SOBRE LOS PROBLEMAS DE CONDICIONES A LA FRONTERA, EN UNA DIMENSION DE CARACTERISTICAS DISCONTINUAS.*

Dr. Marcos Moshinsky.

En el presente trabajo se trata de presentar el desarrollo de ciertos métodos matemáticos, que pueden aplicarse a un gran número de problemas físicos, especialmente dentro del campo de la teoría de las vibraciones libres de sistemas cuyas características físicas varían de una manera discontínua.

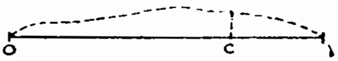
Empezaremos por ver un tipo de problema físico que nos lleva al problema matemático que tratemos de resolver.

Entre los múltiples problemas de vibraciones libres de sistemas cuyas características físicas varían de una manera discontínua, tenemos el de la vibración de un alambre de dos densidades como uno de los casos más sencillos, y lo utilizaremos como introducción al problema matemático que tratamos de resolver.

---

*Trabajo presentado en el II Congreso Nacional de Matemáticas. Mayo de 1945.

Vibración del alambre de dos densidades.



Consideremos un alambre de longitud unitaria y sección constante, sometida a una tensión T y supongamos que el alambre en lugar de estar compuesto de un solo material, esta formado, soldando en el punto c, dos alambres de igual sección y diferente densidad (Vgr. acero y latón), llamemos μ_1, μ_2 las densidades del alambre en (0,c) y (c,1), respectivamente y s el área de la sección del alambre.

Suponzemos que la vibración del alambre es provocada por el hecho de que en el instante $t = 0$, el alambre, deformado a la posición señalada con puntos en el dibujo, se suelta, poniéndose a vibrar. La velocidad inicial de los puntos del alambre la suponemos nula.

Indicaremos por $G(x)$, la función de x contínua y que se anula en los extremos 0 y 1 que representa a la curva señalada por la línea de puntos.

Tenemos entonces el siguiente problema matemático:

Encontrar una función $u(x,t)$, que representa el desplazamiento normal del alambre, definida para x en (0,1) y t en $(0,\infty)$ tal que:

1) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{1}{v_1^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, con $v_1 = \sqrt{\dfrac{T}{s\mu_1}}$, si x en (0,c),

2) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{1}{v_2^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, con $v_2 = \sqrt{\dfrac{T}{s\rho_2}}$, si x en (c,l),

3) $u(x,0) = G(x)$

4) $\left[\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right]_{t=0} = 0.$

5) Satisface las condiciones a la frontera:

i) $u(0,t) = 0$

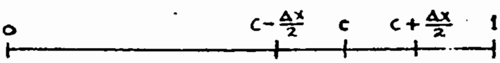
ii). $u(l,t) = 0$

y en el punto $x = c$ tenemos la condición:

iii) $u(c-0,t) = u(c+0,t)$

que nos representa la continuidad del desplazamiento en el punto c donde están soldados los dos alambres.

Además, considerando el segmento del alambre entre los puntos $c - \frac{\Delta x}{2}$ y $c + \frac{\Delta x}{2}$, vemos que la fuerza normal aplicada a el segmento, es evidentemente:



$$T\left[\frac{\partial u}{\partial x}\right]_{x=c+\frac{\Delta x}{2}} - T\left[\frac{\partial u}{\partial x}\right]_{x=c-\frac{\Delta x}{2}}$$

Ahora, si $\Delta x \to 0$, la fuerza aplicada al segmento debe tender a 0, porque si es finita provocaría el rompimiento del mismo, y de aquí tenemos la última condición a la frontera:

$$\text{iv)} \quad \left[\frac{\partial u}{\delta x}\right]_{x=c-0} = \left[\frac{\partial u}{\delta x}\right]_{x=c+0}$$

Por satisfacer $u(x,t)$ las condiciones (1), (4) y (5-i), cuando x en $(0,c)$ podemos poner:

$$6) \qquad u(x,t) = A \operatorname{sen} \frac{\omega}{v_1} x \cos \omega t \qquad \text{si } x \text{ en } (0,c)$$

y por satisfacer (2), (4) y (5-ii), cuando x en (c,l), podemos poner:

$$7) \qquad u(x,t) = A' \operatorname{sen} \frac{\omega}{v_2} (l-x) \cos \omega t \qquad \text{si } x \text{ en } (c,l),$$

donde A y A' son arbitrarias.

