HIPERSUPERFICIES CON ANCHO

Por Roberto Vázquez García.

1. *Sumario*

Entre las propiedades en grande de las curvas, figura la que consiste en que la curva tenga *ancho constante*. El concepto de anchura puede extenderse al caso de variedades sumergidas en un espacio euclidiano S_n, de n dimensiones. El objeto de este artículo es deducir las ecuaciones paramétricas de hipersuperficies S_{n-1} *no necesariamente convexas,* con ancho $2r$ definido según una dirección cualquiera de la normal a S_{n-1}, suponiendo que $2r$ sea una función derivable de los parámetros que determinan dicha dirección; en particular, cuando $2r$ es constante, resultan las ecuaciones paramétricas de hipersuperficies de ancho constante. En la parte final se mencionan algunas propiedades que se deducen fácilmente de los resultados precedentes.

2. En lo que sigue utilizaremos la convención de la suma, pudiendo tomar el índice i los valores $1, 2, \ldots, n$; los índices j, k podrán valer únicamente $1, 2, \ldots, n - 1$.

Una hipersuperficie S_{n-1} en el espacio euclidiano S_n, tiene ecuaciones de la forma

$$y^i = y^i\ (p_1, p_2, p_3, \ldots p_{n-1}) \tag{1}$$

donde $p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}$ son los $n - 1$ parámetros independientes. El vector unitario normal a S_{n-1}, tiene componentes N_i que satisfacen las relaciones:

$$\sum_{i=1}^{n} (N_i)^2 = 1 \tag{2}$$

$$N_i \frac{\partial y^i}{\partial p_j} = 0$$

La multiplicidad cuya ecuación es

$$a_i\, y^i = c, \tag{3}$$

siendo las a_i y la c constantes, se llama hiperplano de S_n. En este caso se deduce, utilizando (2), que

$$N_i = \frac{a_i}{\sqrt{\Sigma a^2_i}}$$

Se dice que dos hiperplanos son paralelos si las componentes de sus normales son respectivamente proporcionales.

El plano tangente a S_{n-1} en el punto P_1 (y^i_1) tiene por ecuación

$$M_i\, (y^i - y^i_1) = 0 \tag{4}$$

donde las M_i son proporcionales a las N_i de (2).

La distancia *d* del punto P_2 (y^i_2) al hiperplano (3) está dada por la fórmula

$$d = \frac{c - a_i\, y_2^i}{\sqrt{\Sigma a^2_i}} \tag{5}$$

3. *Definición de ancho de S_{n-1}, según una dirección τ.*

Dado el vector $(q_1, q_2, \ldots q_n)$, de dirección τ, supongamos que existe un par y solo uno, de puntos P_1 y P_2 de S_{n-1}, en los cuales las normales son paralelas a $(q_1, q_2, \ldots q_n)$. En estas condiciones diremos que S_{n-1} tiene ancho según τ, y que éste es igual a la distancia de P_2 al hiperplano tangente en P_1.

En el resto del artículo consideraremos únicamente hipersuperficies con ancho en toda dirección.

4. Tomemos en (1) como parámetros a las variables:

$$p_j = \frac{\partial y^n}{\partial y^j}$$

$$\therefore \frac{\partial y^n}{\partial p_j} = \frac{\partial y^n}{\partial y^k} \frac{\partial y^k}{\partial p_j} = p_k \frac{\partial y^k}{\partial p_j}$$

Si hacemos $p_n = -1$, tendremos

$$p_i \frac{\partial y_i}{\partial p_j} = 0; \tag{6}$$

esto es, el vector $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ es normal a S_{n-1}. Además

$$\frac{\partial}{\partial p_j}\left(p_i\, y^i\right) = p_i \frac{\partial y^i}{\partial p_j} + y^j = y^j \tag{7}$$

Por (4) la ecuación del hiperplano tangente en P_1 (y^i_1) es:

$$p_i\,(y^i - y^i_1) = 0;$$

$$\therefore p_i\, y^i = p_i\, y^i_1$$

Luego la distancia $2r$ del punto P_2 (y^i_2) a este hiperplano es, en vista de (5),

$$2r = \frac{p_i\, y^i_1 - p_i\, y^i_2}{\sqrt{\Sigma\, p^2_i}}$$

$$\therefore 2r \sqrt{\Sigma\, p^2_i} = p_i\, y^i_1 - p_i\, y^i_2$$

Derivando ambos miembros de esta ecuación, con respecto a $p_1, p_2, p_3 \ldots p_{n-1}$ se obtiene.

