

ASPECTOS FISICOS DE LA TEORIA DE LA GRAVITACION DE BIRKHOFF

Por Manuel Sandoval Vallarta.

Conferencia sustentada en Guanajuato,
el 25 de mayo de 1944, en ocasión de la
Segunda Asamblea Regional de la Socie-
dad Matemática Mexicana.

1º *Consideraciones generales*

Como la Teoría de la Gravitación de Birkhoff se presenta a nuestra consideración como una teoría física, es necesario, ante todo, recordar el criterio de verdad al que debe conformarse toda teoría de un fenómeno físico. A este respecto, hay lugar a distinguir entre el criterio de verdad a que debe conformarse una teoría matemática y aquel que debe cumplir una teoría física. Se dice que una teoría matemática es verdadera cuando está exenta de contradicciones internas. Para que se pueda afirmar lo propio de una teoría física es necesario que, además de estar exenta de contradicciones internas, es decir, además de reunir las condiciones de verdad de una teoría matemática, esté además de acuerdo con el experimento. Se sigue de aquí que en último análisis es el experimento el que deberá decidir sobre si la teoría de Birkhoff es aceptable o no. Hasta ahora no hay ningún experimento de naturaleza definitiva que venga a presentar una decisión en favor o en contra de dicha teoría. Sobran en la historia de la ciencia ejemplos de teorías que se quisieron aplicar a fenómenos físicos y que fueron desarrolladas con estricto rigor matemático que, sin embar-

go, han tenido que abandonarse por no estar conformes con el experimento.

Una teoría satisfactoria de un fenómeno físico parte por lo general de un modelo sencillo y bien definido que luego se estudia con suficiente rigor matemático hasta llegar a conclusiones que se pueden confrontar por medio del experimento. La teoría de Birkhoff no se separa de este camino clásico.

*2º Comparación entre las teorías de la gravitación
de Einstein y Birkhoff*

A continuación presentamos un cuadro sinóptico comparativo de las teorías de la gravitación de Einstein y de Birkhoff, que permite darse cuenta de los puntos de semejanza y de divergencia de las dos.

EINSTEIN	BIRKHOFF
—	—
1º Cuatro variables Gaussianas arbitrarias.	1º Cuatro variables de Lorentz-Minkowski.
2º Grupo fundamental: Transformaciones de cuatro funciones arbitrarias y de cuatro variables arbitrarias.	2º Grupo fundamental: Transformaciones de Lorentz con diez parámetros arbitrarios.
3º Significación física dudosa de las variables utilizadas.	3º Las variables tienen una significación física precisa: Las coordenadas del espacio y tiempo locales.
4º Espacio Riemanniano curvo.	4º Espacio plano de Minkowski.
5º Relatividad especial válida en una región pequeña del espacio-tiempo; más precisamente en el espacio plano tangente al espacio curvo.	5º Relatividad especial válida en todo el espacio-tiempo.
6º No hay sistema fundamental de referencia.	6º Hay un sistema fundamental de referencia de Lorentz.

EINSTEIN

BIRKHOFF

7º La materia determina la métrica del espacio.

7º La materia no determina la geometría del espacio.

8º Proporcionalidad entre masa inerte y masa gravitacional.

8º Proporcionalidad entre masa inerte y masa gravitacional.

9º Las ecuaciones mecánicas se deducen del principio de conservación de la energía y la cantidad de movimiento y son consecuencia de un teorema geométrico fundamental (teorema de Ricci).

9º Las ecuaciones mecánicas no se deducen de un teorema geométrico fundamental, pero se formulan con precisión en el espacio-tiempo.

Como consecuencia del uso de variables Gaussianas arbitrarias en la teoría de Einstein, el grupo fundamental es sumamente complicado y de allí se derivan muchas de las complicaciones inherentes de la teoría, a las que nos referiremos después.

Otra dificultad fundamental es la interpretación de la significación física de dichas variables, dificultad que es tan seria que ya indujo a Milne, antes de Birkhoff, a rechazarlas. También es consecuencia del uso de variables Gaussianas arbitrarias que el lenguaje natural para expresar la teoría de Einstein sea el de los tensores. Otra consecuencia del uso de estas variables es que no haya ningún sistema fundamental de referencia.

