TEOREMAS SOBRE LOS CIRCULOS GEODESICOS Y LA CURVATURA GAUSSIANA *

Por Roberto Vázquez García y Javier Barros Sierra.

1. INTRODUCCION Y RESUMEN.

George D. Birkhoff se ocupó, meses antes de su muerte, en ciertos aspectos de la teoría de las superficies. Entre otros problemas, intentó la caracterización de las superficies por medio de relaciones entre áreas, circunferencias y radios de círculos geodésicos. Con respecto a esta cuestión, planteó la siguiente conjetura: *si para cierta $a > 0$ fija, todos los círculos geodésicos de radio a en una superficie tienen la misma área, entonces la superficie es de curvatura (gaussiana) constante.*

Paralelamente, puede emitirse esta otra conjetura: *si existe una cierta $a > 0$ para la cual las circunferencias de todos los círculos geodésicos de radio a en la superficie son iguales, entonces la superficie es de curvatura constante.*

El presente artículo contiene algunos resultados obtenidos al intentar la demostración de la conjetura de Birkhoff. Resumiremos a continuación dichos resultados:

I. A cada punto P de una superficie S puede asociársele una superficie de revolución σ_P con polo p, a la que llamaremos "imagen" y que tiene las siguientes propiedades:

a) *Círculos geodésicos de iguales radios con centros en P y p tienen iguales áreas y circunferencias.*

b) *Las curvaturas gaussianas en P y p son iguales; más aún, las integrales de las curvaturas gaussianas a lo largo de circunferencias y las*

---

* Parte de los resultados contenidos en el presente artículo fueron presentados en el Segundo Congreso Nacional de Matemáticas, efectuado en la ciudad de Guadalajara, del 28 de mayo al 2 de junio de 1945.

curvaturas "íntegras" en círculos del mismo radio con centros en P y p son iguales, de donde resulta la igualdad de curvaturas medias sobre las circunferencias y dentro de los círculos.

c) *La condición necesaria y suficiente para que la curvatura gaussiana en P sea igual a la curvatura media en todo círculo o en toda circunferencia con centro en P es que σ_p sea de curvatura constante.*

II. Cada una de las hipótesis siguientes, relativas a dos puntos P y P_1 de la misma superficie o de superficies distintas, implica la identidad de las imágenes σ_p y σ_{p1} y por tanto la igualdad de curvaturas "íntegras" y de integrales de contorno de las curvaturas gaussianas, respectivamente, en círculos y circunferencias de igual radio con centros en P y P_1, etc. (véase I).

a) *Que la igualdad de áreas de círculos geodésicos con centros en P y P_1 implique la igualdad de las circunferencias respectivas, o recíprocamente.*

b) *Que las curvaturas medias en círculos de igual área con centros en P y P_1 o las curvaturas medias a lo largo de las circunferencias correspondientes sean iguales.*

c) *Que para círculos geodésicos de igual área con centros en P y P_1 la igualdad de curvaturas medias a lo largo de las circunferencias implique la igualdad de curvaturas medias dentro de los círculos y además exista un cierto radio para el cual las áreas sean iguales.*

III. *Si existe algún radio para el cual los círculos geodésicos con centros en P y P_1 tienen igual área, entonces existen círculos de igual área, interiores a los primeros, en los cuales las curvaturas íntegras son iguales. Un corolario de este teorema es que existen dos puntos, uno dentro de cada círculo interior, en que las curvaturas gaussianas son iguales.*

IV. *Si en todo punto P de una superficie S, la curvatura gaussiana es igual a la curvatura media a lo largo de toda circunferencia geodésica con centro en P y para cada par de puntos de S existe un radio $a > 0$ (no necesariamente el mismo para todo par de puntos) para el que las áreas de los círculos geodésicos correspondientes son iguales, entonces la superficie es de curvatura constante.*

2. IMAGEN DE REVOLUCION DE UNA SUPERFICIE EN UN PUNTO

Consideremos un sistema de coordenadas polares geodésicas con origen en el punto P de una superficie S; la métrica está dada por:

$$ds^2 = dr^2 + G d\Theta^2$$

en que r es el radio polar, Θ el ángulo polar y $G = G(r, \Theta)$. Es necesario y suficiente[1] para que un sistema geodésico de coordenadas, esto es, el formado por una familia de geodésicas y la familia de trayectorias ortogonales de ellas sea polar, que se cumpla:

$$\sqrt{G} = 0, \quad \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial r} = 1 \qquad \text{en el origen P.}$$

Supongamos además que $\sqrt{G}$ es analítica y puntualicemos que todas las consideraciones siguientes se referirán a vecindades de P dentro de las cuales por dos puntos dados pasa una sola geodésica.

