UN TEOREMA SOBRE TRANSFORMACIONES DE CURVAS CERRADAS SOBRE SI MISMAS

Por Jaime Lifshitz.

En el estudio de la demostración detallada del teorema de Birkhoff sobre la existencia de puntos periódicos para las superficies de sección de forma anular, se me presentó el siguiente teorema:

Sea J una curva de Jordan en un plano, y T una transformación continua de J sobre sí misma. Si no hay puntos fijos, entonces al recorrerse J en sentido positivo, [1] el argumento del vector que une $P \varepsilon J$ con TP aumenta en 2π.

Demostraremos antes los resultados:

Lema 1. Sea J una curva de Jordan y $\vec{x} = \vec{x}(t)$, $0 \leqq t \leqq 1$, $\vec{x}(0) = \vec{x}(1)$, su representación paramétrica. Para todo $\varepsilon > 0$ dado existe un polígono simple Π, que puede representarse mediante la función $\vec{x}^*(t)$, tal que:

$$\| \vec{x}(t) - \vec{x}^*(t) \| < \varepsilon .$$

Existe δ_1 tal que para $| t_1 - t_2 | < \delta_1$, $\| \vec{x}(t_1) - \vec{x}(t_2) \| < \varepsilon$.

Tomemos n tal que $1/n < \delta_1$. Los puntos $A_i = \vec{x}\,[(i-1)/n]$, $i = 1, 2, \ldots, n$, dividen J en n arcos simples $J_1, J_2, J_3, \ldots, J_n$ que van de A_i a A_{i+1} (A_n a A_1 para $i = n$) respectivamente.

Sea δ_2 la mínima distancia entre dos arcos J_i, J_k cualesquiera, que no tienen extremo común. Existe $\delta > 0$, tal que para $|t_1 - t_2| < \delta$, $\|\vec{x}(t_1) - \vec{x}(t_2)\| < \frac{1}{2}\delta_2$. Sea m tal que $1/mn < \delta$.

Consideremos los puntos de J correspondientes a $t = p/mn$, $p = 0, 1, \ldots, mn - 1$, y conectemos los puntos sucesivos mediante segmentos rectilíneos. Se obtendrán n líneas quebradas L_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, que conectan puntos A_i con A_{i+1} respectivamente.

Podemos substituir las líneas quebradas L_i por líneas quebradas simples con los mismos extremos. Los vértices de L_i están ordenados por los valores de t correspondientes a los mismos. Partimos de A_i y recorremos todos los segmentos hasta encontrar un punto múltiple P_1 de L_i (si lo hay). P_1 estará sobre dos o más lados de L_i. Entre los vértices que están con P_1 sobre el mismo lado de L_i elegimos el de mayor valor de t. Volvemos a hacer lo mismo con la línea quebrada $P_1 A_{i+1}$, donde el vértice que sigue a P_1 es el arriba elegido. En esta forma se tiene una sucesión de líneas quebradas simples $A_i P_1$, $P_1 P_2, \ldots, P_r A_{i+1}$. Como el número de lados de L_i es finito, también lo será el de estas líneas quebradas. Supongamos que $P_{j-1} P_j$, $P_k P_{k+1}$, $k \geqq j$ tienen un punto común P. A menos que $P = P_j = P_k$, P será un punto múltiple de $P_{j-1} A_{i+1}$ ó $P_k A_{i+1}$, lo que implicaría que P_j ó P_k no pertenecen a la línea quebrada $L_i' = A_i P_1 \cup P_1 P_2 \cup \ldots \cup P_r A_{i+1}$, lo que es imposible. Por lo tanto L_i' es una línea quebrada simple.

