LA EXPANSION DEL UNIVERSO EN LA TEORIA DE BIRKHOFF

Por Carlos Graef Fernández

Presentado en el II Congreso Nacional de Matemáticas.

Birkhoff utiliza en su teoría de la gravitación un flúido en el que la velocidad de la onda de perturbación es igual a la velocidad de la luz. que a su vez es igual a uno en las unidades usadas. Si se considera la presión del flúido p como una función $f(\varrho)$ de la densidad ϱ, entonces la velocidad de la onda de perturbación es: (1)

$$V_0 = \sqrt{\frac{\frac{df}{d\varrho}}{1 - \frac{df}{d\varrho}}}.$$

Para V_0 igual a uno se obtiene:

$$\frac{df}{d\varrho} = \frac{1}{2}.$$

La integral de esta ecuación es:

$$f(\varrho) = \frac{1}{2}(\varrho) + \frac{K}{\pi}.$$

La presión del flúido de Birkhoff es entonces:

$$p = \frac{1}{2}\varrho + \frac{K}{\pi}.$$

Si la constante K, que llamaremos en este trabajo "constante cosmológica", se hace igual a cero, se obtiene un universo estable con fuerzas gravitacionales cuyos efectos han sido estudiados en detalle. [2], [3] y [4]

Birkhoff sugirió que se utilizara una constante K, diferente de cero y que se exploraran las condiciones del universo bajo esta hipótesis. [5]

En este trabajo estudiamos las consecuencias de suponer que la constante cosmológica K tiene un valor distinto de cero.

El tensor de la energía y las cantidades de movimiento es en general

$$T^{ij} = \varrho \frac{dx^i}{ds}\frac{dx^j}{ds} - p\,\Delta^{ij};$$

ds es aquí el elemento de arco de Minkowski definido por

$$ds^2 = \Delta_{ij}\, dx^i\, dx^j,$$

en donde:

$$\Delta_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Δ^{ij} es el tensor contravariante asociado al métrico fundamental Δ_{ij}, y en este caso:

$$\Delta^{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Como $p = \frac{1}{2}\varrho + \frac{K}{\pi}$, el tensor de la energía y las cantidades de movimiento tiene para nosotros la forma:

$$T^{ij} = \varrho \frac{dx^i}{ds}\frac{dx^j}{ds} - \left(\frac{1}{2}\varrho + \frac{K}{\pi}\right)\Delta^{ij}.$$

De la ecuación fundamental del tensor de las fuerzas gravitacionales[6] que es:

$$\Box\, h^{ij} = 8\pi\, T^{ij},$$

se obtiene:

$$\Box\, h^{ij} = 8\pi \left[\varrho \frac{dx^i}{ds}\frac{dx^j}{ds} - \left(\frac{1}{2}\varrho + \frac{K}{\pi}\right)\Delta^{ij}\right].$$

Llamando H^{ij} a la parte del tensor gravitacional h^{ij} que se debe al término cosmológico, podemos escribir

$$\square H^{ij} = -8 K \Delta^{ij}.$$

La solución de esta ecuación con derivadas parciales, que no tiene singularidades en ningún punto del espacio-tiempo de Minkowski y que es invariante en las transformaciones de Lorentz es:

$$H^{ij} = -K \Delta_{rs} (x^r - a^r) (x^s - a^s) \Delta^{ij}.$$

Usaremos por comodidad la anotación definida como sigue:

$$\begin{aligned} X^1 &= T = x^1 - a^1, \\ X^2 &= X = x^2 - a^2, \\ X^3 &= Y = x^3 - a^3, \\ X^4 &= Z = x^4 - a^4. \end{aligned}$$

Con estas formas de escribir, el tensor H^{ij} se expresa como sigue

$$H^{ij} = K (T^2 - X^2 - Y^2 - Z^2) \Delta^{ij},$$

$$H^{ij} = K \Delta_{rs} X^r X^s \Delta^{ij}.$$

Conviene observar que las componentes no idénticamente nulas del tensor H^{ij} tienden al infinito cuando una o varias de las coordenadas espaciales tienden al infinito en valor absoluto, permaneciendo finita la coordenada temporal; y también cuando la coordenada temporal tiene a infinito en valor absoluto permaneciendo finitas las coordenadas espaciales.

