SOBRE EL PRINCIPIO DE EQUIVALENCIA DE EINSTEIN

Por Alberto Barajas*

1.1 Supongamos que existe un observador en el espacio físico que asigna cuatro números reales a cada acontecimiento; estos números caracterizan el acontecimiento completamente y se llaman sus coordenadas (x^1, x^2, x^3, x^4). El continuo de todos los acontecimientos posibles se llama la multiplicidad del espacio-tiempo.

1.2 Suponemos además que el continuo espacio-tiempo es una multiplicidad riemanniana cuya métrica está definida por

$$ds^2 = g_{ij}\, dx^i\, dx^j \qquad i, j = 1, 2, 3, 4$$

En la teoría de la relatividad especial de Einstein y en la teoría de Birkhoff existen coordenadas tales que

$$ds^2 = (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2 - (dx^4)^2,$$

o bien

$$ds^2 = \Delta_{ij}\, dx^i\, dx^j$$

donde

$$\Delta_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

* Becario de la John Simon Guggenheim Memorial Foundation.

1.3 Una partícula móvil define un conjunto de acontecimientos, cada uno de los cuales consiste en el paso de la partícula por un punto del espacio físico en cierto instante. El conjunto de los acontecimientos correspondientes a una partícula móvil constituye su línea de universo.

La línea de universo de una partícula se parametriza por medio de

$$s = \int_F^P \sqrt{g_{ij}\, dx^i\, dx^j}$$

medido a partir de un punto fijo F elegido arbitrariamente sobre la línea.

Definimos el vector $\dfrac{dx^i}{ds}$ como la velocidad de la partícula y al pseudo-vector $\dfrac{d^2x^i}{ds^2}$ como su aceleración. (Nótese que mientras que $\dfrac{\delta}{\delta s}\dfrac{dx^i}{ds}$ es un vector, $\dfrac{d^2x^i}{ds^2}$ no lo es si las transformaciones de coordenadas no son afines.)

1.4 Consideremos un acontecimiento particular $E_0\,(x^1_0, x^2_0, x^3_0, x^4_0)$ y el conjunto de las líneas de universo posibles que pasan por E_0, de partículas urgidas exclusivamente por fuerzas gravitacionales.

El Principio de Equivalencia de Einstein afirma que en un campo puramente gravitacional siempre es posible encontrar una transformación de coordenadas:

$$y^i = y^i\,(x^1, x^2, x^3, x^4) \qquad i = 1, 2, 3, 4,$$

tal que las nuevas aceleraciones

$$\frac{d^2y^i}{ds^2}$$

se anulan en E_0. Es decir:

$$\left(\frac{d^2y^i}{ds^2}\right)_0 = 0$$

Así, esta ecuación rige para todas las líneas de universo posibles que pasan por E_0.

Dicho de otro modo: para un observador en E_0, convenientemente acelerado con respecto al sistema de las x, las partículas libres que pasan por E_0 no están aceleradas.

1.5 Expresemos las aceleraciones en el primitivo sistema (x^1, x^2, x^3, x^4) en términos de las aceleraciones y velocidades del nuevo sistema (y^1, y^2, y^3, y^4)

$$\frac{dx^i}{ds} = \frac{\partial x^i}{\partial y^j} \frac{dy^j}{ds}$$

$$\frac{d^2x^i}{ds^2} = \frac{\partial^2 x^i}{\partial y^j \partial y^k} \frac{dy^j}{ds} \frac{dy^k}{ds} + \frac{\partial x^i}{\partial y^j} \frac{d^2y^j}{ds^2}$$

Para el acontecimiento E_0 se tiene:

$$\left(\frac{d^2x^i}{ds^2}\right)_0 = \left(\frac{\partial^2 x^i}{\partial y^j \partial y^k}\right)_0 \left(\frac{dy^j}{ds}\right)_0 \left(\frac{dy^k}{ds}\right)_0$$

porque

$$\left(\frac{d^2y^j}{ds^2}\right)_0 = 0$$

Pero como

$$\frac{dy^j}{ds} = \frac{\partial y^j}{\partial x^m} \frac{dx^m}{ds}$$

resulta

$$\left(\frac{d^2x^i}{ds^2}\right)_0 = \left(\frac{\partial^2 x^i}{\partial y^j \partial y^k} \frac{\partial y^j}{\partial x^m} \frac{\partial y^k}{\partial x^n}\right)_0 \left(\frac{dx^m}{ds}\right)_0 \left(\frac{dx^n}{ds}\right)_0 .$$

Así, las componentes de la aceleración para cada trayectoria posible por E_0, son funciones cuadráticas y homogéneas de las componentes de la velocidad, siendo los coeficientes los mismos para todas las trayectorias. Estos coeficientes son:

$$\left(\frac{\partial^2 x^i}{\partial y^j \partial y^k} \frac{\partial y^j}{\partial x^m} \frac{\partial y^k}{\partial x^n}\right)_0 ;$$

Dependen naturalmente del acontecimiento E_0.

Una consecuencia del principio de equivalencia es por lo tanto que

$$\frac{d^2x^i}{ds^2} + B^{\,i}_{mn}\frac{dx^m}{ds}\frac{dx^n}{ds} = 0$$

es la relación entre la aceleración $\dfrac{d^2x^i}{ds^2}$ y la velocidad $\dfrac{dx^i}{ds}$; siendo los coeficientes $B^{\,i}_{mn}$ funciones de posición de (x^1, x^2, x^3, x^4) e independientes de la dirección de la línea de universo.

