CAMPOS GRAVITACIONALES DE CUERPOS EN ROTACION

Por Fernando Alba Andrade

Si un anillo de sección unitaria y densidad $\varrho_0 =$ const. gira alrededor del eje "z" en el plano "x o y", los potenciales gravitacionales estarán sujetos a la ecuación de Birkhoff

$$\Box\, h_{ij} = 8\pi\, T_{ij} \tag{1}$$

en donde $\Box$ es el operador de D'Alembert y T_{ij} el tensor de la energía de la materia.

En el espacio vacío $T_{ij} = 0$, y por ser la solución evidentemente independiente del tiempo, la ecuación (1) se reduce a

$$\nabla^2 h_{ij} = 0 \tag{2}$$

La solución es también evidentemente independiente del ángulo "φ", y sólo será función de "ϑ" y "r".

En coordenadas esféricas, la ecuación (2) se transforma en .

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial h_{ij}}{\partial r}\right) + \frac{1}{\operatorname{sen}\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\operatorname{sen}\vartheta \frac{\partial h_{ij}}{\partial\vartheta}\right) = 0 \tag{3}$$

Si el radio del anillo lo designamos por "a", la solución de (3) para $r>a$, estará dada por

$$h_{ij} = \frac{B_{ij}}{r} P_0(\cos\vartheta) + \frac{B_{ij}}{r^2} P_1(\cos\vartheta) + \frac{B_{ij}}{r^3} P_2(\cos\vartheta) + \ldots \tag{4}$$

en donde "$P_n(\cos\vartheta)$" es el polinomio de Legendre de orden "n".

Para el eje "z", $\cos \vartheta = \pm 1$ y $P_n(\cos\vartheta) = (\pm 1)^n$ y la ecuación (4) se transformará en

$$h_{ij} = \sum_n B^n_{ij}\, r^{-n-1}\, P_n(\cos \vartheta)$$

$$h_{ij} = \sum_n B^n_{ij}\, z^{-n-1}$$

pues para el eje "z", $z = \pm r$.

Para determinar los coeficientes B_{ij}, necesitamos pues conocer el valor de h_{ij} sobre el eje "z".

Los potenciales $h_{ij}{}^*$ producidos por una partícula de masa m y velocidad V, están dados por

$$h_{ij}{}^* = \frac{m\sqrt{1-(\bar{v})^2}}{|\bar{R}| - \bar{R}\cdot\bar{V}} \begin{bmatrix} \dfrac{1+(\bar{v})^2}{1-(\bar{v})^2} & -\dfrac{2\bar{v}^1}{1-(\bar{v})^2} & -\dfrac{2\bar{v}^2}{1-(\bar{v})^2} & -\dfrac{2\bar{v}^3}{1-(\bar{v})^2} \\ -\dfrac{2\bar{v}^1}{1-(\bar{v})^2} & 1+\dfrac{2(\bar{v}')^2}{1-(\bar{v})^2} & \dfrac{2\bar{v}^1\bar{v}^2}{1-(\bar{v})^2} & \dfrac{2\bar{v}^1\bar{v}^3}{1-(\bar{v})^2} \\ -\dfrac{2\bar{v}^2}{1-(\bar{v})^2} & \dfrac{2\bar{v}^1\bar{v}^2}{1-(\bar{v})^2} & 1+\dfrac{2(\bar{v}^2)^2}{1-(\bar{v})^2} & \dfrac{2\bar{v}^2\bar{v}^3}{1-(\bar{v})^2} \\ -\dfrac{2\bar{v}^3}{1-(\bar{v})^2} & \dfrac{2\bar{v}^1\bar{v}^3}{1-(\bar{v})^2} & \dfrac{2\bar{v}^2\bar{v}^3}{1-(\bar{v})^2} & 1+\dfrac{2(\bar{v}^3)^2}{1-(\bar{v})^2} \end{bmatrix} \tag{6}$$

En donde $|V| = v$, y $\bar{v}$, $\bar{R}$, $\bar{V}$, significan que son cantidades retardadas.

R es el vector de posición de la partícula, medido desde el punto en que se calcula el potencial.

