EL MOVIMIENTO DE LOS DOS CUERPOS EN LA TEORIA DE LA GRAVITACION DE BIRKHOFF

Por el Dr. Carlos Graef Fernández.

Birkhoff [1] utiliza en su teoría de la gravitación un espacio de Minkowsky con el siguiente cuadrado de la diferencial del arco:

$$(1) \qquad ds^2 = (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2 - (dx^4)^2;$$

x^1 es el tiempo; x^2, x^3, x^4 son las tres coordenadas cartesianas de un punto del espacio físico. El tensor métrico fundamental es, en este caso:

$$(2) \qquad g_{11} = 1, \quad g_{22} = g_{33} = g_{44} = -1,$$

$$g_{ij} = 0 \quad \text{cuando } i \neq j.$$

El tensor contravariante asociado tiene sus componentes exactamente iguales a las del tensor fundamental:

$$(3) \qquad g^{11} = 1, \quad g^{22} = g^{33} = g^{44} = -1,$$

$$g^{ij} = 0 \quad \text{cuando } i \neq j.$$

Utilizaremos aquí indistintamente (x^1, x^2, x^3, x^4) y (t, x, y, z) para las coordenadas de un acontecimiento en el espacio de Minkowsky.

Sean $m_{(1)}$, $m_{(2)}$, $m_{(3)}$, ... $m_{(n)}$, las masas de n partículas libres. Sean $x^i_{(a)}$ las coordenadas de la partícula de masa $m_{(a)}$, y sea $u^i_{(a)}$ el vector velocidad, en el espacio de Minkowsky, de esa partícula, para

$$i = 1, 2, 3, 4; \qquad a = 1, 2, 3, \ldots n.$$

(Escribiremos los índices no tensoriales entre paréntesis.)

Las componentes en el espacio de Minkowsky del vector fuerza que obra sobre la partícula $m_{(a)}$, son funciones cuadráticas homogéneas de las componentes del vector velocidad de esa partícula; los coeficientes de esas funciones dependen de un tensor simétrico $h_{ij}^{(a)}$ cuyas componentes son funciones de x^1, x^2, x^3, x^4.

Las componentes covariantes, en el espacio de Minkowsky, de la fuerza que urge a la partícula $m_{(a)}$, son las siguientes:

$$f_i^{(a)} = \left(\frac{\partial h_{ij}^{(a)}}{\partial x^k} - \frac{\partial h_{jk}^{(a)}}{\partial x^i} \right) u_{(a)}^j \; u_{(a)}^k \, . \tag{4}$$

El tensor simétrico se determina con las siguientes condiciones:

(i). El tensor $h_{ij}^{(a)}$ solamente tiene singularidades en los puntos de las líneas de universo de las partículas $m_{(b)}$, $b \neq a$, y la forma asintótica de $h_{ij}^{(a)}$ en la vecindad de una posición especial de la partícula $m_{(b)}$, $b \neq a$, y en un sistema de referencia en que $m_{(b)}$ esté en reposo, es:

$$\begin{pmatrix} \frac{m_{(b)}}{r_{(b)}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m_{(b)}}{r_{(b)}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m_{(b)}}{r_{(b)}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{m_{(b)}}{r_{(b)}} \end{pmatrix} , \tag{5}$$

en donde $r_{(b)}$ significa la distancia física, del punto en que se calcula el tensor, a la partícula $m_{(b)}$.

(ii). Todas las componentes de $h_{ij}^{(a)}$ en el punto P del espacio físico, tienden a cero, cuando la distancia física de P a $m_{(b)}$ tiende al infinito.

(iii). Todas las componentes de $h_{ij}^{(a)}$ satisfacen la ecuación de D'Alembert:

$$\square \; h_{ij}^{(a)} \equiv \frac{\partial h_{ij}^{(a)}}{\partial x^1} - \frac{\partial h_{ij}^{(a)}}{\partial x^2} - \frac{\partial h_{ij}^{(a)}}{\partial x^3} - \frac{\partial h_{ij}^{(a)}}{\partial x^4} = 0. \tag{6}$$

Las condiciones (i), (ii) y (iii) definen unívocamente al tensor $h_{ij}^{(a)}$ .as ecuaciones del movimiento de la partícula $m_{(a)}$ son, entonces:

$$f_{(a)}^{i} = m_{(a)} \frac{d^2 x_{(a)}^{i}}{ds^2} . \tag{7}$$

Para poder calcular los tensores $h_{ij}^{(1)}$ y $h_{ij}^{(2)}$ en el caso de los dos cuerpos, suponemos que existe un observador en un sistema de referencia inercial. Este observador es el que atribuye coordenadas a las partículas, y el que fija en qué instante una partícula tiene esas coordenadas.