Recordemos la relación

$$\frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial r^2} = -K\sqrt{G} \tag{1}$$

en que K es la curvatura gaussiana

Entenderemos por círculos geodésicos las curvas $r =$ constante; la circunferencia y el área de un círculo geodésico de radio r son respectivamente:

$$C(r) = \int_0^{2\pi} \sqrt{G}\, d\Theta$$

$$A(r) = \int_0^r \int_0^{2\pi} \sqrt{G}\, dr\, d\Theta.$$

Se tiene pues:

$$\frac{dA}{dr} = C(r)$$

Sea ahora:

$$\sqrt{g(r)} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sqrt{G(r, \Theta)}\, d\Theta. \tag{2}$$

---

1 Véase, por ejemplo W. C. Graustein: "Differential Geometry", p. 185.

2 V. por ejemplo: Graustein, *op. cit.*, pág. 187.

Resulta evidentemente:

$$\sqrt{g} = 0, \frac{d\sqrt{g}}{dr} = 1 \quad \text{en el origen.}$$

Luego se tiene un sistema polar geodésico con métrica:

$$ds^2 = dr^2 + g\, d\Theta^2,$$

que corresponde a una superficie de revolución, ya que $\sqrt{g}$ es independiente de Θ. Llamaremos a esta superficie σ, "la imagen de revolución", o brevemente, imagen de la superficie S en P; sea p el polo de la imagen. Esta tiene las siguientes propiedades:

2.1 *Círculos geodésicos de iguales radios con centros en* P *y* p *tienen iguales áreas y circunferencias.*

En efecto, por (2):

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{g}\, d\Theta = 2\pi\sqrt{g} = \int_0^{2\pi} \sqrt{G}\, d\Theta$$

$$\int_0^{r}\int_0^{2\pi} \sqrt{g}\, dr\, d\Theta = 2\pi \int_0^{r} \sqrt{g}\, dr = \int_0^{r}\int_0^{2\pi} \sqrt{G}\, dr\, d\Theta.$$

2.2 *Las curvaturas gaussianas* K_P *y* k_p *en* P *y* p *son iguales*

Esta propiedad es consecuencia inmediata de 2.1 si se examina cualquiera de las expresiones:[2]

$$K_p = \frac{3}{\pi} \lim_{r\to 0} \frac{2\pi r - C}{r^3} = \frac{12}{\pi} \lim_{r\to 0} \frac{\pi r^2 - A}{r^4},$$

ya que las circunferencias y las áreas de círculos geodésicos con centros en P y p son iguales para toda r.

2.3 *Las circulaciones o integrales de contorno de las curvaturas gaussianas en circunferencias del mismo radio en* S *y en su imagen son iguales.*

Demostración: por (1) y (2):

$$\frac{d^2\sqrt{g}}{d\,r^2} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\partial^2\sqrt{G}}{\partial\, r^2}\, d\Theta = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} K\sqrt{G}\, d\Theta$$

2 V. por ejemplo: Graustein, *op. cit.*, p. 187.

$$\therefore \int_0^{2\pi} k\sqrt{g}\, d\Theta = 2\pi k\sqrt{g} = \int_0^{2\pi} K\sqrt{G}\, d\Theta, \tag{3}$$

puesto que en la imagen, $k = k(r)$.

Como consecuencia, las curvaturas medias en circunferencias del mismo radio en S y σ son iguales, resultado más amplio que 2.2.

2.4 *Las curvaturas "íntegras" (en el sentido de Gauss) en círculos de radios iguales en S y en su imagen son iguales.*

Demostración: De (3):

$$\int_0^r \int_0^{2\pi} k\sqrt{g}\, dr\, d\Theta = \int_0^r \int_0^{2\pi} K\sqrt{G}\, dr\, d\Theta.$$

Como corolario, debido a la igualdad de áreas, resulta que las curvaturas medias dentro de círculos de igual radio con centros en P y p son iguales, de donde se sigue también 2.2.

2.5 *La condición necesaria y suficiente para que la curvatura gaussiana en P sea igual a la curvatura media en todo círculo o en toda circunferencia con centro en P es que la imagen sea de curvatura constante.*

La demostración es inmediata en vista de 2.3 y 2.4.