$$\frac{2r\,p_j}{\sqrt{\Sigma\,p_i^2}} + 2\frac{\partial r}{\partial p_j}\sqrt{\Sigma\,p_i^2} = p_i\frac{\partial y_1^i}{\partial p_j} - p_i\frac{\partial y_2^i}{\partial p_j} + y_1^j - y_2^j$$

y usando (6) se llega a

$$(8) \qquad y_1^j - y_2^j = \frac{2r\,p_j}{\sqrt{\Sigma\,p_i^2}} + 2\frac{\partial r}{\partial\,p_j}\sqrt{\Sigma\,p_i^2}$$

Ahora bien, por ser el vector $(p_1, p_2, \ldots p_n)$ normal a S_{n-1}, las y^i son funciones biformes de los parámetros $p_1, p_2, \ldots p_{n-1}$. Por esto podemos escribir

$$(y^j)^2 + 2u^j\,y^j + v^j = 0$$

siendo u^j y v^j funciones de $p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}$.

$$y_1^j = -u^j + \sqrt{(u^j)^2 - v^j}$$

$$y_2^j = -u^j - \sqrt{(u^j)^2 - v^j}$$

Por (8)

$$\sqrt{(u^j)^2 - v^j} = \frac{rp_j}{\sqrt{\Sigma\,p_i^2}} + \frac{\partial r}{\partial p_j}\sqrt{\Sigma\,p_i^2}$$

Luego la función biforme y^j queda expresada explícitamente en función de $p_1, p_2, \ldots p_{n-1}$ como

$$(9) \qquad y^j = \pm\frac{rp_j}{\sqrt{\Sigma\,p_i^2}} \pm \frac{\partial r}{\partial p_j}\sqrt{\Sigma\,p_i^2} - u^j.$$

Para obtener la expresión correspondiente a y^n integremos (7) con respecto a p_j:

$$(10) \qquad p_i y^i = \pm\, r\sqrt{\Sigma\,p_i^2} - \int u^j . dp_j$$

en donde $u^j.dp_j$ no representa una suma sino un simple producto. Por esta última igualdad se ve que $\int u^j.dp_j$ es independiente del valor particular dado a j; hagamos

$$U = \int u^j.\, dp_j$$

de donde $$\frac{\partial U}{\partial p_j} = u^j.$$

Introduciendo U en (10), tenemos

$$p_i\, y^i = \pm r \sqrt{\Sigma\, p_i^2} - U$$

Pero

$$p_i\, y^i = p_j\, y^j - y^n$$

y de (9)

$$p_j\, y^j = \pm \frac{r\,(\Sigma\, p_i^2 - 1)}{\sqrt{(\Sigma\, p_i^2)}} \pm p_j \frac{\partial r}{\partial p_j} \sqrt{\Sigma\, p_i^2} - p_j\, u^j$$

$$y^n = \mp \frac{r}{\sqrt{\Sigma\, p_i^2}} + U \pm p_j \frac{\partial r}{\partial\, p_j} \sqrt{\Sigma\, p_i^2} - p_j\, u^j$$

$$y^n = \pm \frac{r\, p_n}{\sqrt{\Sigma\, p_i^2}} + U - p_j \left(\frac{\partial U}{\partial p_j} \mp \frac{\partial r}{\partial p_j} \sqrt{\Sigma\, p_i^2} \right),$$

en donde el término final, el que contiene el paréntesis, representa la suma de productos que se obtiene dando a j los valores 1, 2, . . . , n — 1.

En consecuencia las ecuaciones paramétricas son:

$$y^j = \pm \frac{r\, p_j}{\sqrt{(\Sigma\, p_i^2)}} - \left(\frac{\partial U}{\partial p_j} \mp \frac{\partial r}{\partial p_j} \sqrt{\Sigma\, p_i^2} \right)$$

(11)

$$y^n = \pm \frac{r\, p_n}{\sqrt{\Sigma\, p_i^2}} + U - p_j \left(\frac{\partial U}{\partial p_j} \mp \frac{\partial r}{\partial p_j} \sqrt{p_i^2} \right)$$

en las cuales es $p_n = -1; -\infty < p_j < +\infty$.