El hecho de que las componentes del tensor h_{ij} satisfagan la ecuación de D'Alembert, se puede interpretar físicamente como sigue: la perturbación gravitacional debida a una partícula se propaga en el espacio físico con la velocidad de la luz, 1.

Imaginemos a una partícula de masa m describiendo una trayectoria cualquiera en el espacio físico. Supongamos que esa partícula provoca un efecto cualquiera que se propaga con la velocidad 1, y consideremos que se observa este efecto en el instante t en el punto Q (x, y, z). La posición de la partícula, de la cual partió el efecto que llega a Q en el instante t, se llama "posición efectiva de la partícula con respecto a Q para el instante t"; esta posición efectiva corresponde a un tiempo

$$\mathit{t} < \mathrm{t}.$$

El tiempo *t* en el que parte el efecto de la partícula que llega a Q en el instante t, se llama "tiempo retardado"; a cualquier magnitud física relacionada con la partícula, y calculada en Q en el instante t, para la posición que la partícula ocupaba en el instante *t* se le llama "magnitud retardada".

Denotamos a las magnitudes retardadas por la cursiva de la literal que las designa. En lo que sigue denotaremos a los vectores con mayúsculas.

Sea R, en el espacio físico, el vector de posición con origen en Q(x, y, z) de la partícula de masa m para el instante t, y sea r la distancia de Q a esa partícula.

$$| R | = r.$$

Insistimos aquí en que todas las coordenadas las mide un observador en 0, que se encuentra en un sistema inercial.

Sea V el vector velocidad de la partícula en el instante t; y sea U(t) una función cualquiera del tiempo t.

[U(t) puede ser cualquier función de las coordenadas de la partícula, o de las derivadas de esas coordenadas con respecto al tiempo.]

En la teoría de los potenciales retardados se demuestra que:

$$\square \frac{U(t)}{r - R \cdot V} = 0, \tag{8}$$

cualquiera que sea la función U(t); "$R \cdot V$" denota al producto escalar de los vectores R y V.

A la función U(t) se le exige que sea de clase C^2 en la región en que se opera.

La función que aquí nos interesa especialmente es:

$$\frac{\sqrt{1 - (v)^2}}{r - R \cdot V} \tag{9}$$

en la que v es la magnitud del vector velocidad V.

La función retardada

$$\frac{\sqrt{1 - (v)^2}}{r - R \cdot V} \tag{10}$$

satisface la ecuación de D'Alembert y tiene en la vecindad de $r = 0$ la forma asintótica siguiente:

$$\frac{\sqrt{1 - (v)^2}}{r - R \cdot V} \sim \frac{1}{r}. \tag{11}$$

Tenemos ahora todos los elementos necesarios para calcular el tensor h_{ij} debido a una partícula en movimiento.

Hagamos una transformación de Lorentz tal, que la partícula quede instantáneamente en reposo en el tiempo *t*, después de efectuada ésta. En el nuevo sistema de referencia, el tensor h_{ij} tendrá en el punto Q y en el instante t, las siguientes componentes:

$$(12) \qquad h_{ij} = \frac{m\sqrt{1-(v)^2}}{r - R \cdot V} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Este tensor satisface las condiciones (i), (ii) y (iii).

Las componentes del tensor h_{ij} en el sistema primitivo de referencia, se obtienen haciendo la transformación de Lorentz recíproca de la que se describió anteriormente; estas componentes son las siguientes:

$$(13) \qquad h_{ij} = \frac{m\sqrt{1-(v)^2}}{r - R \cdot V} \begin{bmatrix} \frac{1+(v)^2}{1-(v)^2} & -\frac{2v^1}{1-(v)^2} & -\frac{2v^2}{1-(v)^2} & -\frac{2v^3}{1-(v)^2} \\ -\frac{2v^1}{1-(v)^2} & 1+\frac{2(v^1)^2}{1-(v)^2} & \frac{2v^1v^2}{1-(v)^2} & \frac{2v^1v^3}{1-(v)^2} \\ -\frac{2v^2}{1-(v)^2} & \frac{2v^1v^2}{1-(v)^2} & 1+\frac{2(v^2)^2}{1-(v)^2} & \frac{2v^2v^3}{1-(v)^2} \\ -\frac{2v^3}{1-(v)^2} & \frac{2v^1v^3}{1-(v)^2} & \frac{2v^2v^3}{1-(v)^2} & 1+\frac{2(v^3)^2}{1-(v)^2} \end{bmatrix}$$

v^1, v^2, v^3 son las componentes físicas del vector velocidad; $(v)^2$ es el cuadrado de la magnitud del vector retardado de la velocidad, en el espacio físico.

