FORMULACION DE UNA CONJETURA DE GEORGE D. BIRKHOFF MEDIANTE UNA ECUACION INTEGRAL

Por Garret Birkhoff *

Sea 0 un punto cualquiera de una superficie de Riemann. Existen en una vecindad de 0 coordenadas polares con polo en 0, tales que:

$$ds^2 = dr^2 + G(r, \Theta) d\Theta^2 \qquad (1)$$

Siendo las curvas $\Theta = \text{const.}$ las geodésicas que pasan por el origen 0. Se llama *círculo geodésico* con centro 0 y radio *a*, a la curva $C_a : r = a$. Dentro de cualquiera vecindad de 0 que, salvo en el polo, no contenga singularidades respecto al sistema de coordenadas, podemos definir el área $A(r)$ de Cr. La *circunferencia* $\int_{C_r} ds$ de C_r es [1] igual a la derivada $A'(r)$ de $A(r)$.

Teorema 1. *Si denotamos por γ la curvatura geodésica en $P(r, \Theta)$, entonces*

$$A''(r) = \int_{C_r} \gamma \, ds \qquad (2)$$

Demostración: en general, sea $C_\lambda :\ y = y\ (x; \lambda)$ una familia de curvas homeomorfas a círculos, y sea

$$ds = f(x, y, y')\, dx$$

cualquiera diferencial contravariante. Como en el cálculo de variaciones, obtenemos

$$\frac{d}{d\lambda} \int_{C_\lambda} ds = \int_{C_\lambda} \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) \right] \frac{\partial y}{\partial \lambda} dx \qquad (3)$$

---

* De la Universidad de Harvard, Cambridge, Mass.

1 W. Blaschke: "Vorlesungen Uber Differential Geometrie". I. New York. Dover Publications. 1945. Pág. 153,

Sobre una curva C_λ: $y=\lambda=\text{const}$; $y'=y''=0$ y

$$\frac{d}{dx}=\frac{\partial}{\partial x}+y'\frac{\partial}{\partial y}+y''\frac{\partial}{\partial y'}=\frac{\partial}{\partial x},$$

Con lo que (3) se reduce a:

$$\frac{d}{d\lambda}\int_{C_\lambda} ds=\int_{C_\lambda}\left[\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y'}\right]\frac{\partial y}{\partial \lambda}\,dx \qquad (3')$$

Ahora, la geodésica L_p tangente a C_λ en el punto P satisfará la ecuación:

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)$$

de Euler. Además, puesto que $y'=0$ según L_p en P, entonces:

$$\frac{\partial}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}+y''\frac{\partial}{\partial y'},$$

por lo que

$$\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y'}-y''\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2}=0,$$

según L_p, en P.

Se sigue de (3′) y (3″) que, si y'' representa la segunda derivada de y en la curva L_p, para el punto P, entonces

$$\frac{d}{d\lambda}\int_{C_\lambda} ds=\int_{C_\lambda}\left[y''\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2}\right]\frac{\partial y}{\partial \lambda}\,dx \qquad (4)$$

En nuestro caso particular, $\lambda=y=r$, $f=\sqrt{G+y'^2}$, $x=\Theta$ de modo que:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2}=\frac{1}{\sqrt{G+y'^2}}=\frac{1}{\sqrt{G}} \quad (y'=0)$$

y además $\dfrac{dy}{dy} = 1$; por consiguiente, (4) se reduce a:

$$A''(r) = \int_{C_r} r'' \frac{d\Theta}{\sqrt{G}} = \int_{Cr} \frac{r''}{G} ds \qquad (4')$$

Es fácil ver que $\dfrac{r''}{G} = \dfrac{d^2 r}{d s^2}$ sobre C_r, ya que $\dfrac{dr}{d\Theta} = 0$; además: $\dfrac{d^2 r}{d s^2} = \gamma$. Sustituyendo en (4′) se obtiene (2).

Recordemos ahora la ecuación de Gauss-Bonnet:

$$\int_{Cr} \gamma \, ds = 2\pi - \iint_{Ar} K(r, \Theta) dA \qquad (5)$$

donde A_r es la región encerrada por C_r, K es la curvatura gaussiana (intrínseca) de la superficie y $dA = \sqrt{G}\ dr\ d\Theta$ es la diferencial de área.

De (4′) y (5) obtenemos, integrando por partes desde $r = 0$ hasta $r = r_0$:

$$A'(r_0) = 2\pi r_0 - \int_{r=0}^{r_0} \int_{\Theta=0}^{2\pi} (r_0 - r) K(r, \Theta) dA \qquad (6)$$

Integrando a su vez la ecuación (6), que es lineal pero no homogénea en r, obtenemos:

$$A(r_0) = \pi - \frac{1}{2} \iint (r_0 - r)^2 K(r, \Theta) dA \qquad (7)$$

Las fórmulas (6) y (7) expresan la circunferencia y el área de Cr en términos de la curvatura gaussiana de la superficie.

G. D. Birkhoff ha conjeturado [2] que la igualdad de las áreas de todos los círculos geodésicos de cierto radio, digamos 1, en una superficie, implica que ésta es de curvatura gaussiana constante.

2 Véase el artículo "Teoremas sobre los círculos geodésicos y la Curvatura Gaussiana", por R. Vázquez y J. Barros Sierra, en este mismo número.

Parejamente, conjeturemos que la igualdad de todas las circunferencias de radio 1 implique que la superficie sea de curvatura constante.

Entonces podemos establecer el siguiente teorema.

Teorema 2. *La primera hipótesis equivale a:*

$\iint (1-r)^2 K(r,\Theta)\, dA = \text{const.}$ (8) *sobre todos los círculos de radio 1, en tanto que la segunda equivale a*

$$\iint (1-r) \quad K(r,\Theta)\, dA = \text{const.} \tag{9}$$

sobre todos los círculos de radio 1.

Instituto de Matemáticas, México, D. F., 1945.