LA TEORIA DE LA GRAVITACION DE BIRKHOFF Y LA TEORIA DE EINSTEIN PARA CAMPOS DEBILES

Por Alberto Barajas.

Del Instituto de Matemáticas, Universidad Nacional de México. (El original en inglés de este artículo apareció en los *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America:* Vol. 30, No. 3, pp. 54-57. March, 1944.)

Recientemente, en la muy leída "Mathematical Reviews",[1] comenta Weyl la teoría de la gravitación de Birkhoff de 1942,[2] sugiriendo que se trata en esencia de una forma límite de la bien conocida teoría de Einstein de 1916, para campos débiles, caracterizada por Weyl como sigue: "Si se escriben las ecuaciones de la teoría de la gravitación de Einstein para g_{ik} que no difieran sino infinitesimalmente de los valores constantes δ_{ik} característicos del espacio-tiempo llano, $g_{ik} = \delta_{ik} + h_{ik}$, y se desprecian potencias superiores de h_{ik}, se obtiene una teoría con un tensor de gravitación simétrico h_{ik}, en un universo llano, que está casi completamente de acuerdo con la teoría original de Einstein en sus consecuencias fácticas." Me propongo demostrar que esta forma degenerada difiere radicalmente de la teoría de Birkhoff, además de no ser satisfactoria desde el punto de vista físico. Al hacerlo, me limitaré a campos gravitacionales en el espacio vacío.

El espacio-tiempo de Birkhoff es el mismo que el de Minkowski con $ds^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$. Su tensor gravitacional fundamental h_{ij} satisface la ecuación $\Box h_{ij} = 0$ en el espacio vacío, y las ecuaciones del movimiento de una partícula en un campo gravitacional arbitrario, son:

$$\frac{d^2x^i}{ds^2} = \delta^{pi}\left(\frac{\partial h_{jp}}{\partial x^k} - \frac{\partial h_{jk}}{\partial x^p}\right)u^j\, u^k,$$

donde $\delta^{pi} = 1$ para $p = i = 1$, $\delta^{pi} = -1$ para $p = i = 2, 3, 4$, cero en los casos y $u^i = dx^i/ds$.

En la teoría de la relatividad general de Einstein la forma cuadrática fundamental puede escribirse $ds^2 = (\delta_{ij} + H_{ij})\, dx^i\, dx^j$. Para campos débiles, se demuestra fácilmente que H_{ij} puede elegirse de modo que la ecuación gravitacional de Einstein $R_{ab} = 0$ se reduzca a $\Box H_{ij} = 0$[4]. Las ecuaciones del movimiento de una partícula libre son para este caso degenerado:

$$\frac{d^2x^i}{ds^2} = -\, g^{pi}\left(\frac{\partial H_{jp}}{\partial x^k} - \frac{1}{2}\,\frac{\partial H_{jk}}{\partial x^p}\right)u_j u^k.$$

En esta expresión ds es, por supuesto, el intervalo en un espacio-tiempo curvo, no la ds de Minkowski, aunque Weyl (*op. cit.*), considera a esta teoría degenerada referida a un "universo llano".

Si consideramos el campo estático debido a un punto-masa m, por razones de simetría, H_{ij} debe tener la forma ($r =$ distancia radial):

$$H_{ij} = \begin{Vmatrix} a/r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b/r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b/r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b/r \end{Vmatrix}$$

con $a = -2m$ para obtener el resultado Newtoniano clásico como primera aproximación. Comparemos ahora la teoría de Birkhoff y la de Einstein.

Teoría de Birkhoff

Espacio-tiempo llano:

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2.$$

Tensor gravitacional:

$$h_{ij} = \begin{Vmatrix} m/r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m/r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m/r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m/r \end{Vmatrix} \quad \text{con } \Box\, h_{ij} = 0.$$

Ecuaciones del movimiento de una partícula en el plano $z = 0$:

$$x'' = -\frac{mx}{r^3} - \frac{2mx}{r^3}(x'^2+y'^2) + \frac{mx'r'}{r^2},$$

$$y'' = -\frac{my}{r^3} - \frac{2my}{r^3}(x'^2+y'^2) + \frac{my'r'}{r^2}.$$

Avance del perihelio:

$$\frac{6\pi m}{a(1-e^2)}.$$

Desviación de los rayos luminosos:

$$\frac{4m}{p}.$$

Corrimiento hacia el rojo:[5]

$$\Delta\lambda/\lambda : \frac{m}{r}.$$

Forma degenerada de la teoría de Einstein:

Espacio-tiempo curvo:

$$ds^2 = (1-2m/r)\, dt^2 - (1 + b/r)\,(dx^2 + dy^2 + dz^2).$$

Tensor gravitacional:

$$H_{ij} = \begin{Vmatrix} -2m/r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b/r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b/r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b/r \end{Vmatrix}$$

Ecuaciones del movimiento de una partícula en el plano $z = 0$:

$$x'' \doteq -\frac{mx}{r^3} - \frac{bx'r'}{r^2} - \frac{(m-b/2)x}{r^3}(x'^2+y'^2),$$

$$y'' \doteq -\frac{my}{r^3} - \frac{by'r'}{r^2} - \frac{(m-b/2)y}{r^3}(x'^2+y'^2).$$

Avance del perihelio:

$$\frac{-3b+2m}{a(1-e^2)}\pi.$$

Desviación de los rayos luminosos:

$$\frac{2m-b}{p}.$$

Corrimiento hacia el rojo:

$$\Delta\lambda/\lambda : \frac{m}{r}.$$

De aquí se sigue que, para obtener el avance correcto del perihelio debe ponerse $b = -4m/3$ y para obtener la correcta desviación de la luz debe ponerse $b = -2m$, lo que es contradictorio.