Puesto que esta relación vale para todos los sistemas de coordenadas primitivas se sigue que $B^{\,i}_{mn}$ es una conexión afín.

Para una transformación general de coordenadas

$$\bar{x}^i = \bar{x}^i\,(x^1, x^2, x^3, x^4) \qquad i = 1, 2, 3, 4,$$

tenemos:

$$\frac{d^2\bar{x}^i}{ds^2} + \bar{B}^{\,i}_{mn}\frac{d\bar{x}^m}{ds}\frac{d\bar{x}^n}{ds} = 0$$

donde

$$\bar{B}^{\,i}_{mn} = \frac{\partial\bar{x}^i}{\partial x^p}\frac{\partial x^q}{\partial\bar{x}^m}\frac{\partial x^r}{\partial\bar{x}^n}B^{\,p}_{qr} + \frac{\partial^2 x^p}{\partial\bar{x}^m\,\partial\bar{x}^n}\frac{\partial\bar{x}^i}{\partial x^p}.$$

1.6 Sea $B^{\,i}_{jk}$ una conexión afín definida en una región R del espacio-tiempo. Tenemos entonces para una transformación de coordenadas cualquiera

$$\bar{x}^i = \bar{x}^i\,(x^1, x^2, x^3, x^4) \qquad i = 1, 2, 3, 4$$

$$\bar{B}^{\,i}_{jk} = \frac{\partial\bar{x}^i}{\partial x^p}\frac{\partial x^q}{\partial\bar{x}^j}\frac{\partial x^r}{\partial\bar{x}^k}B^{\,p}_{qr} + \frac{\partial^2 x^p}{\partial\bar{x}^j\,\partial\bar{x}^k}\frac{\partial\bar{x}^i}{\partial x^p}$$

Las ecuaciones diferenciales

$$\frac{d^2x^i}{ds^2} + B^{\,i}_{jk}\frac{dx^j}{ds}\frac{dx^k}{ds} = 0$$

definen una familia de senderos en la misma región R.

Sea E_0 $(x_0^1, x_0^2, x_0^3, x_0^4)$ un acontecimiento arbitrario de R. Indiquemos con un índice cero el valor de cualquier función en E_0.

Demostraremos que siempre existe una transformación de coordenadas

$$\bar{x}^i = \bar{x}^i (x^1, x^2, x^3, x^4),$$

en E_0, que transforma las ecuaciones diferenciales de los senderos en

$$\left(\frac{d^2 x^i}{ds^2}\right)_0 = 0$$

Dicha transformación está dada por las ecuaciones

$$x^i = x_0^i + \bar{x}^i - 1/2 \, (B^i_{\alpha\beta})_0 \, \bar{x}^\alpha \bar{x}^\beta$$

Calculemos las componentes transformadas de la conexión afín:

$$\bar{B}^i_{jk} = \left[\frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^j} \frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^k} B^l_{\alpha\beta} + \frac{\partial^2 x^l}{\partial \bar{x}^j \partial \bar{x}^k}\right] \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^l}$$

Para E_0 tenemos:

$$(\bar{B}^i_{jk})_0 = \left[\frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^j} \frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^k} B^l_{\alpha\beta} + \frac{\partial^2 x^l}{\partial \bar{x}^j \partial \bar{x}^k}\right]_0 \left(\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^l}\right)_0$$

En cualquier acontecimiento de R tenemos:

$$\frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^j} = \delta^\alpha_\beta - (B^\alpha_{mj})_0 \, \bar{x}^m$$

$$\frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial \bar{x}^j \partial \bar{x}^k} = - (B^\alpha_{kj})_0$$

Puesto que $(\bar{x}^i)_0 = 0$, tenemos

$$\left(\frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^j}\right)_0 = \delta^\alpha_j$$

$$\left(\frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial \bar{x}^j \partial \bar{x}^k}\right)_0 = - (B^\alpha_{jk})_0$$

Por lo tanto

$$(\bar{B}^{i}_{jk})_0 = \left[\delta^{\alpha}_{j}\,\delta^{\beta}_{k}\,(B^{l}_{\alpha\beta})_0 - (B^{l}_{jk})_0\right]\left(\frac{d\bar{x}^{i}}{dx^{l}}\right)_0$$

y finalmente:

$$(\bar{B}^{i}_{jk})_0 = 0$$

Quiere decir que las ecuaciones diferenciales de los senderos

$$\frac{d^2x^i}{ds^2} + B^{i}_{jk}\frac{dx^{j}}{ds}\frac{dx^{k}}{ds} = 0$$

se reducen en E_0 a

$$\left(\frac{d^2\bar{x}^i}{ds^2}\right)_0 = 0.$$

El Principio de Equivalencia de Einstein puede expresarse por consiguiente de este modo:

Las líneas de universo de las partículas urgidas exclusivamente por fuerzas gravitacionales son senderos.

En la teoría de Birkhoff las ecuaciones diferenciales del movimiento de una partícula en un campo gravitacional son:

$$\frac{d^2x^i}{ds^2} = \Delta^{ip}\left(\frac{\partial h_{pa}}{\partial x^b} - \frac{\partial h_{ab}}{\partial x^p}\right)u^a\,u^b;$$

por lo expuesto anteriormente se ve que el principio de equivalencia es válido en la teoría de la gravitación de Birkhoff.

Instituto de Matemáticas, U. N. A.