Aplicando ahora las condiciones (5-iii) y (5-iv), tenemos:

$$(8) \quad \begin{aligned} &(a) \qquad A \operatorname{sen} \frac{\omega}{v_1} c = A' \operatorname{sen} \frac{\omega}{v_2} (l-c) \\ &(b) \qquad \frac{1}{v_1} A \cos \frac{\omega}{v_1} c = - \frac{1}{v_2} A' \cos \frac{\omega}{v_2} (l-c) \end{aligned}$$

En esta par de ecuaciones $A, A' = 0$ a menos que ω sea tal que haga el determinante del sistema 0, es decir, el determinante de este sistema igualado a 0 nos va a determinar las frecuencias características de vibración.

Podemos obtener la función que nos va a dar los valores característicos dividiendo miembro a miembro las igualdades (8) y tenemos:

$$9)\qquad \frac{1}{v_1}\cot\frac{\omega}{v_1}c = -\frac{1}{v_2}\cot\frac{\omega}{v_2}(1-c)$$

Esta ecuación nos determina ω y es muy fácil de resolver gráficamente.

Vamos a suponer que las raíces de ésta ecuación son reales y su número es ∞ y numerable, y como si ω es raíz, $-\omega$ lo es también y no son linealmente independientes los valores de $u(x,t)$ correspondientes a ω y $-\omega$, vamos a considerar solo los valores positivos de ω que satisfacen (9) a los que ordenamos por magnitud y designaremos por ω_k, $k = 1,2, \ldots$

Definimos ahora una función $r_k(x)$ de la siguiente manera:

$$10)\qquad r_k(x) = \frac{\operatorname{sen}\dfrac{\omega_k x}{v_1}}{\operatorname{sen}\dfrac{\omega_k c}{v_1}}, \quad \text{si } x \text{ en } (0,c),$$

$$r_k(x) = \frac{\operatorname{sen}\dfrac{\omega_k(1-x)}{v_2}}{\operatorname{sen}\dfrac{\omega_k(1-c)}{v_2}} \quad \text{si } x \text{ en } (c,1),$$

Para $k = 1, 2, \ldots,$ y formemos ahora la función:

$$\text{11)} \qquad A_k\, r_k(x) \cos \omega_k t = u_k(x,t)$$

donde A_k es constante arbitraria.

Examinemos las propiedades de la función definida por (11).

Por la manera como fué definida $r_k(x)$, tenemos que $u_k(x,t)$ satisface (1) si x en $(0,c)$, (2) si x en $(c,1)$, las condiciones (5-i), (5-ii) y vemos que también satisface (5-iii) porque: $u_k(c-0,t) = A_k \cos \omega_k t = u_k(c+0,t)$ y satisface la condición (5-iv) si ω_k es raíz de (9) porque:

$$u_k'(c-0,t) = \frac{A_k\omega_k}{v_1} \cot \frac{\omega_k c}{v_1} \cos \omega_k t = - \frac{A_k\omega_k}{v_2} \cot \frac{\omega_k(1-c)}{v_2} \cos \omega_k t$$

$$= u_k'(c+0,t)$$

De manera que $u_k(x,t)$ por la forma que fué definida, satisface todas las condiciones del problema excepto la (3), para todo valor de k, y en tal caso, se tiene que, como el problema es lineal:

$$\text{12)} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} A_k\, r_k(x) \cos \omega_k t = u(x,t)$$

también es solución del problema, cuando la serie converge absoluta y uniformemente en unión de sus derivadas hasta el 2do. orden respecto a x y t.

Ahora, para $t = 0$, $u(x,0) = G(x)$, de manera que, si (12) es solución, es necesario que:

$$13) \qquad \sum_{k=1}^{\infty} A_k \, r_k(x) = G(x) ,$$

en el supuesto de que existen valores A_k tales que la serie (13) converja uniformemente y represente a la función $G(x)$. Vamos a determinar esos valores.

Para ello demostraremos una condición de ortogonalidad para las funciones $r_k(x)$.