2.6 *Si en dos puntos P y P_1 de una misma superficie o de superficies distintas las imágenes son idénticas, resulta de 2.1 a 2.4 que:*

2.61 Círculos geodésicos del mismo radio con centros en P y P_1 tienen iguales áreas y circunferencias.

2.62 Las curvaturas gaussianas en P y P_1 son iguales.

2.63 Las integrales de contorno de las curvaturas gaussianas en circunferencias de igual radio son iguales y por tanto las curvaturas medias en dichas circunferencias son iguales.

2.64 Las curvaturas "íntegras" en círculos de igual radio son iguales, siéndolo por tanto las curvaturas medias dentro de los círculos.

3. CIRCULOS GEODESICOS DE IGUAL AREA

Sean P y P_1 dos puntos de una misma superficie S o de dos superficies distintas. Para el sistema polar geodésico con origen en P_1 se tiene:

$$ds_1^2 = dr_1^2 + G_1\, d\Theta_1^2$$

Definamos implícitamente a r_1 como función de r del modo siguiente:

$$A_1(r_1) = A(r). \tag{4}$$

A_1 es el área de un círculo geodésico con centro en P_1; luego r_1 es el radio del círculo con centro en P_1 que tiene igual área que el círculo de radio r con centro en P.

Derivando respecto a r:

$$C_1(r_1)\frac{d\,r_1}{d\,r} = C(r); \tag{5}$$

siendo C_1 la circunferencia de un círculo geodésico con centro en P_1. Se tiene:

$$C_1(r_1) = 2\pi\sqrt{g_1};\quad C(r) = 2\pi\sqrt{g},$$

siendo $\sqrt{g_1}$ tal que:

$$d\,s_1^2 = d\,r_1^2 + g_1\,d\Theta_1^2$$

en la imagen de revolución correspondiente a P_1. Por consiguiente:

$$\sqrt{g} = \sqrt{g_1}\frac{d\,r_1}{d\,r}, \tag{6}$$

de donde resulta:

$$\frac{d\sqrt{g}}{d\,r} = \frac{d\sqrt{g_1}}{d\,r_1}\left(\frac{d\,r_1}{d\,r}\right)^2 + \sqrt{g_1}\frac{d^2\,r_1}{d\,r^2}. \tag{7}$$

Se obtiene:

$$\frac{d\,r_1}{d\,r} = 1 \quad \text{para} \quad r = 0.$$

Ahora

$$\frac{d^2\sqrt{g}}{d\,r^2} = \frac{d^2\sqrt{g_1}}{dr_1^2}\left(\frac{d\,r_1}{d\,r}\right)^3 + 3\frac{d\sqrt{g_1}}{d\,r_1}\frac{d\,r_1}{d\,r}\frac{d^2\,r_1}{d\,r^2} + \sqrt{g_1}\frac{d^3\,r_1}{d\,r^3}.$$

Luego:

$$\frac{d^2\,r_1}{d\,r^2} = 0 \quad \text{para} \quad r = 0.$$

Derivando una vez más:

$$\frac{d^3 \sqrt{g}}{d r^3} = \frac{d^3 \sqrt{g_1}}{d r_1^3} \left(\frac{d r_1}{d r} \right)^4 + 6 \frac{d^2 \sqrt{g_1}}{d r_1^2} \left(\frac{d r_1}{d r} \right)^2 \frac{d^2 r_1}{d r^2} +$$

$$+ 4 \frac{d \sqrt{g_1}}{d r_1} \frac{d r_1}{d r} \frac{d^3 r_1}{d r^3} + 3 \frac{d \sqrt{g_1}}{d r_1} \left(\frac{d^2 r_1}{d r^2} \right)^2 + \sqrt{g_1} \left(\frac{d r_1}{d r} \right)^4 ;$$

pero por (1) y 2.2:

$$\frac{d^3 \sqrt{g}}{d r^3} = -K_p \quad \text{y} \quad \frac{d^3 \sqrt{g_1}}{d r_1^3} = -K_{p1}$$

para $r = 0$ (y por tanto $r_1 = 0$)

Haciendo $r = 0$ y sustituyendo:

$$\frac{d^3 r_1}{d r^3} = \frac{K_{p1} - K_p}{4}, \quad \text{para} \quad r = 0.$$

Por consiguiente

$$r_1 = r + \frac{K_{p1} - K_p}{24} r^3 + \dots$$

Podemos deducir ahora algunos teoremas.