Un punto P de L_i' y un punto $A = \vec{x}(t)$ sobre J_i arbitrarios, están a una distancia menor que ε, pues P está sobre el segmento que une $\vec{x}(t_1)$ y $\vec{x}(t_1 + 1/mn)$, siendo por lo tanto $P = \mu \vec{x}(t_1) + (1 - \mu)\vec{x}(t_1 + 1/mn)$. $0 \leqq \mu \leqq 1$. Por otra parte, $(i-1)/n \leqq t, t_1, t_1 + 1/mn \leqq i/n$. De allí:

$$\|\vec{x}(t) - P\| = \|\vec{x}(t) - \mu\vec{x}(t_1) - (1-\mu)\vec{x}(t_1 + 1/mn)\|$$

$$\leqq \mu\|\vec{x}(t) - \vec{x}(t_1)\| + (1-\mu)\|\vec{x}(t) - \vec{x}(t_1 + 1/mn)\|$$

$$< \mu\varepsilon + (1-\mu)\varepsilon = \varepsilon.$$

Para todo punto $P \in L_i'$ existe un punto $Q \in J_i$, tal que $d(P, Q) < \frac{1}{2}\delta_2$. Basta tomar como Q uno de los vértices del lado de L_i sobre el cual está P.

Sean P y P' puntos de L_i', L_j' respectivamente, donde J_i, J_j no tienen extremo común. Sean Q, Q' los puntos de J_i, J_j que están a una distancia menor que $\frac{1}{2}\delta_2$ de P, P' respectivamente. Se tiene:

$$d(Q, Q') \leqq d(Q, P) + d(P, P') + d(P', Q') \,,$$

$$d(P, P') \geqq d(Q, Q') - d(Q, P) - d(P', Q') > \delta_2 - \frac{\delta_2}{2} - \frac{\delta_2}{2} = 0$$

$$\therefore \quad P \neq P'.$$

Por lo tanto L_i', L_j' podrán tener puntos comunes sólo en el caso de tener extremos comunes.

Recorremos ahora L_1' de A_1 a A_2. El primer punto común a L_1' y L_2' lo llamaremos B_2. Definido B_i, recorremos la parte $B_i A_{i+1}$ de L_i' hasta encontrar el primer punto común de $B_i A_{i+1}$ con L'_{i+1}, y lo designamos con B_{i+1}. Una vez definido B_n, recorremos $B_n A_1$ de L_n', hasta encontrar el primer punto B_1 común con $A_1 B_2$. Las líneas quebradas $B_{i-1} B_i$ se designarán por L_i^*. Si L_i' y L_j' tienen un punto común, L_i^* y L_j^* también lo tendrán y por lo tanto todos los B_i existen. Por construcción no podrán tener otro punto en común. Si L_i' y L_j' no tienen un extremo en común, L_i y L_j no pueden tener puntos en común, porque $L_i^* \subset L_i'$. Ninguna L_i^* se reduce a un punto, ya que B_i, B_{i+1} pertenecen a L'_{i-1}, L'_{i+1}, respectivamente.

A un punto P de L_i le hacemos corresponder el valor: $\dfrac{i-1}{n} + \dfrac{s}{nS}$ de t, donde s y S son las longitudes de las líneas quebradas $B_i P$ y $B_i B_{i+1}$. Esto nos da una función $\vec{x}^*(t)$. $\pi = L_1^* \cup L_2^* \ldots \cup L_n^*$, es un polígono simple y tiene por representación paramétrica $\vec{x} = \vec{x}^*(t)$. Como para todo t, $0 \leqq t \leqq 1$, existe un entero i tal que $(i-1)/n < t \leqq i/n$, $\vec{x}(t) \in J$ y $\vec{x}^*(t) \in L_i^* \subset L_i'$, y por lo tanto $\| \vec{x}(t) - x^*(t) \| < \varepsilon$.

Lema 2. Si con cada punto P de una curva cerrada plana J están asociados dos vectores $\vec{V}_1(P)$, $\vec{V}_0(P)$ continuos sobre J, el que $\vec{V}_1$, $\vec{V}_0$ no sean opuestos para ningún punto P de J es suficiente para asegurar que los incrementos de los argumentos respectivos, al recorrerse la curva serán iguales.[2]

El vector $\vec{V}_u(P) = u\,\vec{V}_1(P) + (1-u)\,\vec{V}_0(P)$, $0 \leqq u \leqq 1$, será continuo y distinto de cero. Su dirección será función continua de u . Por lo tanto, el incremento del argumento que sufre al recorrerse J una vez será también una función continua de u . Como este incremento sólo puede tomar valores múltiplos de 2π , debe ser igual para todo valor de u , en particular para $u = 1$, $u = 0$.

