DESCOMPOSICION DE LA MATRIZ DE LA TRANSFORMACION GENERAL DE LORENTZ EN FACTORES SIMPLES *

Por Manuela Garín de Alvarez.

El problema consiste en demostrar que una transformación general de Lorentz puede siempre descomponerse en el producto de otras tres transformaciones especiales, es decir, que la matriz (a_j^i) puede escribirse como el producto de tres matrices especiales.

$$(a_j^i) = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 & a_4^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & a_4^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 & a_4^3 \\ a_1^4 & a_2^4 & a_3^4 & a_4^4 \end{pmatrix}$$

Transformación
general de Lorentz.

$$= \underset{(3)}{\begin{pmatrix} \text{Rotación} \\ \text{del sistema} \\ \text{cartesiano de} \\ \text{referencia.} \end{pmatrix}} \underset{(2)}{\begin{pmatrix} \text{Transformación} \\ \text{especial de Lorentz} \\ \text{(movimiento en el} \\ \text{sentido físico).} \end{pmatrix}} \underset{(1)}{\begin{pmatrix} \text{Rotación} \\ \text{del sistema} \\ \text{cartesiano de} \\ \text{referencia.} \end{pmatrix}}$$

La transformación (1) es una rotación del sistema cartesiano de referencia x, y, z, que no es una rotación en el sentido físico sino en el sentido de la geometría analítica. [a] La transformación (2) es una transformación

---

* Presentado en la Tercera Asamblea Regional de la Sociedad Matemática Mexicana, efectuada en la ciudad de Toluca, del 6 al 8 de septiembre de 1945.

a Se usará indistintamente, para facilitar la expresión, las notaciones x^1, x^2, x^3, x^4 y t, x, y, z , siendo la primera la coordenada temporal y las tres últimas las coordenadas espaciales.

especial de Lorentz, cuando el nuevo sistema se va moviendo con una velocidad v según el eje de las x del sistema primitivo.

El tercer factor representa otra rotación del sistema cartesiano de referencia.

Se llama transformación general de Lorentz a una transformación afín en un espacio de cuatro dimensiones, del tipo:

$$\bar{x}^i = a_j^i x^j \qquad i, j = 1, 2, 3, 4 ;$$

cuyos coeficientes satisfacen dos condiciones:

$$\Delta_{ij} a_r^i a_n^j = \Delta_{rn}$$

$$\Delta^{ij} a_i^r a_j^n = \Delta^{rn} ,$$

siendo Δ_{ij} el tensor métrico covariante del espacio de Minkowski

$$\Delta_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

y el tensor Δ^{ij} es el tensor contravariante asociado al covariante fundamental Δ_{ij} y tiene por valor:

$$\Delta^{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

La transformación recíproca de la transformación general que se trata es

$$x^i = A_j^i \bar{x}^j \qquad i, j = 1, 2, 3, 4$$

que también es afín puesto que las transformaciones de Lorentz forman grupo y por tanto las A_j^i deben satisfacer las condiciones:

$$\Delta_{ij} A_m^i A_n^j = \Delta_{mn} ,$$

$$\Delta^{ij} A_i^m A_j^n = \Delta^{mn} .$$

Además, entre las A_j^i y las a_j^i existe la siguiente relación:

$$A_j^i = \begin{pmatrix} a_1^1 & -a_1^2 & -a_1^3 & -a_1^4 \\ -a_1^2 & a_2^2 & a_2^3 & a_2^4 \\ -a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 & a_3^4 \\ -a_4^1 & a_4^2 & a_4^3 & a_4^4 \end{pmatrix}$$

Se determina la dirección de la velocidad del origen $\bar{o}$ en el sistema primitivo para determinar la dirección del eje x'.

El origen $\bar{o}$ tiene por coordenadas $(\bar{x}^1, 0, 0, 0)$ o sea $\bar{x}^2 = \bar{x}^3 = \bar{x}^4 = 0$

$$\therefore \quad x^1 = A_1^1\, \bar{x}^1 \qquad U^x = \frac{dx^2}{dx^1} = \frac{A_1^2}{A_1^1}$$

$$x^2 = A_1^2\, \bar{x}^1 \qquad U^y = \frac{A_1^3}{A_1^1}$$

$$x^3 = A_1^3\, \bar{x}^1 \qquad U^z = \frac{A_1^4}{A_1^1}$$

$$x^4 = A_1^4\, \bar{x}^1$$

$$V = \sqrt{(U^x)^2 + (U^y)^2 + (U^z)^2} = \frac{\sqrt{(A_1^2)^2 + (A_1^3)^2 + (A_1^4)^2}}{A_1^1}\,.$$

Debe ser:

$$v^2 = \frac{(a_1^1)^2 - 1}{(a_1^1)^2} < 1 \quad \therefore \quad a_1^1 \geqq 1\,,$$

para que el problema tenga sentido físico.