Todas las componentes del tensor h_{ij} definido por (13) tienen la forma

$$\frac{U(t)}{r - R \cdot V}$$

y satisfacen por lo tanto las condiciones (i), (ii) y (iii).

En el caso de dos cuerpos siempre se puede elegir el sistema de referencia de manera que el movimiento se lleve a cabo en el plano xy.

Llamemos "x_1, y_1" a las coordenadas de la partícula de masa m_1, y "x_2, y_2" a las coordenadas de la partícula de masa m_2. Utilicemos un acento en una letra, para designar a la deriva con respecto al tiempo de la magnitud denotada por ella. Finalmente, despreciemos todas las expresiones de tercer grado, o de grado superior, en las componentes físicas del vector velocidad. El tensor $h_{ij}^{(1)}$, que es el que rige el movimiento de la primera partícula, está definido por la siguiente ecuación:

$$h_{ij}^{(1)} = m_2 \left[\frac{1}{r} - \frac{1}{2} \frac{[(x_1 - x_2)x'_2 + (y_1 - y_2)y'_2)]^2}{r^3} \right] A, \tag{14}$$

en la que $A = \begin{pmatrix} 1 + 2x'^2_2 + 2y'^2_2 & -2x'_2 & -2y'_2 \\ -2x'_2 & 1 + 2x'^2_2 & 2x'_2\, y'_2 \\ -2y'_2 & 2x'_2\, y'_2 & 1 + 2y'^2_2 \end{pmatrix}$

y

$$r = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Las magnitudes retardadas que intervienen en h_{ij} se expresaron en función de magnitudes no retardadas con auxilio del clásico desarrollo de Lagrange:

$$U(t) = \sum_0^\infty n \frac{(-)^n}{n!} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} \left[r^n \frac{du}{dt} \right] \tag{15}$$

$U(t)$ es una función del tiempo retardado t, calculada en Q (x, y, z) en el tiempo t. r es la distancia de Q a la partícula que provoca el efecto físico que se está considerando.

El tensor $h_{ij}^{(2)}$ se obtiene de la ecuación (14) permutando los índices 1 y 2.

El tensor $h_{ij}^{(1)}$ define inmediatamente las cuatro componentes covariantes de la fuerza $f_i^{(1)}$ en el espacio de Minkowsky. (Véase la ecuación (4).)

Las componentes contravariantes, que son las que intervienen en las ecuaciones del movimiento, están determinadas por:

$$f^i_{(1)} = g^{ij} f_j^{(1)}$$

En las ecuaciones del movimiento intervienen derivadas con respecto a la s del espacio de Minkowsky. Conviene transformar estas derivadas, en derivadas con respecto a t. De la ds^2 del espacio de Minkowsky se obtiene inmediatamente la siguiente ecuación operacional:

$$\frac{d}{ds} = \frac{1}{\sqrt{1 - x'^2 - y'^2}} \frac{d}{dt} \tag{16}$$

que permite transformar derivadas con respecto a s en derivadas con respecto a t.

Despreciando siempre las expresiones de tercer grado en las componentes de las velocidades físicas de los cuerpos, se obtiene la siguiente ecuación para x''_1:

$$\begin{aligned} \frac{x''_1}{m_2} = & - \frac{x_1 - x_2}{r^3} + \\ & + \left[\frac{3}{2} \frac{(x_1 - x_2)^3}{r^5} - \frac{x_1 - x_2}{r^3} \right] x'^2_2 + \\ & + \left[\frac{y_1 - y_2}{r^3} + \frac{3(x_1 - x_2)^2 (y_1 - y_2)}{r^5} \right] x'_2 y'_2 + \\ & + \left[\frac{3}{2} \frac{(y_1 - y_2)^2 (x_1 - x_2)}{r^5} - \frac{2(x_1 - x_2)}{r^3} \right] y'^2_2 + \\ & + \frac{x_1 - x_2}{r^3} x'^2_1 + \\ & + \frac{2(y_1 - y_2)}{r^3} x'_1 y'_1 - \\ & - \frac{x_1 - x_2}{r^3} x'_1 x'_2 - \\ & - \frac{x_1 - x_2}{r^3} y'^2_1 + \end{aligned} \tag{17}$$