Para demostrar el teorema enunciado al principio, supongamos primero que J es un polígono plano con ecuaciones paramétricas $\vec{x} = \vec{x}\,(t)$, $0 \leqq t \leqq 1$. Con la transformación T está asociada una función $f(t)$ con estas propiedades:

i) Definida y continua para $0 \leqq t \leqq 1$.

ii) $f(0) = f(1)$,

iii) $0 < f(t) < 1$ para todo t ,

tal que si $P = \vec{x}\,(t)$, $TP = \vec{x}\,[t+f(t)]$.

A toda función que satisfaga las condiciones arriba indicadas le corresponderá una transformación continua sin puntos fijos.

Sea T_u la transformación asociada con $uf(t)$, $0 < u \leqq 1$. El vector que une un punto de J con su transformado será distinto de cero y una función continua de u . Por lo tanto, el incremento del argumento del vector es una función continua de u , y por el mismo razonamiento que antes tiene que ser el mismo para todos los valores de u .

Si tomamos u suficientemente pequeño para que $T_u P$ esté sobre el mismo lado que P ó sobre el siguiente, el incremento que sufre el argumento del vector $\overrightarrow{P, T_u P}$ al pasar del vértice A_i al vértice siguiente A_{i+1} es igual al ángulo exterior en el vértice A_{i+1} . Por lo tanto, al recorrerse J en sentido positivo, el incremento total del argumento será la suma algebraica de los ángulos exteriores, que es igual a $+2\pi$.[3] Teniendo este valor para un u , lo tendrá para $u = 1$.

En el caso de que J sea una curva de Jordan plana general, habrá un punto $Q = \vec{y}$ interior a J . Sea $\varepsilon = \min(\delta_1 , \frac{1}{2}\,\delta_2)$, donde δ_1 es la distancia de Q a J , y δ_2 es la mínima distancia entre P y TP para todos los puntos $P \in J$.

En virtud del lema 1, existe un polígono $\Pi : \vec{x} = \vec{x}^*(t)$, tal que $|| x (t) - \vec{x}^*(t) || < \varepsilon$.

Supongamos que al crecer t se recorre J en sentido positivo. Entonces el argumento del vector $\vec{V} = \vec{x}(t) - \vec{y}$ aumenta 2π al crecer t de 0 a 1 . El vector $\vec{V}^* = \vec{x}^*(t) - \vec{y}$ nunca está en oposición con $\vec{V}(t)$ y los dos satisfacen las condiciones del lema 2. Entonces el argumento de $\vec{V}^*$ también crece 2π, por lo cual Q es interior a Π y Π se recorre en sentido positivo al crecer t . [1]

Como el teorema es cierto para polígonos, el incremento del argumento del vector $\vec{U}^*(t) = \vec{x}^*[T(t)] - \vec{x}^*(t)$ es igual a 2π. El vector $\vec{U}(t) = \vec{x}[T(t)] - \vec{x}(t)$ nunca está en oposición con $\vec{U}^*(t)$, porque $|| \vec{x}(t) - \vec{x}^*(t) || < \tfrac{1}{2} \delta_2$ y $\vec{U}(t) \geqq \delta_2$. Como con continuos y no nulos, se puede aplicar el lema 2, y se obtiene el resultado requerido.

Se obtiene como corolario:

Si una curva cerrada plana tiene tangente en todo punto y la dirección de la tangente es función continua, el incremento en el argumento del vector tangente, al recorrerse la curva en sentido positivo una vez, es 2π .

1 Si J es una curva de Jordan en un plano, éste queda dividido por J en dos partes. Para todo punto exterior $\vec{y}$ la variación del argumento del vector $\vec{x}(t) - \vec{y}$, al recorrerse la curva una vez en sentido dado, es nula. Para puntos interiores esta variación es $\pm 2\pi$, teniendo el mismo signo para todos los puntos interiores. Se define como positivo el sentido, para el cual este signo es positivo.

2 Esta demostración está tomada de las notas del Prof. S. Lefschetz sobre topología.

3 Véase E. Steinitz, *Vorlesungen Uber die Theorie der Polyeder*, pág. 22.

BIBLIOGRAFIA

1 G. D. Birkhoff, *Dynamical Systems*.

2 Seifert und Threlfall, *Topologie*.

3 Kerekjarto, *Topologie*.

Instituto de Física, enero de 1946.