Todo el sistema nuevo se mueve con velocidad v en el sistema primitivo, lo que fácilmente puede comprobarse.

El primer sistema auxiliar [aplicación de la transformación (1)] x', y', z', se construye de modo que x' tenga la dirección de v.

Se sabe que una rotación de un sistema es una transformación del siguiente tipo: $x'^i = \alpha_j^i\, x^j$, con

$$\alpha_j^i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2^2 & \alpha_3^2 & \alpha_4^2 \\ 0 & \alpha_2^3 & \alpha_3^3 & \alpha_4^3 \\ 0 & \alpha_2^4 & \alpha_3^4 & \alpha_4^4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(x'x) & \cos(x'y) & \cos(x'z) \\ 0 & \cos(y'x) & \cos(y'y) & \cos(y'z) \\ 0 & \cos(z'x) & \cos(z'y) & \cos(z'z) \end{bmatrix}$$

Se tiene, pues: $1 = \dfrac{(U^x)^2}{v^2} + \dfrac{(U^y)^2}{v^2} + \dfrac{(U^z)^2}{v^2}$

$$\therefore \quad \alpha_2^2 = \frac{U^x}{v} = \frac{A_1^2}{A_1^1 v} \; ;$$

$$a_3^2 = \frac{U^y}{v} = \frac{A_1^3}{A_1^1 v} \; ;$$

$$\alpha_4^2 = \frac{U^z}{v} = \frac{A_1^4}{A_1^1 v} \, .$$

Se escoge, para más comodidad, el eje y' sobre el plano $x\,y$; de este modo $\cos(y'z) = 0$ y queda:

$$(\alpha_2^3)^2 + (\alpha_3^3)^2 = 1$$

$$\alpha_2^3 \frac{A_1^2}{A_1^1 v} + \alpha_3^3 \frac{A_1^3}{A_1^1 v} = 0 \quad \therefore \quad \alpha_4^3 = 0$$

$$\therefore \quad \alpha_2^3 = \frac{-A_1^3}{\sqrt{(A_1^3)^2 + (A_1^2)^2}}$$

$$\alpha_3^3 = \frac{A_1^2}{\sqrt{(A_1^3)^2 + (A_1^2)^2}} \, .$$

Además, se tiene que:

$$(\alpha_2^4)^2 + (\alpha_3^4)^2 + (\alpha_4^4)^2 = 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

$$\alpha_2^4 A_1^2 + \alpha_3^4 A_1^3 + \alpha_4^4 A_1^4 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

$$\frac{-A_1^3\,\alpha_2^4}{\sqrt{(A_1^3)^2+(A_1^2)^2}}+\frac{A_1^2\,\alpha_3^4}{\sqrt{(A_1^3)^2+(A_1^4)^2}}=0\;.\;\;.\;\;.\quad(3)$$

de donde se obtiene:

$$\alpha_3^4=\frac{A_1^3\;A_1^4}{A_1^1\,V\sqrt{(A_1^2)^2+(A_1^3)^2}}$$

$$\alpha_4^4=-\frac{(A_1^2)^2+(A_1^3)^2}{A_1^1\,V\sqrt{(A_1^2)^2+(A_1^3)^2}}$$

$$\alpha_2^4=\frac{A_1^2\;A_1^4}{A_1^1\,V\sqrt{(A_1^2)^2+(A_1^3)^2}}\;.$$

Con esto queda completamente determinada la transformación (1).

Se aplica al sistema x', y', z' la transformación especial de Lorentz (2):

$$x''^i=b_j^i\,x'^j\;,$$

con $b_j^i =$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} & \frac{-v}{\sqrt{1-v^2}} & 0 & 0 \\ -\frac{v}{\sqrt{1-v^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Con lo que se obtiene otro sistema, que se mueve en la dirección del eje x'. El sistema x'', y'', z'' tiene su origen $0''$ coincidiendo con el $\bar{0}$ y su x'' con la dirección de la velocidad del sistema.

Ahora, se determinan las componentes de la velocidad v en el nuevo sistema $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ y de ese modo se conocen los cosenos directores del eje x'' en el sistema $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$.