$$+ \frac{x_1 - x_2}{r^3} x'_1 y'_2 -$$

$$- \frac{2(y_1 - y_2)}{r^3} y'_1 x'_2 +$$

$$+ \frac{4(x_1 - x_2)}{r^3} y'_1 y'_2 .$$

La ecuación que determina a y''_1 se obtiene de la anterior permutand las literales x, y. Las ecuaciones que determinan a x''_2, y''_2 se obtiene de las anteriores permutando los índices 1 y 2.

Hemos establecido entonces las ecuaciones diferenciales que rigen e movimiento de dos cuerpos de masas comparables; estas ecuaciones está aproximadas hasta el segundo grado en las componentes físicas de la velocidades.

Para obtener resultados que sean interpretables físicamente es con veniente introducir tres nuevas variables x, y, r, definidas por las ecua ciones:

$$\begin{aligned} x &= x_1 - x_2 \\ y &= y_1 - y_2 \\ r &= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}\,. \end{aligned} \tag{18}$$

x, y son en primera aproximación las coordenadas cartesianas de m_1 en un sistema anclado en m_2 y cuya dirección es invariante con respecto a un sistema inercial. r es en primera aproximación la distancia entre las dos partículas. La aceleración correspondiente a x es, entonces:

$$\begin{aligned} x'' = &- \frac{x}{r^3}(m_1 + m_2) + \\ &+ \left[\frac{3}{2} \frac{x^3}{r^5} m_2 + \frac{x}{r^3}(m_1 - m_2) \right] x'^2_2 + \\ &+ \left[\frac{y}{r^3}(m_1 + 2m_2) + \frac{3x^2y}{r^5} m_2 \right] x'_2 y'_2 + \end{aligned} \tag{19}$$

$$+\left[\frac{3}{2}\,\frac{xy^2}{r^5}\,m_2-\frac{x}{r^3}\,(m_1+2m_2)\right]y'^2_2+$$

$$+\left[\frac{3}{2}\,\frac{x^3}{r^5}\,m_1-\frac{x}{r^3}\,(m_1-m_2)\right]x'^2_1+$$

$$+\left[\frac{y}{r^3}\,(m_1+2m_2)+\frac{3x^2y}{r^5}\,m_1\right]x'_1\,y'_1+$$

$$+\left[\frac{3}{2}\,\frac{xy^2}{r^5}\,m_1-\frac{x}{r^3}\,(2m_1+m_2)\right]y'^2_1+$$

$$+\ \frac{x}{r^3}\,(m_1+m_2)\,x'_1\,x'_2-$$

$$-\ \frac{y}{r^3}\,(2m_1+m_2)\,x'_1\,y'_2-$$

$$-\ \frac{y}{r^3}\,(m_1+2m_2)\,y'_1\,x'_2+$$

$$+\ \frac{4x}{r^3}\,(m_1+m_2)\,y'_1\,y'_2.$$

La aceleración de y se obtiene substituyendo en la ecuación (19) x por y, y por x, en cada uno de los lugares en que aparecen estas literales.

El sistema formado por (19) y la ecuación correspondiente para y'', se puede integrar por el método de las perturbaciones. Supongamos que el movimiento de los dos cuerpos es Newtoniano en una primera aproximación. La ecuación correspondiente a (19) en la mecánica de Newton, es:

$$x''=-\frac{x}{r^3}\,(m_1+m_2). \tag{20}$$

Todos los términos del segundo miembro de (19) que no aparecen en (20), deben considerarse como términos perturbadores.

Las ecuaciones del movimiento no perturbado, o sea del movimiento Newtoniano, admiten el siguiente Lagrangiano:

$$(21) \qquad L = \tfrac{1}{2}(x'^2 + y'^2) + \frac{M}{r}; \quad (M = m_1 + m_2).$$

La ecuación (19) y la correspondiente para y'', son equivalentes a:

$$(22) \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial x'}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = Q_x,$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial y'}\right) - \frac{\partial L}{\partial y} = Q_y;$$

Q_x y Q_y son las sumas de todos los términos perturbadores en las ecuaciones correspondientes.

