EL MOVIMIENTO LUNAR EN LA TEORIA DE LA GRAVITACION DE BIRKHOFF

Por Antonio Romero Juárez.

La introducción de una ley de gravitación distinta de la newtoniana da lugar a nuevas fuerzas perturbadoras en la Teoría Lunar, las que hay que tener en cuenta. Aparecen estas nuevas fuerzas debido a que:

1º El potencial del Sol queda alterado en ΔV_S ;

2º El potencial de la Tierra V_T, también cambia en ΔV_T.

Puesto que en la Teoría de Birkhoff los campos son aditivos,[1] no hay fuerzas que dependan de ΔV_S y ΔV_T simultáneamente.[2]

Solamente se considerarán los efectos de ΔV_S, ya que los otros son enteramente despreciables. Se sabe que para la Luna, $V_S = 750\ V_T$.

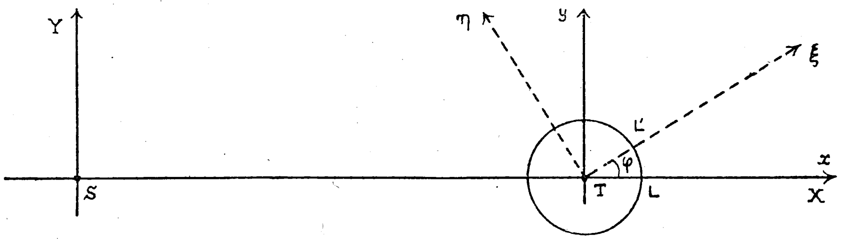
Como estamos interesados únicamente en determinar las diferencias del movimiento lunar respecto a la solución clásica, tendremos que calcular las fuerzas adicionales relativas a la Tierra, que actúan en una partícula en la vecindad de aquélla. Después se hará la comprobación de las ecuaciones del movimiento obtenidas, con las newtonianas.

Sean (a, o) las coordenadas de la Tierra T referidas a un sistema fijo con origen en el Sol S y en el plano de la eclíptica, y (x, y) las coorde-

1 G. D. Birkhoff, "El Concepto Matemático de Tiempo y Gravitación", Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana, Vol. I, Nos. 4 y 5, 1944.

2 A. S. Eddington, "The Mathematical Theory of Relativity", Cambridge Univrsity Press, 1937.

nadas de la Luna en un sistema con origen en T. No se tiene en cuenta la inclinación de la órbita lunar.



Considerando la masa de la Luna L como infinitesimal y la órbita terrestre circular, la velocidad de T es v tal que $v^2 = \frac{m}{a}$, en donde m es la masa del Sol y a el radio de la órbita.

Las ecuaciones del movimiento [3] de T se pueden escribir en la forma:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2 r}{dt^2} - r\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 + \frac{m}{r^2} &= R, \\ r\frac{d^2\vartheta}{dt^2} + 2\frac{dr}{dt}\frac{d\vartheta}{dt} &= \Theta, \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

con

$$\left.\begin{aligned} R &= \frac{\alpha}{r^2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 - \beta\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2, \\ \Theta &= \frac{\gamma}{r}\frac{dr}{dt}\frac{d\vartheta}{dt}. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Llamando u y v a las componentes de las velocidades en coordenadas polares, $u = \frac{dr}{dt}$, $v = r\frac{d\vartheta}{dt}$; luego

3 Carlos Graef Fernández, "El Movimiento de los cuerpos en la Teoría de Birkhoff", Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana, Vol. I, Nos. 4 y 5, 1944.

$$
\left.
\begin{aligned}
R &= \frac{1}{r^2}\,(\alpha\, u^2 - \beta\, v^2)\,, \\
\Theta &= \frac{\gamma}{r^2}\, u\, v\,.
\end{aligned}
\right\} \qquad (3)
$$

Para calcular las fuerzas adicionales relativas a T que actúan en L, encontraremos los incrementos de R y Θ correspondientes a los puntos T y L (véase la figura).