3.1 *Si la igualdad de áreas de círculos geodésicos con centros en P y P_1 implica la igualdad de las circunferencias respectivas, entonces las imágenes en P y P_1 son idénticas, de donde se siguen 2.61 a 2.64.*

Demostración: la hipótesis equivale a

$$C_1(r_1) = C(r)$$

para toda r. Comparando con (5) resulta:

$$\frac{d r_1}{d r} = 1$$

$$\therefore \; r_1 = r,$$

de donde, por (6), las imágenes en P y P_1 son idénticas.

3.2 *Si la igualdad de las circunferencias de círculos geodésicos con centros en P y P_1 implica la igualdad de las áreas correspondientes, entonces las imágenes en P y P_1 son idénticas.*

Demostración: por ser

$$\frac{\partial \sqrt{G}}{\partial r} = 1 \text{ en P},$$

C(r) es función creciente de r en una vecindad de P. Luego puede definirse, en dicha vecindad, una función $\lambda = \lambda(r)$, creciente, tal que:

$$C_1(\lambda) = C(r);$$

pero, por hipótesis, la igualdad anterior implica

$$A_1(\lambda) = A(r).$$

Luego, por (4), $\lambda \equiv r_1$, y de (5) resulta:

$$\frac{d\,r_1}{d\,r} \equiv 1$$

$$\therefore r_1 \equiv r.$$

3.3 *Si existe algún radio común $a > 0$ para el cual los círculos geodésicos con centros en P y P_1 tienen igual área, entonces existe un radio a'', comprendidos entre 0 y a, tal que los círculos con centros en P y P_1 y radios a'' y $r_1(a'')$, respectivamente, tienen curvaturas íntegras iguales.*

Demostración: en vista de 2.4, bastará probar que:

$$\int_0^r k\sqrt{g}\,d\,r = \int_0^{r_1} k_1\sqrt{g_1}\,d\,r_1 \quad \text{para} \quad r = a''.$$

Ahora, por (1):

$$\int_0^r k\sqrt{g}\,d\,r = -\int_0^r \frac{d^2\sqrt{g}}{d\,r^2}\,d\,r = 1 - \frac{d\sqrt{g}}{d\,r}.$$

Y análogamente:

$$\int_0^{r_1} k_1 \sqrt{g_1}\, d\, r_1 = 1 - \frac{d\sqrt{g_1}}{d\, r_1}.$$

Luego es suficiente demostrar que

$$\frac{d\sqrt{g}}{d\, r} = \frac{d\sqrt{g_1}}{d\, r_1} \quad \text{para} \quad r = a''.$$

Por (7):

$$\frac{d\sqrt{g_1}}{d\, r_1} - \frac{d\sqrt{g}}{d\, r} = \left[1 - \left(\frac{d\, r_1}{d\, r}\right)^2\right] \frac{d\sqrt{g_1}}{d\, r_1} - \sqrt{g_1}\, \frac{d^2\, r_1}{d\, r^2}$$

y por hipótesis:

$$r_1 - r = 0 \qquad \text{para} \quad r = 0, \ a.$$

$$\therefore \frac{d\, r_1}{d\, r} - 1 = 0 \qquad \text{para} \quad r = a', \ 0 < a' < a.$$

De donde

$$g_1 \left[1 - \left(\frac{d\, r_1}{d\, r}\right)^2\right] = 0 \qquad \text{para} \quad r = 0, \ a'.$$

Por consiguiente:

$$\frac{d}{d\, r}\left\{ g_1 \left[1 - \left(\frac{d\, r_1}{d\, r}\right)^2\right]\right\} = 0 \qquad \text{para} \quad r = a''; \ 0 < a'' < a'.$$

Pero

$$\frac{d}{d\, r}\left\{ g_1 \left[1 - \left(\frac{d\, r_1}{d\, r}\right)^2\right]\right\} =$$

$$2\sqrt{g_1}\frac{d r_1}{d r}\left\{\left[1-\left(\frac{d r_1}{d r}\right)^2\right]\frac{d\sqrt{g_1}}{d r_1}-\sqrt{g_1}\frac{d^2 r_1}{d r^2}\right\}$$

$$=2\sqrt{g_1}\frac{d r_1}{d r}\left(\frac{d\sqrt{g_1}}{d r_1}-\frac{d\sqrt{g}}{d r}\right) \tag{8}$$

$$\therefore \frac{d\sqrt{g_1}}{dr_1}-\frac{d\sqrt{g}}{dr}=O \qquad \text{para } r=a''$$

Por ser de igual área los círculos de radios a″ y r_1 (a″), resulta, como corolario, que las curvaturas medias en los dos círculos son iguales. Por tanto hay dos puntos, uno dentro de cada círculo, en que las curvaturas gaussianas son iguales. [3]