Conviene en este punto hacer la transformación de coordenadas clásica del movimiento de los dos cuerpos que se utiliza con tanta ventaja en la mecánica celeste, y que está definida por:

$$(23) \qquad \begin{aligned} x &= r\cos\vartheta \\ y &= r\,\mathrm{sen}\,\vartheta. \end{aligned}$$

El Lagrangiano para estas coordenadas es:

$$(24) \qquad L = \tfrac{1}{2}(r'^2 + r^2\vartheta'^2) + \frac{M}{r}.$$

L es el Lagrangiano del movimiento no perturbado.

Es necesario expresar los términos perturbadores en función de las nuevas coordenadas r y ϑ. Para calcular estos términos nos basta la aproximación Newtoniana:

$$(25) \qquad \begin{aligned} x_1 &= \lambda r\cos\vartheta, & y_1 &= \lambda r\,\mathrm{sen}\,\vartheta, \\ x_2 &= -\mu r\cos\vartheta, & y_2 &= -\mu r\,\mathrm{sen}\,\vartheta, \end{aligned}$$

$$\left(\lambda = \frac{m_2}{m_1 + m_2}; \qquad \mu = \frac{m_1}{m_1 + m_2}.\right)$$

Con las nuevas coordenadas r y ϑ las ecuaciones (22) se transforman en:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial r'}\right) - \frac{\partial L}{\partial r} = Q_r, \tag{26}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \vartheta'}\right) - \frac{\partial L}{\partial \vartheta} = Q_\vartheta .$$

Q_r y Q_ϑ se obtienen de la ecuación:

$$Q_x dx + Q_y dy = Q_r dr + Q\, d\vartheta. \tag{27}$$

Las ecuaciones del movimiento en r y ϑ adquieren la forman simple que sigue a continuación:

$$r'' - r\vartheta'^2 = -\frac{M}{r^2} + \alpha \frac{r'^2}{r^2} - \beta\vartheta'^2, \tag{28}$$

$$\frac{d}{dt}(r^2\vartheta') = \gamma r'\vartheta'$$

en las que:

$$\alpha = \frac{m_1^2 - 3/2\, m_1 m_2 + m_2^2}{m_1 + m_2},$$

$$\beta = \frac{m_1^2 + 5 m_1 m_2 + m_2^2}{m_1 + m_2},$$

$$\gamma = 2\, \frac{m_1^2 + m_1 m_2 + m_2^2}{m_1 + m_2}.$$

En las ecuaciones (28) los términos perturbadores son los que tienen por coeficientes a α, β y γ. La ecuación Newtoniana correspondiente a la segunda de las ecuaciones (28), tiene por integral a la ecuación que expresa la ley de la conservación del momento de la cantidad de movimiento:

$$r^2\vartheta' = h. \tag{29}$$

En el término perturbador $\gamma r'\vartheta'$ se puede substituir el valor de ϑ' calcu-lado de (29):

$$(30) \qquad \frac{d}{dt}(r^2\vartheta') = \gamma h \frac{r'}{r^2}.$$

La integral de la ecuación (30) es:

$$(31) \qquad r^2\vartheta' + \frac{\gamma h}{r} = C.$$

De la (29) y la (31) se obtiene:

$$(32) \qquad r(r+\gamma)\vartheta' = C.$$

Esta ecuación expresa una ley de conservación: en el movimiento de lc dos cuerpos se conserva invariante un producto de tres factores, que son la velocidad angular, la distancia entre los dos cuerpos, y la suma de es distancia y γ, siendo γ el doble de la diferencia entre la suma de las dc masas y el cociente del producto de las mismas y su suma.

De la ecuación (32) se obtienen:

$$(33) \qquad r^2\vartheta' = C - \gamma r\vartheta'$$

$$(34) \qquad r\vartheta' = \frac{C}{r} - \gamma\vartheta'.$$

Substituyendo $r\vartheta'$ de (34) en el término perturbador de (33) y despr ciando los términos en γ^2, se obtiene:

$$(35) \qquad r^2\vartheta' = C - \frac{\gamma C}{r}.$$

De la ecuación (35) se deduce inmediatamente una relación entre los op radores $d/d\vartheta$ y d/dt:

$$(36) \qquad \frac{d}{dt} = (Cu^2 - \gamma Cu^3)\frac{d}{d\vartheta},$$

en donde

$$u = \frac{1}{r}.$$

La ecuación diferencial de la trayectoria es entonces:

$$\frac{d^2u}{d\vartheta^2} + u = \frac{m_1 + m_2}{C^2} + 2\gamma \frac{m_1 + m_2}{C^2} u + (\gamma - \alpha) \left(\frac{du}{d\vartheta} \right)^2 + \beta u^2. \tag{37}$$