Las fuerzas cósmicas asociadas al tensor H^{ij} son:

$$f^1 = \frac{d^2T}{ds^2} = -2K \left[T \frac{dT}{ds} - X \frac{dX}{ds} - Y \frac{dY}{ds} - Z \frac{dZ}{ds} \right] \frac{dT}{ds} + 2KT,$$

$$f^2 = \frac{d^2X}{ds^2} = -2K \left[T \frac{dT}{ds} - X \frac{dX}{ds} - Y \frac{dY}{ds} - Z \frac{dZ}{ds} \right] \frac{dX}{ds} + 2KX,$$

$$f^3 = \frac{d^2Y}{ds^2} = -2K \left[T \frac{dT}{ds} - X \frac{dX}{ds} - Y \frac{dY}{ds} - Z \frac{dZ}{ds} \right] \frac{dY}{ds} + 2KY,$$

$$f^4 = \frac{d^2Z}{ds^2} = -2K \left[T \frac{dT}{ds} - X \frac{dX}{ds} - Y \frac{dY}{ds} - Z \frac{dZ}{ds} \right] \frac{dZ}{ds} + 2KZ.$$

De este sistema de ecuaciones diferenciales se deducen inmediatamente las integrales:

$$X^i \frac{dX^j}{ds} - X^j \frac{dX^i}{ds} = A^{ij}.\, e^{-K(T^2-X^2-Y^2-Z^2)},$$

$$i, j = 1, 2, 3, 4$$

en donde las A^{ij} son constantes de integración, y en donde

$$A^{ij} = - A^{ji}.$$

De las integrales anteriores se puede eliminar las primeras derivadas de las X^i, y se obtienen las cuatro ecuaciones:

$$A^{ij} X^k = A^{jk} X^i + A^{ki} X^j = 0,$$

$$i, j, k = 1, 2, 3, 4.$$

Para que este sistema de ecuaciones lineales y homogéneas tenga soluciones distintas de la trivial $X^i = 0$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ es condición necesaria que

$$\begin{vmatrix} 0 & A^{34} & A^{42} & A^{23} \\ A^{34} & 0 & A^{41} & A^{13} \\ A^{24} & A^{41} & 0 & A^{12} \\ A^{23} & A^{31} & A^{12} & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

De la identidad:

$$\begin{vmatrix} X^1 & X^2 & X^3 & X^4 \\ \frac{dX^1}{ds} & \frac{dX^2}{ds} & \frac{dX^3}{ds} & \frac{dX^4}{ds} \\ X^1 & X^2 & X^3 & X^4 \\ \frac{dX^1}{ds} & \frac{dX^2}{ds} & \frac{dX^3}{ds} & \frac{dX^4}{ds} \end{vmatrix} = 0,$$

se deduce que:

$$0 = \begin{vmatrix} X^1 & X^2 \\ \frac{dX^1}{ds} & \frac{dX^2}{ds} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} X^3 & X^4 \\ \frac{dX^3}{ds} & \frac{dX^4}{ds} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} X^1 & X^3 \\ \frac{dX^1}{ds} & \frac{dX^3}{ds} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} X^2 & X^4 \\ \frac{dX^2}{ds} & \frac{dX^4}{ds} \end{vmatrix},$$

$$+\begin{vmatrix} X^2 & X^3 \\ \dfrac{dX^1}{ds} & \dfrac{dX^4}{ds} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} X^1 & X^4 \\ \dfrac{dX^2}{ds} & \dfrac{dX^3}{ds} \end{vmatrix}$$

Esta identidad impone a las A^{ij} otra ecuación de condición, que es:

$$A^{12} A^{34} - A^{13} A^{24} + A^{14} A^{23} = 0.$$

Elíjanse las A^{ij} de manera que satisfagan las dos condiciones:

$$\begin{vmatrix} 0 & A^{34} & A^{42} & A^{23} \\ A^{34} & 0 & A^{41} & A^{13} \\ A^{24} & A^{41} & 0 & A^{12} \\ A^{23} & A^{31} & A^{12} & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

$$A^{12} A^{34} - A^{13} A^{24} + A^{14} A^{23} = 0$$

En este caso el rango de la matriz del determinante anterior es 2. Esto significa que dos de las coordenadas X^1, X^2, X^3, X^4 son funciones lineales de las otras dos.

Entonces siempre es posible expresar a dos de las coordenadas espaciales, v. g. y y z, como funciones lineales de la otra coordenada espacial, x, y de la coordenada temporal t. Las partículas urgidas exclusivamente por fuerzas cósmicas describen trayectorias rectilíneas en el espacio físico, y tienen líneas de universo planas en el espacio de Minkowski.

Si se elige el sistema de coordenadas de manera que el movimiento se ejecute a lo largo del eje de las equis, Y y Z son nulas, y las ecuaciones del movimiento son entonces:

$$\frac{d^2T}{ds^2} = -2K\left(T\frac{dT}{ds} - X\frac{dX}{ds}\right)\frac{dT}{ds} + 2KT,$$

$$\frac{d^2X}{ds^2} = -2K\left(T\frac{dT}{ds} - X\frac{dX}{ds}\right)\frac{dX}{ds} + 2KX.$$

Multiplicando la primera ecuación por T y la segunda por X, y restando miembro a miembro, se obtiene:

$$T\frac{d^2T}{ds^2} - X\frac{d^2X}{ds^2} = -2K\left(T\frac{dT}{ds} - X\frac{dX}{ds}\right)^2 + 2K\,(T^2 - X^2).$$

Definiendo una nueva función U:

$$U = T^2 - X'^2,$$

se obtiene:

$$\frac{d^2U}{ds^2} + K \left(\frac{dU}{ds}\right)^2 - 4\,KU - 2 = 0.$$

La solución general de esta ecuación es:

$$s = -1/2 \int \frac{dU}{\sqrt{C^2\,e^{-2KU} + U}}.$$

C es una de las constantes de integración y la otra es la constante arbitraria aditiva de la integral indefinida que aparece en el segundo miembro.