La relatividad general de Einstein tiene como teatro un espacio Riemanniano curvo. Las ecuaciones del campo

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R_{\mu\nu} = -8\pi T_{\mu\nu},$$

determinan la geometría del espacio-tiempo conociendo la distribución y la velocidad de la materia y de la energía dadas por el tensor de energía. Esta consecuencia ha sido siempre considerada como uno de los adelantos capitales de la teoría de Einstein, sobre todo desde el punto de vista filosófico.

Einstein fué el primero que, por medio de su famoso "principio de equivalencia" interpretó la proporcionalidad entre la masa inerte y la masa gravitacional que sus antecesores habían supuesto, pero no explicado. Como consecuencia el tensor de energía es lineal en la densidad de la materia.

En la teoría de Einstein el principio de conservación de la energía y de la cantidad de movimiento se deducen formalmente del teorema de Ricci, que dice que la divergencia del tensor de Riemann-Christoffel es idénticamente nula y de ahí se derivan a su vez las ecuaciones mecánicas del movimiento. La trayectoria de una partícula libre es una geodésica en el espacio curvo de Riemann. Hay que hacer resaltar, sin embargo, que el teorema de conservación de la energía y la cantidad del movimiento no se puede expresar con precisión en el espacio curvo porque las integrales cuadrimensionales de una derivada parcial covariante en el espacio-tiempo curvo no pueden transformarse en integrales tridimensionales.

En la teoría de Einstein la relatividad espacial es válida en una región suficientemente pequeña del espacio-tiempo o, hablando con más precisión, en el espacio plano tangente al espacio curvo. Naturalmente que el teorema de existencia de un espacio plano tangente a un espacio curvo se aplica de igual modo a la teoría de Einstein que a cualquiera otra.

La teoría de Birkhoff usa cuatro variables de Lorentz-Minkowski. El grupo fundamental es el de las transformaciones de Lorentz, es decir, el grupo de las rotaciones de un sistema de referencia de cuatro dimensiones que conservan invariante la forma métrica fundamental de Minkowski. Este grupo depende solamente de diez parámetros arbitrarios y como consecuencia es incomparablemente más sencillo que el grupo fundamental de la teoría de Einstein. Se sigue también de aquí que el lenguaje natural para formular la teoría de Birkhoff es el de los cuadvectores.

Para Birkhoff, lo mismo que para la mecánica clásica de Newton, hay un sistema de referencia fundamental; la única diferencia es que para el primero es el sistema de referencia fundamental de Lorentz, en tanto que para el segundo es el sistema de referencia Galileano. Mach ya demostró que, si existe un sistema inercial, entonces se pueden deducir de él una infinidad de sistemas de referencia inerciales aplicando la transformación Galileana.

En la teoría de Birkhoff lo mismo que en la de Einstein, la densidad de la materia interviene linealmente en el tensor de la energía, por consiguiente, la proporcionalidad entre la masa inerte y la masa gravitacional subsiste en la primera, aunque no haya en ésta el equivalente del "principio de equivalencia".

Por último, en la teoría de Birkhoff, aunque el teorema de conservación de la energía y la cantidad de movimiento no está relacionado con un teorema geométrico fundamental, sin embargo, las integrales tridimensio-

nales de conservación sí se pueden formular con precisión, puesto que no intervienen para nada las derivadas covariantes.

La materia no determina la geometría del espacio en la teoría de Birkhoff. La ecuación fundamental de la gravitación es:

$$\square h_{ij} = -8\pi T_{ij},$$

donde \square es el operador de D'Alembert, h_{ij} es el tensor del potencial gravitacional y T_{ij} es el tensor de la energía. Como demostró por primera vez Barajas, las trayectorias de una partícula libre en la teoría de Birkhoff no son geodésicas en ningún espacio de cuatro dimensiones.

En la teoría de Newton, para comparar, las ecuaciones fundamentales son, además de la de continuidad, la de Poisson y la del movimiento, de Newton.

Se sigue de aquí que el precio que hay que pagar para aceptar la teoría de Birkhoff es el de introducir un sistema de referencia fundamental de Lorentz y el de abandonar la relación entre la materia y la geometría. El precio que hay que pagar para aceptar la teoría de Einstein es el de introducir variables de significación física imprecisa y además admitir una teoría tan complicada que, a pesar de que a su desarrollo se han dedicado hasta ahora muchos de los más perspicuos talentos del mundo, no se han podido encontrar sino tres consecuencias comprobables por medio del experimento, en tanto que otros problemas, como el de dos cuerpos, no ha podido ser resuelto y el de n cuerpos ni siquiera ha podido ser planteado.