En el segundo miembro son términos perturbadores: el segundo, el tercero y el cuarto. La solución de la ecuación no perturbada es:

$$u_o = \frac{m_1 + m_2}{C^2} [1 + e \cos (\vartheta - \omega)]. \tag{38}$$

En esta solución e y ω son las dos constantes arbitrarias de la integración; e es la exentricidad de la órbita y ω la longitud del periastro. La solución u de la ecuación perturbada (37) es, entonces:

$$u = u_o + \Delta u. \tag{39}$$

$$u = \frac{m_1 + m_2}{C^2} \left\{ \begin{array}{l} 1 + \left\{ 2\gamma + \dfrac{e^2}{2} (\gamma - \alpha) + \beta \left(1 + \dfrac{e^2}{2} \right) \right\} \dfrac{m_1 + m_2}{C^2} \\ + e \cos (\vartheta - \omega) + \dfrac{m_1 + m_2}{C^2} (\gamma + \beta) e \vartheta \operatorname{sen} (\vartheta - \omega) \\ - \dfrac{(m_1 + m_2) e^2}{6C^2} (\alpha + \beta - \gamma) \cos \{2(\vartheta - \omega\}. \end{array} \right\} \tag{40}$$

El único término acumulativo en (40) es:

$$\frac{(m_1 + m_2)^2}{C^4} (\gamma + \beta) e \vartheta \operatorname{sen} (\vartheta - \omega).$$

Despreciando los términos no acumulativos, se obtiene:

(41)

$$u = \frac{m_1 + m_2}{C^2}\left\{1 + e\sqrt{1 + \frac{(m_1 + m_2)^2}{C^4}(\alpha + \beta)^2\vartheta^2}\cos(\vartheta - \omega - \Delta\omega)\right\}$$

$$\Delta\omega \cong (\gamma + \beta)\,\frac{m_1 + m_2}{C^2}\,\vartheta.$$

Substituyendo en $\Delta\omega$ los valores de γ y de β en función de las masas de los dos cuerpos, se obtiene:

$$\Delta\omega = \frac{3m_1^2 + 7m_1m_2 + 3m_2^2}{C^2}\,\vartheta. \tag{42}$$

Esta fórmula expresa el avance del periastro en la teoría de Birkhoff.

Introduciendo la distancia media a entre los dos astros, y la excentricidad e de la órbita, se obtiene:

$$\frac{\Delta\omega}{\vartheta} = \frac{3m_1^2 + 7m_1m_2 + 3m_2^2}{(m_1 + m_2)\,a\,(1 - e^2)}. \tag{43}$$

Cuando la masa de uno de los dos cuerpos, p. e. m_1, tiende a cero, la fórmula (43) expresa el avance del periastro en el problema de un cuerpo:

$$\lim_{m_1 \to 0} \frac{\Delta\omega}{\vartheta} = \frac{3m_2}{a(1 - e^2)}. \tag{44}$$

Cabe inmediatamente preguntarse si la fórmula del avance del periastro que establecimos más arriba, se realiza en la naturaleza. Existen numerosas estrellas binarias cuyo movimiento debe estar regido por las leyes del movimiento de los dos cuerpos. En muchos casos se ha observado un avance de la línea de los ápsides; desgraciadamente acontece, que en los pares en que es más fácil de observar este movimiento, que son aquellos en que la distancia media es pequeña, se produce un efecto de marea en las dos componentes del par, que produce una rotación rápida de la línea de los ápsides, que enmascara completamente el efecto que predice la fórmula (42). Este resultado sugiere, empero, un programa de observación que se refiere a la medición de elementos orbitales de binarias espectroscópicas cuyas componentes estén suficientemente alejadas para que no se produzca el efecto de marea.

Este trabajo fué desarrollado en el Instituto de Matemáticas de la Universidad Nacional Autónoma en los primeros meses de este año, durante la visita del doctor Birkhoff a nuestra Universidad. Quiero expresar aquí mi más profundo agradecimiento al doctor Birkhoff por haberme sugerido este problema de investigación, y por sus valiosas sugestiones y genial dirección.

N O T A :

1 *El Concepto Matemático del Tiempo y la Gravitación*, que se publica en este mismo número.