$$\delta R = \frac{1}{r^2}\,(2\,\alpha\, u\delta u - 2\,\beta\, v\delta v) - \frac{2\delta r}{r^3}\,(\alpha\, u^2 - \beta\, v^2)\,,$$

$$\delta\Theta = \frac{\gamma}{r^2}\, u\,\delta\, v + \frac{\gamma}{r^2}\, v\,\delta\, u - \frac{2\,\gamma\,\delta r}{r^3}\, u\, v\,,$$

en donde se deberá hacer

$$\delta r = x\,, \qquad \delta\, u = \frac{dx}{dt}\,, \qquad \delta\, v = \frac{dy}{dt}\,,$$

$$r = a\,, \qquad u = o\,, \qquad v = v\,.$$

Se tiene entonces:

$$
\left.
\begin{aligned}
\delta\, R &= -\frac{2\beta}{a^2}\, v\, \frac{dy}{dt} + \frac{2\beta m}{a^4}\, x\,, \\
\delta\,\Theta &= \frac{\gamma}{a^2}\, v\, \frac{dx}{dt}\,,
\end{aligned}
\right\} \qquad (4)
$$

puesto que $v^2 = \dfrac{m}{a}$.

Tengamos en cuenta ahora el movimiento de la Tierra. Efectuemos una transformación de coordenadas tomando nuevos ejes (ξ, η) girados en ángulo φ con respecto a los antiguos (x, y). Las ecuaciones de transformación son:

$$x = \xi \cos \varphi - \eta \operatorname{sen} \varphi ,$$

$$y = \xi \operatorname{sen} \varphi + \eta \cos \varphi ,$$

de donde:

$$\frac{dx}{dt} = \cos \varphi \frac{d\xi}{dt} - \operatorname{sen} \varphi \frac{d\eta}{dt} ,$$

$$\frac{dy}{dt} = \operatorname{sen} \varphi \frac{d\xi}{dt} + \cos \varphi \frac{d\eta}{dt} .$$

Se tiene por (4), haciendo caso omiso del término $\frac{2\beta m}{a^4} x$ por ser extremadamente pequeño:

$$\left.\begin{aligned} \delta R &= -\frac{2\beta}{a^2} v \left(\operatorname{sen} \varphi \frac{d\xi}{dt} + \cos \varphi \frac{d\eta}{dt} \right) , \\ \delta \Theta &= \frac{\gamma}{a^2} v \left(\cos \varphi \frac{d\xi}{dt} - \operatorname{sen} \varphi \frac{d\eta}{dt} \right) . \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

δR y $\delta \Theta$ son las componentes de un vector (la fuerza adicional relativa a la Tierra) en el sistema (x, y) ; se transforman en U y W, respectivamente, en el nuevo sistema, de manera que

$$U = \delta R \cos \varphi + \delta \Theta \operatorname{sen} \varphi ,$$

$$W = - \delta R \operatorname{sen} \varphi + \delta \Theta \cos \varphi .$$

Sustituyendo en estas últimas ecuaciones los valores dados por (5), se tiene:

$$\left.\begin{aligned} U &= \frac{v}{a^2} \left[(\gamma - 2\beta) \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi \frac{d\xi}{dt} + (-2\beta \cos^2 \varphi - \gamma \operatorname{sen}^2 \varphi) \frac{d\eta}{dt} \right] , \\ W &= \frac{v}{a^2} \left[(2\beta \operatorname{sen}^2 \varphi + \gamma \cos^2 \varphi) \frac{d\xi}{dt} + (2\beta - \gamma) \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi \frac{d\eta}{dt} \right] . \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

Si se consideran los ejes (ξ, η) fijos, el ángulo φ varía de 0 a 2π en una revolución de la Tierra, y después de ese tiempo, U y W vuelven a tener sus antiguos valores. Podemos entonces admitir que la Luna está sujeta a fuerzas que son el promedio de las fuerzas U y W, ya que éstas no dependen de la posición de la Luna; lo mismo puede decirse de una partícula cualquiera.

Los promedios $\overline{U}$, $\overline{W}$ de U, W son:

$$\overline{U} = -\left(\beta + \frac{\gamma}{2}\right) \frac{v}{a^2} \frac{d\eta}{dt},$$
$$\overline{W} = \left(\beta + \frac{\gamma}{2}\right) \frac{v}{a^2} \frac{d\xi}{dt}. \tag{7}$$

Estas son las fuerzas perturbadoras que producen efectos seculares.

