EL NUMERO CARDINAL DE LOS CONTINUOS LINEALES HOMOGENEOS COMPLETOS *

Por R. Vázquez García y
F. Zubierta Russi.

1. *Introducción.* Se conocen ejemplos de continuos lineales homogéneos [1] tanto completos como no completos. En este artículo se demuestra que la cualidad de ser completo [2] determina el número cardinal del continuo lineal homogéneo; más precisamente, el número cardinal debe ser c.

2. Observemos en primer lugar que:

2.1 Si H es c.l.h. (continuo lineal homogéneo), su número cardinal es mayor o igual a c.

2.2 Si H es c.l.h. existe $M \subset H$, no acotado de número cardinal c.

Demostración: Elíjase $P \subset H$, de número cardinal c. Sea N la sucesión doble [1] que abarca a H; $M = P \cup N$ cumple con la condición pedida.

2.3 Si H es c.l.h. e I un intervalo abierto de H, existe un isomorfismo entre ellos (correspondencia biunívoca que conserva el orden). Si es $M \subset H$, a la imagen M' de M en I, generada por alguno de los isomorfismos entre H e I, le llamaremos una representación de M en I.

---

* Presentado en el Segundo Congreso Nacional de Matemáticas, efectuado en Guadalajara, Jal., del 28 de mayo al 2 le junio de 1945.

1 Véanse: R. Vázquez y F. Zubieta: "Los continuos lineales homogéneos de G. D. Birnhoff", este Boletín, vol. I, núm. 2, pp. 1-14.

Richard Arens "On the construction of linear homogeneous continua", mismo Boletín, vol. II, núm. 3, pp. 33-36.

2 Supondremos, sin embargo, que el contincо carece de primero y último elementos. Por consiguiente, si M es un subconjunto, sólo cuando M esté acotado superiormente existirá sup M, y análogamente cuando M esté acotado inferiormente.

2.4 Si H es c.l.h. completo, todo subconjunto abierto no vacío de H es unión de intervalos abiertos sin puntos comunes.

2.5 Si H es c.l.h. y M es un subconjunto de H de cardinal c, el subconjunto $\overline{M}$ también es de cardinal c. Por consiguiente si H es además completo y $H - \overline{M} \neq 0$, el cardinal del conjunto de intervalos abiertos que forman a $H - \overline{M}$, es menor o igual a c.

2.6 Si H ese c.l.h. completo, no puede contener una sucesión creciente de sus elementos, de número cardinal alef uno.

3. *Teorema*. Si H es c.l.h. completo, su número cardinal es c.

Demostración: Supongamos que la afirmación anterior es falsa; tomando en cuenta 2.1 esto equivale a que el cardinal de H sea mayor que c. Definamos, por inducción, una sucesión $\{M_\alpha\}$ de subconjuntos de H. donde los valores de α son todos los números ordinales de 1ª y 2ª clases, del modo siguiente:

1º $M_0 \subset H$ es un conjunto no acotado de número cardinal c (véase 2.2).

2º Sea $K_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} M_\beta$. Definamos $M_\alpha = 0$ si $H - \overline{K}_\alpha = 0$. En el caso contrario, el conjunto abierto $H - \overline{K}_\alpha$ se descompone en intervalos abiertos sin puntos comunes (véase 2.4); consideremos un isomorfismo entre H y cada uno de los intervalos abiertos que forman $H - \overline{K}_\alpha$ En este caso definamos M_α como la unión de las representaciones de M_0 (véase 2.3) en esos intervalos.

Veremos a continuación que el cardinal de todas las M_α es c. En efecto si M_β es de cardinal c para toda $\beta < \alpha$, el conjunto K_α es de cardinal c: por 2.4 y 2.5 tenemos:

$$\text{cardinal de } \overline{K}_\alpha = c$$

$$\therefore\ H - \overline{K}_\alpha \neq 0;$$

$$\therefore \text{ cardinal del conjunto de intervalos de } H - \overline{K}_\alpha \leq c,$$

$$\therefore\ \text{cardinal de } M_\alpha = c.$$

Por lo anterior, $\bigcup M_\alpha$ y $\overline{\bigcup M_\alpha}$ son de cardinal c.

$$\therefore \quad H - \overline{\bigcup M_\alpha} \neq 0.$$

Ahora sea $x \varepsilon H - \overline{\bigcup M_{\alpha}}$ luego

$$x \varepsilon H - \overline{K}_\alpha \text{ para toda } \alpha;$$

en consecuencia existe uno y solo un intervalo I_α (x) de los que forman a $H - \overline{K}_\alpha$ tal que $x \varepsilon I_\alpha$ (x). Además si $\beta < \alpha$, I_β (x) contiene en su interior a I_α (x) puesto que M_0 no está acotado. Resulta así que los extremos izquierdos de todos los intervalos I_α (x) forman una sucesión creciente de número cardinal alef uno, lo que contradice el hecho de que H es completo (véase 2.6). Habiendo llegado a una contradicción, el teorema está demostrado.

INSTITUTO DE MATEMATICAS