{e^{2(mu+C)}}{hu^2}\, d\vartheta. \tag{17.3}$$

5. *Avance del perihelio de un planeta*

Las velocidades de los planetas son muy pequeñas comparadas con la velocidad de la luz, y para sus líneas de universo t y s difieren muy poco entre sí. De la ecuación (15) se ve inmediatamente que $mu + C$ es también pequeña. Está entonces justificado despreciar las potencias superiores de $mu + C$ en la ecuación (16), y podemos escribir:

$$h^2\left[\left(\frac{du}{d\vartheta}\right)^2 + u^2\right] = 2\,[mu + C + 3\,(mu + C)^2]. \tag{16'}$$

En (16′) los términos despreciados son de sexto orden con respecto a las velocidades. Integrando (16′) se obtiene:

$$\varepsilon = 2\int d\vartheta = \int_{u_1}^{u_2} \frac{h\,du}{\sqrt{2\,(mu + C) + 3\,(mu + C)^2 - h^2u^2}}. \tag{18}$$

Aquí ε designa el avance del perihelio en cada revolución planetaria, y u_1 y u_2 son los valores mínimo y máximo de u, correspondientes a los valores máximo y mínimo de r, respectivamente. El valor exacto de la integral es:

$$\frac{2\pi h}{\sqrt{u^2 - 6m^2}} = 2\pi\left(1 - \frac{3m^2}{u^2} + \ldots\right).$$

La trayectoria es una elipse que gira lentamente; por lo tanto:

$$h = \sqrt{ma(1-e^2)}$$

en donde 2a es el eje de la elipse y e su excentricidad. Para ε se obtiene entonces:

$$\varepsilon \cong \frac{6\pi m}{a(1-e^2)}. \tag{18'}$$

Esta es precisamente la fórmula aproximada, de la Teoría de la Relatividad General de Einstein, para el corrimiento del perihelio de un planeta.

6. *La curvatura de la luz*

Si se considera la luz como una onda electromagnética, los rayos luminosos son siempre líneas rectas y la velocidad de propagación es igual a uno en todos los casos. Pero existe una enorme cantidad de fenómenos luminosos que sólo se pueden explicar con ayuda del fotón. Supongamos que el fotón es una partícula de masa muy pequeña cuya trayectoria es el rayo real como en la teoría corpuscular de Newton. Establezcamos las ecuaciones de ese rayo.

Consideremos la ecuación (16) ; cómo la partícula se mueve con una velocidad casi igual a uno, la constante C es muy grande. Introduciendo h^*, definida por:

$$h = h^* e^{2mC},$$

se obtiene:

$$(16'') \qquad h^{*2}\left[\left(\frac{du}{d\vartheta}\right)^2 + u^2\right] = e^{2mu}\left[e^{2mu} - e^{-2(mu+C)}\right].$$

Cuando C tiende al infinito la forma límite de (16″) es:

$$(19) \qquad h^{*2}\left[\left(\frac{du}{d\vartheta}\right)^2 + u^2\right] = e^{4mu}.$$

Esta ecuación define la trayectoria del fotón. De la misma se obtiene inmediatamente:

$$(20) \qquad 2\pi + \varepsilon = \int_0^{\frac{1}{p}} \frac{h^* du}{\sqrt{e^{4mu} - h^* u^2}}.$$

En esta ecuación, p designa la distancia al perihelio, y ε la desviación angular del rayo. En el perihelio:

$$\frac{du}{d\vartheta} = 0, \quad y \quad h^{*2} = e^{\frac{4m}{p}} p^2.$$

Substituyendo el segundo miembro por h^{*2} y escribiendo $u = v/p$, la ecuación para ε se transforma en:

$$\varepsilon = 2 \int_0^1 \frac{dv}{\sqrt{e^{4m(v-1)/p} - v^2}}, \tag{21}$$

que es la fórmula más cómoda para la desviación exacta.

En el caso del Sol, m y m/p son muy pequeños, de manera que se puede uno conformar con los primeros términos de la integración por serie.

$$\varepsilon = 2 \int_0^1 \frac{dv}{\sqrt{1 - v^2 - 4m(1-v)/p}} - 1$$

$$= 4 \operatorname{sen}^{-1} \tfrac{1}{2} (1 + m/p) - \pi \cong 4m/p.$$

El resultado es en primera aproximación:

$$\varepsilon = \frac{4m}{p} \tag{22}$$

que es idéntico al de Einstein.

7. *Corrimiento hacia el rojo de la luz del sol*

Surge ahora la pregunta: ¿qué resultado predirá la nueva teoría sobre la luz emitida desde el sol y observada en la tierra?

Para poder resolver este problema es necesario formular más claramente el concepto de fotón. Pensamos que el fotón es una partícula cuya velocidad es un poco menor que uno, no siendo necesario precisar su diferencia con esta velocidad límite. En la superficie del sol el fotón recorre una distancia dr en un intervalo de tiempo local:

$$ds_s = \frac{dr}{\sqrt{e^{2(m/r + C)} - 1}},$$

en donde r es el radio del sol y m es su masa. En la superficie de la tierra, la fórmula análoga es:

$$ds_T = \frac{dr}{\sqrt{e^{2(M/R+C)} - 1}},$$

en la que M es la masa de la tierra y R su radio.

La relación de tiempos locales es:

$$(23) \qquad \frac{ds_s}{ds_T} = \sqrt{\frac{e^{2(M/R+C)} - 1}{e^{2(m/r+C)} - 1}} \cong 1 - \left(\frac{m}{r} - \frac{M}{R}\right).$$

El significado de esta fórmula es que el fotón recorre la misma distancia dr, en un intervalo de tiempo local menor en el sol que en la tierra. Si consideramos el corrimiento de las rayas espectrales como debido a la relación de los tiempos locales ds_s, y ds_T, entonces nuestra teoría predice una desviación hacia el rojo, definida por (23). La fórmula correspondiente en la Teoría de la Relatividad General de Einstein es:

$$(24) \qquad \frac{ds_s}{ds_T} = \sqrt{\frac{1 - 2m/r}{1 - 2M/R}} \cong 1 - \left(\frac{m}{r} - \frac{M}{R}\right).$$

La Teoría de la Gravitación expuesta en este artículo explica satisfactoriamente los tres efectos cruciales de la Teoría de la Relatividad General, utilizando un aparato matemático más sencillo. Esta ventaja hace esperar que se puedan resolver en esta Teoría problemas que no ha sido posible atacar dentro de la propuesta por Einstein.