Conociendo U^x, U^y, U^z, componentes de la velocidad en el sistema primitivo, se encuentra que las componentes $\bar{U}^x$, $\bar{U}^y$ y $\bar{U}^z$ están expresadas del siguiente modo:

$$\bar{U}^x = \frac{U^x - V}{1 - vU^x} = \frac{A_1{}^2/A_1{}^1 - V}{1 - v\dfrac{A_1{}^2}{A_1{}^1}} = \frac{A_1{}^2 - v\,A_1{}^1}{A_1{}^1 - v\,A_1{}^2}$$

$$\bar{U}^y = \frac{\sqrt{1 - v^2}\;U^y}{1 - v\;U^x} = \frac{\sqrt{1 - v^2}\;A_1{}^3/A_1{}^1}{1 - v\dfrac{A_1{}^2}{A_1{}^1}} = \frac{\sqrt{1 - v^2}\;A_1{}^3}{A_1{}^1 - v\,A_1{}^2}$$

$$\bar{U}^z = \frac{\sqrt{1 - v^2}\;U^z}{1 - v\;U^x} = \frac{\sqrt{1 - v^2}\;A_1{}^4/A_1{}^1}{1 - v\dfrac{A_1{}^2}{A_1{}^1}} = \frac{\sqrt{1 - v^2}\;A_1{}^4}{A_1{}^1 - v\,A_1{}^2}$$

Es decir, se aplica al sistema x'' y'' z'' la transformación (3), que es una rotación en el sentido de la geometría analítica, o sea:

$$\bar{x}^i = \beta_j{}^i\, x''^j$$

$$\text{con } \beta_j{}^i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_2{}^2 & \beta_3{}^2 & \beta_4{}^2 \\ 0 & \beta_2{}^3 & \beta_3{}^3 & \beta_4{}^3 \\ 0 & \beta_2{}^4 & \beta_3{}^4 & \beta_4{}^4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\bar{x}x'') & \cos(\bar{x}y'') & \cos(\bar{x}z'') \\ 0 & \cos(\bar{y}x'') & \cos(\bar{y}y'') & \cos(\bar{y}z'') \\ 0 & \cos(\bar{z}x'') & \cos(\bar{z}y'') & \cos(\bar{z}z'') \end{bmatrix}$$

$\therefore$ se tiene que los cosenos directores de x'' serán

$$\frac{\bar{U}^x}{\bar{V}}, \quad \frac{\bar{U}^y}{\quad}, \quad \frac{\bar{U}^z}{\bar{V}};$$

$$\text{pero } \bar{V}^2 = \frac{(A_1{}^1 - v\,A_1{}^2)^2 + v^2 - 1}{(A_1{}^1 - v\,A_1{}^2)^2} = 1 + \frac{v^2 - 1}{(A_1{}^1 - v\,A_1{}^2)^2} < 1$$

$$\therefore \quad \beta_2{}^2 = \frac{A_1{}^2 - v\,A_1{}^1}{\sqrt{(A_1{}^1 - v\,A_1{}^2)^2 + v^2 - 1}} \quad ;$$

$$\beta_2{}^3 = \frac{\sqrt{1 - v^2}\;A_1{}^3}{\sqrt{(A_1{}^1 - v\,A_1{}^2)^2 + v^2 - 1}} \quad ;$$

$$\beta_2{}^4 = \frac{\sqrt{1 - v^2}\;A_1{}^4}{\sqrt{(A_1{}^1 - v\,A_1{}^2)^2 + v^2 - 1}} \quad .$$

Se obtienen las ecuaciones del eje y'' en el sistema nuevo para conocer sus cosenos directores.

y'' tiene por ecuaciones en el sistema $x''\ y''\ z''$:

$$x'' = 0$$

$$z'' = 0\,.$$

Estas se transforman al sistema x'^1, x'^2, x'^3 x'^4 ; y las encontradas nuevamente se transforman al sistema primitivo x^1, x^2, x^3, x^4, y aplicando la transformación general se encuentra la ecuación de y'' en el sistema $\bar{x}^1, \bar{x}^2, \bar{x}^3, \bar{x}^4$. Se demuestra que estas ecuaciones son independientes de $\bar{x}^1$, puesto que se trata de una simple rotación. Estas ecuaciones son:

$$A_2{}^1\,\bar{x}^2 + A_3{}^1\,\bar{x}^3 + A_4{}^1\,\bar{x}^4 = 0 \;\;.\;\;.\;\;.\;\; x'' = 0$$

$$\{A_1{}^1\,A_2{}^1\,A_1{}^4 - A_2{}^4\,[(A_1{}^1)^2 - 1]\}\,\bar{x}^2 +$$

$$\{A_1{}^1\,A_3{}^1\,A_1{}^4 - A_3{}^4\,[(A_1{}^1)^2 - 1]\}\,\bar{x}^3 +$$

$$+\;\{A_1{}^1\,A_4{}^1\,A_1{}^4 - A_4{}^4\,[(A_1{}^1)^2 - 1]\}\,\bar{x}^4 = 0 \;\;.\;\;.\;\;.\;\; z'' = 0\,.$$

