NOTA SOBRE LAS RAICES DE ALGUNAS ECUACIONES TRASCENDENTES

Por Manuel Sandoval Vallarta

En relación con ciertos problemas de física, el autor de la presente nota se ha visto obligado a encontrar las raíces de algunas ecuaciones trascendentes, que pueden ser de interés para otros investigadores.

Los ceros de las funciones del cilindro parabólico, Ψ_n

Las funciones del cilindro parabólico se definen así:

$$\Psi_n(x) = \frac{e^{-x^2/4}}{\sqrt{n!\sqrt{2\pi}}} H_n(x) \quad ,$$

donde $H_n(x)$ es el polinomio de Hermite de orden n. Las raíces, correctas a cuatro decimales, de las ecuaciones trascendentes $\Psi_n(x) = 0$, son las siguientes:

$\Psi_0(x) = 0$,	no tiene		
$\Psi_1(x) = 0$,	no tiene		
$\Psi_2(x) = 0$,	$x_1 = 1$		
$\Psi_3(x) = 0$,	$x_1 = 1.73205$.		
$\Psi_4(x) = 0$,	$x_1 = 0.74196$,	$x_2 = 2.33442$.	
$\Psi_5(x) = 0$,	$x_1 = 1.35563$,	$x_2 = 2.85696$,	
$\Psi_6(x) = 0$,	$x_1 = 0.61671$,	$x_2 = 1.88918$,	$x_3 = 3.32426$.
$\Psi_7(x) = 0$,	$x_1 = 1.15440$,	$x_2 = 2.36676$,	$x_3 = 3.75044$.

A la vez, las cantidades citadas son las raíces reales y positivas de las siguientes ecuaciones respectivamente:

$$x^2 - 1 = 0, \quad x^3 - 3x = 0, \quad x^4 - 6x^2 + 3 = 0, \quad x^5 - 10x^3 + 15x = 0,$$
$$x^6 - 15x^4 + 45x^2 - 15 = 0, \quad x^7 - 21x^5 + 105x^3 - 105x = 0,$$

Una raíz de la ecuación trascendente, $\Psi_4 = J_4$

La ecuación trascendente $\Psi_4\ (x) = J_4\ (x)$, donde $J_4\ (x)$ es la función de Bessel, tiene la primera raíz

$$x_1 = 0.7410.$$

Algunas raíces de la ecuación trascendente $Ci\ (x) = J_0\ (x)$

La ecuación trascendente ya citada tiene las dos primeras raíces

$$x_1 = 1.572, \qquad x_2 = 4.955.$$

La raíz de la ecuación trascendente $J_0\ (x) = M\ (1, 1/2, x)\ x$.

Si $M\ (1, 1/2, x)$ es la función hipergeométrica definida por $M\ (1, 1/2, x) = 1 + 2x + 4/3\ x^2 + 4/3\ 2/5\ x^3 + 4/3\ 2/5\ 2/7\ x^4 + \ldots$ la raíz única de la ecuación citada es $x = 0.43712$.

México, D. F., Dic. 1944.

Instituto de Física, U. N. A.