Si N_ξ y N_η son las componentes de la fuerza newtoniana en la Luna relativas a la Tierra, las ecuaciones del movimiento lunar teniendo en cuenta las fuerzas perturbadoras son entonces:

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} + \left(\beta + \frac{\gamma}{2}\right) \frac{v}{a^2} \frac{d\eta}{dt} = N_\xi \quad ,$$
$$\frac{d^2\eta}{dt^2} - \left(\beta + \frac{\gamma}{2}\right) \frac{v}{a^2} \frac{d\xi}{dt} = N_\eta \quad . \tag{8}$$

Demostraremos ahora que las ecuaciones del movimiento referidas a ejes (ξ, η) que giran con velocidad angular pequeña ω, con respecto a ejes inerciales (x, y), son:

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} - 2\omega \frac{d\eta}{dt} = N_\xi \quad ,$$
$$\frac{d^2\eta}{dt^2} + 2\omega \frac{d\xi}{dt} = N_\eta \quad . \tag{9}$$

Se tiene:

$$x = \xi \cos \omega t - \eta \operatorname{sen} \omega t ,$$

$$y = \xi \operatorname{sen} \omega t + \eta \cos \omega t ,$$

de donde:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -2\,\omega \operatorname{sen} \omega t \frac{d\xi}{dt} + \cos \omega t \frac{d^2\xi}{dt^2} - 2\,\omega \cos \omega t \frac{d\eta}{dt} - \operatorname{sen} \omega t \frac{d^2\eta}{dt^2} ,$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = 2\,\omega \cos \omega t \frac{d\xi}{dt} + \operatorname{sen} \omega t \frac{d^2\xi}{dt^2} - 2\,\omega \operatorname{sen} \omega t \frac{d\eta}{dt} + \cos \omega t \frac{d^2\eta}{dt^2} ,$$

despreciando los términos en ω^2.

En el momento en que coinciden los dos sistemas,

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2\xi}{dt^2} - 2\,\omega \frac{d\eta}{dt} ,$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2\eta}{dt^2} + 2\,\omega \frac{d\xi}{dt} ,$$

y la fuerza tiene la misma representación (N_ξ, N_η) en ambos sistemas, luego

$$\frac{d^2x}{dt^2} = F_\xi \quad .$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = F_\eta \quad ,$$

Pasando a las nuevas coordenadas, se encuentran las ecuaciones (9).

Comparando (9) con (8), se ve que estas últimas son las ecuaciones del movimiento newtoniano referidas a ejes que giran con velocidad angular $-\omega$, siendo

$$\omega = 1/2 \left(\beta + \frac{\gamma}{2} \right) \frac{v}{a^2} . \tag{10}$$

Por tanto, si se supone que a la órbita newtoniana se le hace girar con velocidad angular ω, se obtiene de esta manera la solución de (8).

El efecto es entonces de una precesión de la órbita clásica con la velocidad angular calculada.

Si se sustituyen los valores de β y γ (*loc. cit.*) se obtiene:

$$\omega = \frac{m^2 + 3\,m\,m_1 + m_1{}^2}{m + m_1} \, \frac{v}{a^2} ,$$

siendo m_1 la masa de la Tierra. El avance del perigeo es entonces en una revolución de la Tierra alrededor del Sol:

$$\varepsilon = 2\pi \frac{m^2 + 3\,m\,m_1 + m_1{}^2}{a(m + m_1)} . \tag{11}$$

Esta es la fórmula para la corrección del avance del perigeo de la órbita de una partícula de masa infinitesimal que se mueve en el campo de otras dos de masas comparables y en la vecindad de una de ellas.

La Teoría de la Relatividad de Einstein suministra el valor

$$\varepsilon = 3\pi \frac{m}{a} ,$$

y de aquí se encuentra que la corrección del avance del perigeo lunar es de 1.″98 por siglo. Hay que hacer notar que en la Teoría de Einstein no es posible tener en cuenta el movimiento de los dos cuerpos principales ni la masa de uno de ellos.

La fórmula (11) conduce a un valor igual a las dos terceras partes del anterior, o sea de 1.″32 por siglo.

Deseo agradecer al doctor Carlos Graef Fernández el haberme propuesto el problema aquí discutido.

Instituto de Física, U. N. A., mayo de 1945.