El corrimiento hacia el rojo se explica en la teoría de Birkhoff como debido a la pérdida de energía del fotón al pasar del cuerpo que lo emite a la tierra. Sobre la base de esta interpretación, pero usando la forma degenerada de las ecuaciones, b tendría que anularse, $b = 0$, para tener el resultado correcto.

Por otro lado, en el espacio-tiempo llano de la forma degenerada de Einstein ¡el reloj atómico registraría tiempos imaginarios a distancias menores que 2m del punto-masa en el origen!

La introducción de dos constantes arbitrarias a y b no está de acuerdo con el espíritu de la teoría general de Einstein, una de cuyas principales ventajas es la eliminación de constantes arbitrarias. Además, si en el tensor de la energía $T^{ij} = \varrho u^i u^j - pg^{ij}$ se pone $p = 0$, de acuerdo con el hecho de que la energía potencial de presión es pequeña, como Einstein ha hecho, se sigue $b = 0$ necesariamente.

Debe subrayarse otra característica de la teoría de Birkhoff: las trayectorias de las partículas libres no son geodésicas en ningún espacio-tiempo curvo de cuatro dimensiones, esto es: no existe $d\sigma^2 = g_{ij}\, dx^i\, dx^j$ para la cual las trayectorias de Birkhoff sean geodésicas. En efecto, para los rayos de luz se tendría por un lado $d\sigma^2 = g_{ij}\, dx^i\, dx^j = 0$ y por otro $ds^2 = \delta_{ij}\, dx^i\, dx^j = 0$, de donde se seguiría $g_{ij} = k\, \delta_{ij}$, $k =$ constante. De otro modo podemos establecer así este resultado: las ecuaciones de las geodésicas en el $d\sigma$ — espacio, son:

$$u^p \left(\frac{d^2x^i}{ds^2} + \Gamma^i{}_{ab}\, u^a\, u^b \right) = u^i \left(\frac{d^2x^p}{ds^2} + \Gamma^p{}_{ab}\, u^a\, u^b \right).$$

Multiplicando por u_i y sumando con respecto a i, se obtiene:

$$u^p\, u^i\, \Gamma^i{}_{ab}\, u^a\, u^b = \frac{d^2x^p}{ds^2} + \Gamma^p{}_{ab}\, u^a\, u^b;$$

de donde

$$\frac{d^2x^p}{ds^2} = (u^p u_i\, \Gamma^i{}_{ab} - \Gamma^p{}_{ab})\, u^a u^b.$$

Ahora bien, las trayectorias de las partículas libres en la teoría de Birkhoff están dadas por:

$$\frac{d^2x^p}{ds^2} = \delta^{mp} \left(\frac{\partial h_{am}}{\partial x^b} - \frac{\partial h_{mb}}{\partial x^m} \right) u^a\, u^b;$$

por consiguiente se tendría idénticamente:

$$\delta^{mp} \left(\frac{\partial h_{am}}{\partial x^b} - \frac{\partial h_{ab}}{\partial x^m} \right) = u^p\, u_i\, \Gamma^i{}_{ab} - \Gamma^p{}_{ab}.$$

Pero el primer miembro de la ecuación es una función de t, x, y, z, solamente, mientras que el segundo lo es de t, x, y, z y u^k; por lo tanto los dos miembros no pueden ser idénticos a menos que $\Gamma^i_{ab} = 0$, caso trivial. Esto completa la demostración.[7]

1 *Mathematical Reviews*, 4, 285 (Nov. 1943).

2 Estos *Proceedings*, 29, 231 (1943).

3 Durante los dos últimos meses G. D. Birkhoff, Carlos Graef, Manuel Sandoval Vallarta y yo, hemos estado colaborando intensamente en el estudio de la teoría de la gravitación, materia y electricidad en espacio-tiempo llano, de Birkhoff y sus consecuencias. Esta nota debe mucho a nuestras discusiones.

4 Véase, por ejemplo, R. C. Tolman, *Relativity, Thermodynamics and Cosmology*, Oxford, 1934, p. 236.

5 Obtenida usando el fotón como portador de la luz. Todas las fórmulas se toman sólo en una primera aproximación.

6 Las componentes de u^i están ligadas por $\delta_{ij} u^i u^j = 1$.

7 De los otros comentarios de Weyl se ocupará separadamente Manuel Sandoval Vallarta.