Si $n = 2$, $y^1 = x$, $y^2 = y$, $p_1 = p$, se deduce para curvas planas:

$$x = \pm \frac{rp}{\sqrt{1+p^2}} - \left(\frac{dU}{dp} \mp \frac{dr}{dp} \sqrt{1+p^2} \right)$$

(11')

$$y = \mp \frac{r}{\sqrt{1+p^2}} + U - p \left(\frac{dU}{dp} \mp \frac{dr}{dp} \sqrt{1+p^2} \right).$$

Haciendo $r =$ constante, obtenemos las ecuaciones paramétricas de hipersuperficies y curvas planas de ancho constante:

(12)

$$y^j = \pm \frac{rp_j}{\sqrt{\Sigma\, p_i^2}} - \frac{\partial U}{\partial p_j}$$

$$y^n = \pm \frac{rp_n}{\sqrt{\Sigma p_i^2}} + U - p_j \frac{\partial U}{\partial p_j}.$$

(12')

$$x = \pm \frac{rp}{\sqrt{1+p^2}} - \frac{dU}{dp}$$

$$y = \mp \frac{r}{\sqrt{1+p^2}} + U - p \frac{dU}{dp}.$$

5. Veremos a continuación que es válido el recíproco del resultado anterior, o sea: toda hipersuperficie con ecuaciones de la forma (11) tiene ancho 2r en toda dirección.

De (11)

$$p_i\, y^i = \pm r \sqrt{\Sigma\, p_i^2} - U$$

$$p_i \frac{\partial y^i}{\partial p_j} + y^j = y^j$$

$$\therefore\ p_i \frac{\partial y^i}{\partial p_j} = 0.$$

Luego los parámetros en (11), junto con $p_n = -1$, determinan la dirección de la normal; por consiguiente en los puntos P_1, P_2, correspondientes al signo superior e inferior en (11), las normales son paralelas. Además la ecuación de hiperplano tangente en P_1 es

$$p_i\, Y^i = p_i\, y_1^i$$

donde y_1^i se obtiene de (11) tomando el signo superior. Por consiguiente la distancia de P_2 (y_2^i) a este hiperplano es

$$\frac{p_i\,(y_1^i - y_2^i)}{\sqrt{\Sigma\, p_i^2}} = \frac{2r\sqrt{\Sigma\, p_i^2}}{\sqrt{\Sigma\, p_i^2}} = 2r.$$

Es decir la hipersuperficie tiene ancho igual a 2r en toda dirección.

6. *Propiedades*

I. La proyección sobre cualquier hiperplano H_{n-1}, de una hipersuperficie S_{n-1} de la clase considerada, tiene un contorno σ_{n-2} con las características siguientes:

a) σ_{n-2}, inmergida en el espacio euclideo H_{n-1} tiene ancho en cualquier dirección.

b) Si P es punto de S_{n-1} que se proyecta en P', punto de σ_{n-2}, el ancho de S_{n-1} en P es igual al ancho de σ_{n-2} en P'.

Demostración

La forma de las ecuaciones (11) es independiente del sistema coordenado euclideano; luego podemos suponer que H_{n-1} es el plano coördenado de orden k. Por tanto si en un punto P de S_{n-1}, la normal es paralela a H_{n-1}, se tiene

$$p_k = 0.$$

Por otra parte σ_{n-2} es el conjunto de las proyecciones, sobre H_{n-1}, de los puntos de S_{n-1} para los cuales $p_k = 0$. En consecuencia las ecuaciones paramétricas de σ_{n-2} son

$$y^j = \pm \frac{r_o\, p_j}{\sqrt{\Sigma\, p_i^2}} - \left(\frac{\partial U_o}{\partial p_j} \mp \frac{\partial r_o}{\partial p_j} \sqrt{\Sigma\, p_i^2}\right)$$

$$y^n = \pm \frac{r_o\, p_n}{\sqrt{\Sigma\, p_i^2}} + U_o - p_j \left(\frac{\partial U_o}{\partial p_j} \pm \frac{\partial r_o}{\partial p_j} \sqrt{\Sigma\, p_i^2}\right)$$

donde i, j $\neq$ k.

$$r_o = r\ (p_1, \ldots, p_{k-1}, 0, p_{k+1}, \ldots, p_{n-1})$$

$$U_o = U\ (\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots).$$

Se ve pues, que σ_{n-2} posee las características mencionadas antes.

II. En toda hipersuperficie de ancho constante la recta que une puntos P_1 (y_1^i), P_2 (y_2^i), en los que los hiperplanos tangentes son paralelos, es normal en ambos puntos. Recíprocamente si la hipersuperficie es de ancho derivable y la recta $P_1 P_2$ es normal, aquella es de ancho constante. Es decir, esta propiedad caracteriza a las de ancho constante.

