UN TEOREMA RELACIONADO CON UNA CONJETURA DE G. D. BIRKHOFF *

Por Alberto Barajas y Roberto Vázquez

En este trabajo entenderemos por círculo geodésico en una superficie, el lugar de los puntos equidistantes de un punto fijo y por distancia entre dos puntos, la longitud del arco de geodésica que los une. Consideraremos únicamente superficies o porciones de superficie en las que por cada dos puntos distintos pasa una geodésica y sólo una.

G. D. Birkhoff ha conjeturado que si en una de estas superficies los círculos geodésicos de un mismo radio dado a tienen la misma área, la curvatura de la superficie es constante. Podemos conjeturar también que se cumple la misma conclusión si todas las circunferencias de radio a tienen igual longitud.

En relación con estas conjeturas demostraremos el teorema siguiente: *Si dos círculos geodésicos del mismo radio a y centros O y O_1 (pertenecientes a la misma superficie o a superficies distintas) tienen la misma área o la misma circunferencia, hay dos puntos P y P_1 tales que $OP = OP_1 < a$ que tienen la misma curvatura gaussiana; es decir, existen dos puntos interiores a los círculos, a la misma distancia de los centros, en los cuales la curvatura tiene el mismo valor.*

Como se sabe, la curvatura gaussiana satisface la ecuación diferencial

$$\frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial r^2} + K\sqrt{G} = 0 \qquad (1)$$

---

* Presentado en la IV Asamblea Regional de la Sociedad Matemática Mexicana, efectuada en Monterrey, N. L., del 13 al 18 de mayo de 1946.

donde r y Θ son las coordenadas polares geodésicas. En este sistema, $d\,s^2 = d\,r^2 + G\,d\,\Theta^2$. (K: curvatura gaussiana.)

El área de un círculo geodésico, cuyo centro es el polo de coordenadas es $\int\int \sqrt{G}\,d\,r\,d\,\Theta$

Por consiguiente, la primera hipótesis de nuestro teorema puede escribirse

$$\int_0^a \int_0^{2\pi} \sqrt{G}\,d\,r\,d\Theta = \int_0^a \int_0^{2\pi} \sqrt{G_1}\,d\,r\,d\Theta.$$

De esta igualdad se concluye

$$\sqrt{G\,(r_0, \Theta_0)} = \sqrt{G_1\,(r_0, \Theta_0)}, \quad 0 < r_0 < a$$

Consideremos las dos geodésicas $\Theta = \Theta_0$, una en cada círculo.

En estas geodésicas se tiene:

$$\frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial\, r^2} + K\sqrt{G} = 0; \quad \frac{\partial^2 \sqrt{G_1}}{\partial\, r^2} + K_1\sqrt{G_1} = 0$$

$$\therefore \sqrt{G_1}\frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial\, r^2} - \sqrt{G}\frac{\partial^2 \sqrt{G_1}}{\partial\, r^2} + (K - K_1)\sqrt{G}\sqrt{G_1} = 0;$$

$$\frac{\partial}{\partial\, r}\left(\sqrt{G_1}\frac{\partial \sqrt{G}}{\partial\, r} - \sqrt{G}\frac{\partial \sqrt{G_1}}{\partial\, r}\right) = (K_1 - K)\sqrt{G}\sqrt{G_1};$$

$$\sqrt{G_1}\frac{\partial \sqrt{G}}{\partial\, r} - \sqrt{G}\frac{\partial \sqrt{G_1}}{\partial\, r} = \int_0^r (K_1 - K)\sqrt{G}\sqrt{G_1}\,d\,r;$$

$$\frac{\sqrt{G_1}\dfrac{\partial \sqrt{G}}{\partial\, r} - \sqrt{G}\dfrac{\partial \sqrt{G_1}}{\partial\, r}}{G_1} = \frac{1}{G_1}\int_0^r (K_1 - K)\sqrt{G}\sqrt{G_1}\,d\,r.$$

$$\therefore \frac{\partial}{\partial\, r}\frac{\sqrt{G}}{\sqrt{G_1}} = \frac{1}{G_1}\int_0^r (K_1 - K)\sqrt{G}\sqrt{G_1}\,d\,r.$$

Puesto que $\dfrac{\sqrt{G}}{\sqrt{G_1}} = 1$ en el polo y en (r_0, Θ_0), $\therefore \dfrac{\partial}{\partial r} \dfrac{\sqrt{G}}{\sqrt{G_1}} = 0$

para $r = r_1$, $\Theta = \Theta_0$, donde $0 < r_1 < r_0$

$$\therefore \int_0^r (K_1 - K) \sqrt{G} \sqrt{G_1}\, d\, r = 0 \text{ para } r = r_1 \text{; luego:}$$

$$K_1 = K \text{ para } r = r_2, \ 0 < r_2 < r_1.$$

Así, las curvaturas son iguales para los puntos

$$P\,(r_2, \Theta_0) \text{ y } P_1\,(r_2, \Theta_0)\,;$$

Ahora, la segunda hipótesis se expresa por la igualdad:

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{G}\, d\, \Theta = \int_0^{2\pi} \sqrt{G_1}\, d\, \Theta.$$

Luego:

$$\sqrt{G\,(a, \Theta_0)} = \sqrt{G_1\,(a, \Theta_0)}$$

y por el mismo razonamiento anterior se concluye que las curvaturas son iguales en los puntos

$$P\,(r_2, \Theta_0) \text{ y } P_1\,(r_2, \Theta_0), \ 0 < r_2 < a.$$

Una generalización del teorema precedente es la que sigue: *Si se tiene en el sistema de coordenadas con origen en 0 una curva crrada* Γ *que encierra a 0 y cuya ecuación es* $r = f(\Theta)$ *y una curva cerrada* Γ_1 *que encierra a* 0_1, *y cuya ecuación en el sistema con origen en* 0_1 *es también* $r = f(\Theta)$, *y las áreas de las porciones de superficie comprendidas por* Γ *y* Γ_1 *son iguales, entonces hay dos puntos de coordenadas respectivamente iguales, dentro de* Γ *y* Γ_1, *en los que la curvatura gaussiana es la misma.*

En efecto, todos los razonamientos anteriores son válidos en este caso.

En el caso particular de los círculos geodésicos, dado que la geodésica $\Theta = 0$ en el sistema con origen en 0_1 puede ser cualquiera, resulta que hay dos curvas, una en cada región, tales que las curvaturas son iguales en puntos correspondientes.

En otro sentido, se obtiene la siguiente generalización: *si existe una* $a > 0$ *para la cual las áreas o las circunferencias de los círculos geodésicos con centros en* 0 *y* 0_1 *son iguales, entonces existen círculos concéntricos a aquéllos, con el mismo radio* $< a$ *en cuyas circunferencias la curvatura media es la misma.*

Demostración: para las imágenes en 0 y 0_1[1] se cumplen las mismas hipótesis. Por el teorema, en las imágenes se tienen puntos de igual curvatura equidistantes de los polos respectivos; pero dichas curvaturas son iguales a las curvaturas medias en las circunferencias del mismo radio con centros en 0 y 0_1.

---

1 Véase el artículo: "Teoremas sobre los círculos geodésicos y la curvatura gaussiana", por R. Vázquez y J. Barros Sierra, que aparece en este mismo número.