La solución obtenida permite calcular inmediatamente la velocidad de una partícula sujeta únicamente a las fuerzas cósmicas.

$$\frac{dx}{dt} = \frac{TX + Ce^{-KU}\sqrt{U^2 + C^2 e^{-2KU}}}{T^2 + C^2\,e^{-2UK}}.$$

Si se supone que la partícula estaba en el origen del tiempo $t = t_0$ en el lugar de $x = x_0$, entonces su velocidad era

$$\frac{dx}{dt} = C.$$

La constante de integración C es pues la velocidad de la partícula en el tiempo $t = t_0$.

Supongamos que del origen del tiempo $t = t_0$ han transcurrido una enorme cantidad de segundos, y que la velocidad de la partícula es mucho menor que la de la luz; esto se puede expresar simbólicamente como sigue:

$$t >>> t_0,$$

$$(t - t_0)^2 >>> (x - x_0)^2,$$

$$U >>> 0.$$

Si el valor de U es muy grande y si la constante cosmológica de Birkhoff es positiva entonces:

$$\frac{dx}{dt} \doteq \frac{x - x_0}{t - t_0}.$$

Suponiendo que en el origen del tiempo $t = t_0$ se encuentran varias partículas en la vecindad de un punto $x = x_0$, entonces tendrán, después de transcurrido el intervalo temporal $T = t - t_0$, velocidades $\frac{dx}{dt}$ proporcionales a sus distancias $X = x - x_0$ de ese punto.

La relación entre la velocidad de una partícula y su distancia es en este caso:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{T} X.$$

La distribución de galaxias en el universo obedece a esta ley. Si se coloca el punto $x = x_0$ en nuestra galaxia entonces $X = x - x_0$ significa la distancia de otra galaxia a la nuestra; $\frac{dx}{dt}$ es su velocidad de recesión y $\frac{1}{T}$ es la constante de Hubble. Es perfectamente lícito considerar que entre galaxias sólo operan las fuerzas cósmicas y que las fuerzas gravitacionales son despreciables. Entonces se llega de un modo inmediato a la conclusión que el recíproco de la constante de Hubble es el tiempo transcurrido desde t_0, en que las galaxias se encontraban en la vecindad del punto $x = x_0$ y el instante actual. A este intervalo se le llama la edad del universo. En nuestro caso se obtiene:

$$T = 1860 \cdot 10^6 \text{ años.}$$

Hay que señalar que según los resultados que hemos obtenido el corrimiento hacia el rojo observado por los astrónomos en los espectros de las galaxias lejanas se debe en parte a la velocidad de recesión de las mismas y en parte al efecto de las fuerzas cósmicas sobre los fotones durante el trayecto que éstos siguen de la galaxia lejana a la nuestra. Es muy fácil de calcular el efecto total de energía debido a las dos degradaciones que esta sufre. Estos resultados afectan a la distribución de la densidad de galaxias en la metagalaxia. Próximamente publicaremos las correcciones que hay que hacer a las densidades calculadas actualmente.

BIBLIOGRAFIA

(1) GEORGE D. BIRKHOFF.—*El Concepto Matemático de Tiempo y la Gravitación.* Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana. Vol. 1, Nos. 4 y 5, página 12.

(2) CARLOS GRAEF FERNÁNDEZ.—*El Movimiento de los Dos Cuerpos en la Teoría de Birkhoff.* Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana. Vol. 1, Nos. 4 y 5, páginas 25-41.

(3) ANTONIO ROMERO JUÁREZ.—*El Problema Restringido de los Tres Cuerpos en la Teoría de Birkhoff.* Trabajo hecho en el Instituto de Física de la Universidad Nacional Autónoma de México. (Inédito.)

(4) FERNANDO ALBA ANDRADE.—*El Campo Gravitacional de una Esfera en Rotación en la Teoría de Birkhoff.* Trabajo ejecutado en el Instituto de Física de la Universidad Nacional Autónoma de México. (Este número, pág. 57.)

(5) ALBERTO BARAJAS CELIS, GEORGE D. BIRKHOFF, CARLOS GRAEF FERNÁNDEZ Y MANUEL SANDOVAL VALLARTA.—*On Birkhoff's New Theory of Gravitation.* Physical Review, vol. 66, nos 5 y 6, páginas 138-143.

(6) GEORGE D. BIRKHOFF.—*Locus cictatus* (1), página 13. Ecuación (7).

México, D. F. mayo de 1945
Instituto de Matemáticas de la U. N. A.