Demostración

Si r es constante, por (8) y la última de (12), tenemos

$$y_1^j - y_2^j = \frac{2r\ p_j}{\sqrt{\Sigma\, p_i^2}}$$

$$y_1^n - y_2^n = \frac{-2r}{\sqrt{\Sigma\, p_i^2}}$$

Por consiguiente, $P_1 P_2$ es normal a S_{n-1}.

Recíprocamente si $P_1 P_2$ es normal a S_{n-1}, tenemos

$$y_1^j - y_2^j = \frac{2r\; p_j}{\sqrt{\Sigma\, p_i^2}},$$

y por (8)

$$\frac{\partial r}{\partial p_j} = 0.$$

III. Si r es constante, a toda dirección principal en P_1 (y_1^i) le corresponde una dirección principal en P_2 (y_2^i) tal que

$$\varrho_1 + \varrho_2 = 2r,$$

donde ϱ_1, ϱ_2, son los radios de curvatura en esas direcciones principales.

Demostración

Sea P_1' un punto próximo a P_1 (y_1^i) tal que P_1 P_1' determine una dirección principal en P_1. Si P_2' es el corerspondiente a P_1' por la propiedad anterior P_1 P_2, P_1' P_2' son normales a la hipersuperficie. En consecuencia P_2 P_2' determina una dirección principal en P_2 y los centros de curvatura en tales direcciones, coinciden.

Designemos con m^i las coordenadas del centro de curvatura común y por ϱ_1, ϱ_2 los radios de curvatura correspondientes; se puede escribir

$$m^j = y_1^j - \frac{p_j}{\sqrt{\Sigma\, p_i^2}}\,\varrho_1$$

$$m^j = y_2^j - \frac{p_j}{\sqrt{\Sigma\, p_i^2}}\,\varrho_2$$

$$\therefore \frac{p_j}{\sqrt{\Sigma\, p_1^2}} \left(\varrho_1 + \varrho_2 \right) = y_1' - y_2' = \frac{2r\, p_j}{\sqrt{\Sigma\, p_1^2}}$$

empleando nuevamente (8).

$$\therefore \varrho_1 + \varrho_2 = 2r,$$

que es lo que se quería demostrar.

IV. Si la curva de ecuaciones (11′) es convexa, su perímetro L está dado por la fórmula

$$L = \int_0^\pi 2r\, d\tau$$

en donde 2r (τ) es el ancho en la dirección τ.

Demostración

Siendo τ la inclinación de la normal, tenemos

$$p = -\cot\tau \qquad (o \leq \tau \leq \pi)$$

Por consiguiente las ecuaciones (11′) se pueden escribir

$$(13)\qquad \begin{aligned} x &= \mp r \cos\tau \pm \frac{dr}{d\tau} \operatorname{sen}\tau - \frac{dU}{d\tau} \operatorname{sen}^2\tau \\ y &= \mp r \operatorname{sen}\tau \mp \frac{dr}{d\tau} \cos\tau + \frac{dU}{d\tau} \operatorname{sen}\tau \cos\tau + U. \end{aligned}$$

Sean x_1, y_1 las funciones de τ correspondientes al signo superior y x_2, y_2 las correspondientes al inferior. De esta manera la curva se divide en dos partes, siendo las ecuaciones de la primera de ellas las que se obtienen tomando el signo superior en (13) y para la segunda el signo inferior.

Si la curva es cerrada se debe tener:

$$y_1(\pi) = y_2(o)$$

de donde

$$r'(\pi) = r'(o) \tag{14}$$

siendo $r'(\tau) = \dfrac{dr}{d\tau}$.

Calculando la diferencial ds de arco de curva, se llega a

$$ds = \pm r\, d\tau \pm r''\, d\tau - \csc \tau\, d\,(U' \operatorname{sen}^2 \tau).$$

Si la curva es convexa, tenemos para los perímetros L_1, L_2 de las partes en que se ha dividido aquella:

$$L_1 = \int_o^\pi r\, d\tau + r'(\pi) - r'(o) - \int_o^\pi \csc \tau\, d\,(U' \operatorname{sen}^2 \tau).$$

$$L_2 = \int_o^\pi r\, d\tau + r'(\pi) - r'(o) + \int_o^\pi \csc \tau\, d\,(U' \operatorname{sen}^2 \tau)$$

Finalmente

$$L = L_1 + L_2 = \int_o^\pi 2r\, d\tau$$

en vista de (14).

México, D. F., enero de 1945.

Instituto de Matemáticas, U. N. A.