En nuestro problema $|R|$ es constante, para un punto del eje "z" y no tenemos que considerar cantidades retardadas, además $R \cdot V = 0$ y $v^3 = 0$.

Los potenciales h_{ij} de todo anillo para un punto del eje "z" serán

$$h_{ij} = \frac{\sqrt{1-(v)^2}\, a\, \varrho_0}{|R|} \int_0^{2\pi} d\varphi \begin{pmatrix} \frac{1+(v)^2}{1-(v)^2} & -\frac{2v^1}{1-(v)^2} & -\frac{2v^2}{1-(v)^2} & 0 \\ -\frac{2v^1}{1-(v)^2} & 1+\frac{2(v^1)^2}{1-(v)^2} & \frac{2v^1v^2}{1-(v)^2} & 0 \\ -\frac{2v^2}{1-(v)^2} & \frac{2v^1v^2}{1-(v)^2} & 1+\frac{2(v^2)^2}{1-(v)^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (7)$$

Si el anillo gira en sentido directo $v^1 = -v \operatorname{sen} \varphi$; $v^2 = v \cos \varphi$

Efectuando las integraciones tendremos:

$$h_{ij} = \frac{m\sqrt{1-(v)^2}}{|R|} \begin{pmatrix} \frac{1+(v)^2}{1-(v)^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1+\frac{(v)^2}{1-(v)^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1+\frac{(v)^2}{1-(v)^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (8)$$

En este caso $R = \sqrt{a^2+z^2}$

$$\therefore \frac{1}{|R|} = \frac{1}{z}\left(1 - \frac{1}{2}\frac{a^2}{z^2} + \frac{1\cdot3}{2\cdot4}\frac{a^4}{z^4} - \frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\frac{a^6}{z^6} + \dots\right)$$

Esta ecuación nos define pues las constantes B_{ij} y nuestra solución (4) de h_{ij} para un punto cualquiera del espacio producido por el anillo, será:

$$h_{ij} = \frac{m}{r}\left(1 - \frac{1}{2}\frac{a^2}{r^2} P_2(\cos\vartheta) + \frac{a^4}{r^4}\frac{1\cdot3}{2\cdot4} P_4(\cos\vartheta) - \dots\right) A_{ij} \quad (9)$$

$$\text{en donde } A_{ij} = \begin{bmatrix} \frac{1+(v)^2}{1-(v)^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1+\frac{(v)^2}{1-(v)^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1+\frac{(v)^2}{1-(v)^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Vemos de lo anterior que $h_{ij} = 0$ para $i \neq j$

Despreciando potencias de la velocidad superiores a $(v)^2$ y teniendo en cuenta que

$$(v)^2 = \omega^2 a^2$$

$$A_{ij} = \begin{bmatrix} 1+\frac{3}{2}\omega^2 a^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1+\frac{1}{2}\omega^2 a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1+\frac{1}{2}\omega^2 a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (10)$$

Si nos interesan los potenciales en el plano "x o y" tendremos que:

$$h_{ij} = \frac{m}{r}\left(1 + \frac{1}{4}\frac{a^2}{r^2} + \frac{3}{8}\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{a^4}{r^4} + \ldots\right) A_{ij}$$

Para calcular los potenciales producidos por un disco en rotación de densidad variable $\varrho = \varrho\,(a)$ de espesor unitario en el plano "x o y" tendremos:

$$H_{ij} = \int_0^{a_0} \frac{2\pi\varrho a}{r}\left(1 + \frac{1}{4}\frac{a^2}{r^2} + \frac{3}{8}\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{a^4}{r^4} + \ldots\right) A_{ij}\, da \quad (11)$$

Como una esfera en rotación cuya densidad sea una función del radio, a grandes distancias de esta y en su plano ecuatorial, puede considerarse como un disco de densidad $\varrho = \varrho(a)$; la ecuación anterior, para el caso de una esfera de densidad constante ϱ_0, corresponderá una densidad en el disco, dada por $\varrho = 2\varrho_0 \sqrt{a_0^2 - a^2}$ en donde a_0 es el radio de la esfera.