La normal al plano $x'' = 0$ tiene por cosenos directores:

$$\left(\frac{A_2{}^1}{\sqrt{(A_1{}^1)^2 - 1}}\,,\;\frac{A_3{}^1}{\sqrt{(A_1{}^1)^2 - 1}}\,,\;\frac{A_4{}^1}{\sqrt{(A_1{}^1)^2 - 1}}\right).$$

La normal al plano $z'' = 0$ tiene por cosenos directores:

$$\frac{A_1^1\, A_2^1\, A_1^4 - A_2^4\, [(A_1^1)^2 - 1]}{\sqrt{[(A_1^1)^2 - 1]\, [1 - (A_1^1)^2 - (A_1^4)^2]}}\,,$$

$$\frac{A_1^1\, A_3^1\, A_1^4 - A_3^4\, [(A_1^1)^2 - 1]}{\sqrt{[(A_1^1)^2 - 1]\, [1 - (A_1^1)^2 - (A_1^4)^2]}}\,,$$

$$\frac{A_1^1\, A_4^1\, A_1^4 - A_4^4\, [(A_1^1)^2 - 1]}{\sqrt{[(A_1^1)^2 - 1]\, [1 - (A_1^1)^2 - (A_1^4)^2]}}\,.$$

y'', que es la intersección de los 2 planos, tendrá por cosenos directores, los del producto vectorial de las normales, los que se designan por β_3^2, β_3^3, β_3^4.

Efectuando las operaciones se encuentra:

$$\beta_3^2 = \frac{A_4^1\, A_3^4 - A_3^1\, A_4^4}{\sqrt{1 - (A_1^1)^2 - (A_1^4)^2}}\,,$$

$$\beta_3^3 = \frac{A_2^1\, A_4^4 - A_4^1\, A_2^4}{\sqrt{1 - (A_1^1)^2 - (A_1^4)^2}}\,,$$

$$\beta_3^4 = \frac{A_3^1\, A_2^4 - A_2^1\, A_3^4}{\sqrt{1 - (A_1^1)^2 - (A_1^4)^2}}\,.$$

Siguiendo el mismo método empleado para y'' se encuentra β_4^2, β_4^3, β_4^4, que son los cosenos directores del eje z'' en el sistema $\bar{t}, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$. Haciendo las transformaciones de las ecuaciones de z'' se encuentra que la normal al plano $y'' = 0$ tiene por cosenos directores:

$$\left(\frac{A_1^2\, A_2^3 - A_1^3\, A_2^2}{\sqrt{(A_1^2)^2 + (A_1^3)^2}}\,,\ \frac{A_1^2\, A_3^3 - A_1^3\, A_3^2}{\sqrt{(A_1^2)^2 + (A_1^3)^2}}\,,\ \frac{A_1^2\, A_4^3 - A_1^3\, A_4^2}{\sqrt{(A_1^2)^2 + (A_1^3)^2}}\,, \right)$$

La normal al plano $x'' = 0$ tiene por cosenos directores:

$$\left(\frac{A_2^1}{\sqrt{(A_1^1)^2 - 1}}, \frac{A_3^1}{\sqrt{(A_1^1)^2 - 1}}, \frac{A_4^1}{\sqrt{(A_1^1)^2 - 1}} \right);$$

por lo tanto z'', que es la intersección de estos dos planos, tendrá por cosenos directores, los del producto vectorial de las normales, los cuales se designan por β_4^2, β_4^3, β_4^4 :

$$\beta_4^2 = \frac{A_3^1 (A_1^2 A_4^3 - A_1^3 A_4^2) - A_4^1 (A_1^2 A_3^3 - A_1^3 A_3^2)}{A_1^1 \, v \sqrt{(A_1^2)^2 + (A_1^3)^2}}$$

$$\beta_4^3 = \frac{A_4^1 (A_1^2 A_2^3 - A_1^3 A_2^2) - A_2^1 (A_1^2 A_4^3 - A_1^3 A_4^2)}{A_1^1 \, v \sqrt{(A_1^2)^2 + (A_1^3)^2}}$$

$$\beta_4^4 = \frac{A_2^1 (A_1^2 A_3^3 - A_1^3 A_3^2) - A_3^1 (A_1^2 A_2^3 - A_1^3 A_2^2)}{A_1^1 \, v \sqrt{(A_1^2)^2 + (A_1^3)^2}}$$

Estos resultados completan las matrices en que se descompone la matriz original.

Instituto de Física, agosto de 1945.