Desde el punto de vista de las velocidades de propagación, las teorías de Newton, Einstein y Birkhoff se pueden caracterizar por la siguiente tabla:

	NEWTON- MAXWELL	EINSTEIN	BIRKHOFF
Gravitación	Infinita	c	c
Campo electromagnético.	c	c	c
Materia	Arbitraria	Arbitraria	c

En esta tabla las velocidades consignadas se refieren a las de propagación de los campos correspondientes. En el caso del campo electromagnético se entiende el campo guía de los fotones y en el de la materia, la velocidad de propagación de una perturbación en la materia primordial

que sirve de sustentación a la carga eléctrica del electrón o protón. A esta materia primordial le ha dado Birkhoff el nombre de "fluido perfecto"

3º Comparación con el experimento

La teoría de Einstein conduce a predecir tres efectos fundamentales que son: el adelanto del perihelio, la desviación de la luz al pasar por el limbo del sol, y el corrimiento hacia el rojo de las rayas espectrales. La teoría de Birkhoff también conduce a los mismos resultados, pero la interpretación del tercero es enteramente distinta. En efecto, Einstein se concreta a comparar la frecuencia de dos fotones emitidos, uno en la superficie de un astro cualquiera y otro semejante en la superficie de la Tierra pero sin preocuparse para nada por lo que sucede al fotón en su viaje desde el astro hasta la Tierra. En la teoría de Birkhoff, como lo demostró por primera vez Graef, el corrimiento hacia el rojo se obtiene como consecuencia de que el fotón es atraído primero por el astro emisor y después por la Tierra. Su velocidad varía en consecuencia y por lo tanto, también su energía y su frecuencia, siempre que se admita la relación de Planck entre la primera y la segunda.

Graef ha logrado, además, plantear y resolver el problema de los dos cuerpos en la teoría de Birkhoff. El corrimiento del periastro está dado por la fórmula:

$$P = \frac{3m_1^2 + 7m_1m_2 + 3m_2^2}{m_1 + m_2} \cdot \frac{2\pi}{a(1-e^2)}$$

Ocurre inmediatamente comparar ésta con el adelanto del periastro observado en las estrellas dobles. Desgraciadamente esta comparación, que constituye un experimento crucial, no puede realizarse inmediatamente porque en los sistemas binarios en los que se conocen las masas y el adelanto de la línea de los ápsides, las dos componentes están tan cercanas que intervienen fuerzas de marea importantes que cubren el efecto buscado y cuya eliminación por medio del cálculo es punto menos que imposible. Por lo tanto se necesita buscar un sistema binario en que las componentes estén suficientemente separadas para que los efectos de la fuerza de marea no sean marcados, pero a la vez subsista el efecto gravitacional buscado.

El problema de n cuerpos también ha sido planteado por Graef y su resolución está ya a la vista. Indudablemente conducirá a otras comprobaciones experimentales, por ejemplo en el movimiento de la luna, considerando el sistema Sol-Tierra-Luna como los tres cuerpos.

Entre las generalizaciones posibles de la ecuación fundamental de la gravitación de Birkhoff, figura la siguiente:

$$\square h_{ij} = -8\pi T_{ij} + kg_{ij}.$$

El último término puede considerarse como el término cosmológico. De las soluciones de esta ecuación ya no puede exigirse que tiendan regularmente hacia cero al infinito, sino que cuando más tiendan regularmente al infinito hasta a lo más el segundo orden. La suposición más aceptable parece ser que el término cosmológico de los potenciales gravitacionales es de la forma:

$$h^*_{ij} = \frac{k}{8} (t^2 - x^2 - y^2 - z^2) g_{ij}.$$

Usando este término cosmológico se puede demostrar que las nebulosas extragalácticas tienen un movimiento de receso y, además, que se cumple la ley de Hubble de proporcionalidad entre la velocidad de receso y la distancia. Las consecuencias cosmológicas de la teoría, sin embargo, todavía no han sido suficientemente exploradas.

Como conclusión puede afirmarse que la teoría de Birkhoff promete conducir a consecuencias de importancia y que tiene que ser estudiada cuidadosamente para determinar finalmente su valor como teoría física.