Sustituyendo este valor en la ecuación (11) tendremos:

$$H_{11} = \frac{m}{r} + \frac{6\omega^2 \pi \varrho_0}{r} \cdot \int_0^{a_0} \sqrt{a_0^2 - a^2} \; a^3 \, d\, a + \ldots$$

$$H_{11} = \frac{M}{r} + \frac{3M\omega^2 a_0^2}{5r} + \ldots \tag{12}$$

En forma análoga

$$H_{22} = H_{33} = \frac{M}{r} + \frac{M\omega^2 a_0^2}{5r} \tag{13}$$

$$H_{44} = \frac{M}{r} \tag{14}$$

En la teoría de Birkhoff, las fuerzas quedan definidas por

$$f_1 = \left(\frac{\partial H_{1a}}{\partial x^b} - \frac{\partial H_{ab}}{\partial x^1} \right) u^a u^b \tag{15}$$

para f_2 tendremos:

$$f_2 = \frac{\partial H_{22}}{\partial x^b} u^2 u^b - \frac{\partial H_{11}}{\partial x^2} (u')^2 - \frac{\partial H_{44}}{\partial x^2} (u^4)^2 - \frac{\partial H_{22}}{\partial x^2} [(u^2)^2 + (u^3)^2]$$

Sustituyendo los valores dados por las ecuaciones (12), (13) y (14) obtendremos:

$$f_2 = \frac{-Mu^2}{r^3} \left(x^2 u^2 + x^3 u^3 + x^4 u^4 \right)$$

$$+\frac{Mx^2}{r^3}\left[(u')^2+(u^2)^2+(u^3)^2+(u^4)^2\right]$$

$$-\frac{M\,\alpha''\,u^2}{r^3}(x^2\,u^2+x^3\,u^3+x^4\,u^4)$$

$$+\frac{M\,\alpha'\,x^2}{r^3}(u')^2+\frac{M\,\alpha''\,x^2}{r^3}\left[(u^2)^2+(u^3)^2\right] \tag{16}$$

En donde

$$\alpha'=\frac{3\,\omega^2\,a_o^2}{5}$$

$$\alpha''=\frac{\omega^2\,a_o^2}{5} \tag{17}$$

Sustituyendo x, y, z por x^2, x^3, x^4 y u^2, u^3, u^4 por x', y', z' que nos indican derivadas respecto a "s", tendremos para $z=0$, $z'=0$.

$$\left.\begin{aligned}
F^x=-f_2=x''=&-\frac{Mx}{r^3}-\frac{2Mx}{r^3}(x'^2+y'^2)+\frac{Mx'\,r'}{r^2}\\
&+\frac{M\alpha''\,x'\,r'}{r^2}-\frac{M\,\alpha'\,x}{r^3}-\frac{M\,\alpha'\,x}{r^3}(x'^2+y'^2)\\
&-\frac{M\,\alpha''\,x}{r^3}(x'^2+y'^2)\\
y''=&-\frac{My}{r^3}-\frac{2My}{r^3}(x'^2+y'^2)+\frac{M\,y'\,r'}{r^2}\\
&+\frac{M\alpha''\,x'\,r'}{r^2}-\frac{M\,\alpha'\,x}{r^3}-\frac{M\,\alpha'\,x}{r^3}(x'^2+y'^2)\\
&-\frac{M\,\alpha''\,x}{r^3}(x'^2+y'^2)
\end{aligned}\right\} \tag{18}$$

Estas son las ecuaciones de movimiento de una partícula en el campo de una esfera de densidad constante que gira con velocidad angular ω.

Deseo expresar mi sincero agradecimiento al doctor Carlos Graef Fernández, Director del Instituto de Física, de la Universidad Nacional Autónoma de México, por haberme propuesto el problema y hacerme importantes sugestiones.

BIBLIOGRAFIA

G. D. BIRKHOFF.—*El Concepto Matemático del Tiempo y la Gravitación.* Boletín de la S. M. M., vol. I, Nº 4 y 5.

C. GRAEF FERNÁNDEZ.—*El Movimiento de los Dos Cuerpos en la Teoría de la Gravitación de Birkhoff.* B. de la S. M. M., vol. I, Nº 4 y 5.

BATEMAN.—*Partial Differential Equations of Mathematical Physics.*

INSTITUTO DE FISICA DE LA U. N. A.