3.4 *Si las curvaturas medias en círculos de igual área con centros en P yP_1 son iguales, entonces las imágenes en P y P_1 son idénticas.*

Demostración: por hipótesis (veáse 3.3)

$$\frac{d\sqrt{g_1}}{d r_1}=\frac{d\sqrt{g}}{d r} \qquad \text{para toda r.}$$

Ahora, por (8):

$$\frac{d}{d r}\left\{g_1\left[1-\left(\frac{d r_1}{d r}\right)^2\right]\right\}\equiv 0$$

$$\therefore g_1\left[1-\left(\frac{d r_1}{d r}\right)^2\right]=\text{const.}=0,$$

ya que g_1 se anula para r = O. Por consiguiente

[3] A. Barajas y R Vázquez han obtenido, con anterioridad, el resultado siguiente: si A'_1 (a) = A (a), hay dos puntos, uno en cada círculo, *a igual distancia* de los centros respectivos, en los que curvaturas gaussianas son iguales. (Véase el artículo "Un Teorema relacionado con una conjetura de G. D. Birkhoff", que aparece en este mismo número.)

$$\frac{d\,r_1}{d\,r} \equiv 1,$$

de donde $r_1 \equiv r$.

3.5 *Si las curvaturas medias en las circunferencias de círculos de igual área con centros en P y P_1 son iguales, entonces las imágenes son idénticas.*

Demostración: se tiene:

$$\frac{d}{d\,r}\left(\frac{d\sqrt{g_1}}{d\,r_1} - \frac{d\sqrt{g}}{d\,r}\right) = \frac{d^2\sqrt{g_1}}{d\,r_1^2}\,\frac{d\,r_1}{d\,r} - \frac{d^2\sqrt{g}}{d\,r^2}$$

$$= -k_1\sqrt{g_1}\,\frac{dr_1}{dr} + k\sqrt{g},$$

en vista de (1). Ahora, por (6):

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{d\sqrt{g_1}}{dr_1} - \frac{d\sqrt{g}}{dr}\right) = (k - k_1)\sqrt{g}.$$

Por hipótesis:

$$k(r) = k_1(r_1)$$

$$\therefore \frac{d}{dr}\left(\frac{d\sqrt{g_1}}{dr_1} - \frac{d\sqrt{g}}{dr}\right) = 0;$$

luego $r_1 \equiv r$, por 3.4

3.6 *Si para círculos geodésicos de igual área con centros en P y P_1 la igualdad de curvaturas medias a lo largo de las circunferencias implica la igualdad de curvaturas medias dentro de los círculos correspondientes y además hay un cierto radio para el cual las áreas son iguales, entonces las imágenes en P y P_1 son idénticas.*

Demostración: se tiene (véase 3.5):

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{d\sqrt{g_1}}{dr_1} - \frac{d\sqrt{g}}{dr}\right) = (k - k_1)\sqrt{g}.$$

Como por hipótesis:

$$A_1 (a) = A (a), \; a > O$$

entonces

$$\frac{d\sqrt{g_1}}{dr_1} - \frac{d\sqrt{g}}{dr} = O \qquad \text{para } r = a' \qquad (O < a' < a)$$

y por tanto

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{d\sqrt{g_1}}{dr_1} - \frac{d\sqrt{g}}{dr}\right) = O \qquad \text{para } r = a'' \qquad (O < a'' < a').$$

Esto es,

$$k = k_1 \qquad \text{para } r = a''.$$

Ahora bien, por hipótesis, esto implica que

$$\frac{d\sqrt{g_1}}{dr_1} - \frac{d\sqrt{g}}{dr} = O \qquad \text{para } r = a''.$$

Repitiendo el razonamiento se llega a:

$$\frac{d\sqrt{g_1}}{dr_1} \equiv \frac{d\sqrt{g}}{dr}$$

Luego $r_1 \equiv r$.

3.7 *Si en todo punto P de una superficie, la curvatura gaussiana es igual a la curvatura media a lo largo de toda circunferencia geodésica con centro en P y para cada par de puntos de S existe un radio $a > O$ (no necesariamente el mismo para todo par de puntos) para el que las áreas de los círculos correspondientes son iguales, entonces la superficie es de curvatura constante.*

Demostración: por la primera hipótesis y por 2.5, la imagen es de curvatura constante; pero, por la segunda hipótesis y por el corolario de 3.3, todas las imágenes tienen la misma curvatura. Luego, por 2.2, la superficie es de curvatura constante.

Instituto de Matemáticas, U. N. A. M., 1945-1946.