Por la manera en que fué definida, vemos que r_k satisface:

$$14) \quad \begin{aligned} &(a) \quad \frac{d^2 r_k}{dx^2} + \frac{\omega_k^2}{v_1^2} r_k = 0, \quad \text{si } x \text{ en } (0,c) \\ &(b) \quad \frac{d^2 r_k}{dx^2} + \frac{\omega_k^2}{v_2^2} r_k = 0 \quad \text{si } x \text{ en } (c,1) \end{aligned}$$

y tenemos que $r_n(x)$ satisface las mismas relaciones, si en lugar de ω_k ponemos ω_n. De aquí, usando los procedimientos clásicos, llegamos a la conclusión:

$$(\omega_k^2 - \omega_n^2)\,\frac{1}{v_1^2}\int_0^c r_k(x)\; r_n(x)\; dx = \Big[r_k r_n' - r_n r_k'\Big]_0^c$$

15)

$$(\omega_k^2 - \omega_n^2)\,\frac{1}{v_2^2}\int_c^1 r_k(x)\; r_n(x)\; dx = \Big[r_k r_n' - r_n r_k'\Big]_c^1$$

No se verifica la ortogonalidad por separado, pero sumando y aprovechando que $r_k(x)$ satisface las condiciones (5) tenemos:

$$(\omega_k^2 - \omega_n^2)\left\{\int_0^c \frac{1}{v_1^2}\, r_k(x)\; r_n(x)\; dx + \int_c^1 \frac{1}{v_2^2}\, r_k(x)\; r_n(x)\; dx\right\} = 0$$

Y de aquí si $k \neq n$ y por lo tanto $\omega_k \neq \omega_n$ se tiene la condición de ortogonalidad:

16) $$\int_0^c \frac{1}{v_1^2}\, r_k(x)\; r_n(x)\; dx + \int_c^1 \frac{1}{v_2^2}\, r_k(x)\; r_n(x)\; dx = 0$$

si $k \neq n$ ..

Vemos que esta condición de ortogonalidad para la función $r_k(x)$, se distingue de la condición corriente, por el hecho de que en el subintervalo $(0,c)$ tiene un "peso" $\frac{1}{v_1^2}$, y en el subintervalo $(c,1)$ un "peso" $\frac{1}{v_2^2}$, es decir, el "peso" de la función en $(0,1)$ varía de manera discontínua al pasar el punto c.

Con la fórmula (16) podemos encontrar A_k.

Aprovechando (13) construyamos la integral siguiente:

17)
$$\int_0^c \frac{1}{v_1^2} G(x)\, r_k(x)\, dx + \int_c^1 \frac{1}{v_2^2} G(x)\, r_k(x)\, dx$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} A_n \left\{ \int_0^c \frac{1}{v_1^2} r_n(x) r_k(x) dx + \int_c^1 \frac{1}{v_2^2} r_n(x) r_k(x) dx \right\}$$

Aprovechando la condición (16), deducimos que A_k tiene el valor:

18)
$$A_k = \frac{\int_0^c \frac{1}{v_1^2} G(x)\, r_k(x)\, dx + \int_c^1 \frac{1}{v_2^2} G(x)\, r_k(x)\, dx}{\int_0^c \frac{1}{v_1^2}\, r_k(x)^2\, dx + \int_c^1 \frac{1}{v_2^2}\, r_k(x)^2\, dx}$$

Tenemos entonces que (12) representa la solución del problema con $r_k(x)$ definida por (10) y A_k definida por (18).

La solución de este problema se hizo de una manera puramente formal y para obtener el resultado final, hicimos una serie de suposiciones durante el desarrollo, que son las siguientes:

(A) Que la ecuación (9) que nos determina las frecuencias características, tiene una infinidad numerable de raíces.

(B) Que las raíces de la ecuación (9) son reales.

(C) Supusimos, (y este es el punto más importante), que es factible un desarrollo en serie de una función $G(x)$ contínua, con primera y segunda derivadas seccionalmente continuas y que se anulan para $x = 0$ y $x = 1$, por medio de las funciones $r_k(x)$, siendo la serie uniformemente convergente en $(0,1)$.

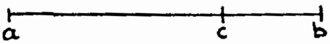
(D) Finalmente, hacemos la suposición de que la serie (12) con los coeficientes determinados por (13), se puede derivar término a término hasta el 2do. orden respecto a x y t, y la serie resultante sigue siendo uniformemente convergente.

Problemas de condiciones a la frontera en una dimensión de características discontínuas.

Para la demostración de las suposiciones A-D, vamos a ver si problemas de condiciones a la frontera del tipo de las que acabamos de presentar, son reducibles a ecuaciones integrales, y en caso de serlo, veremos si es aplicable a esas ecuaciones la teoría de Hilbert-Schmidt que nos permite afirmar que las suposiciones A-C son validad, y que no dá un criterio para saber en que condición lo es D.

Nos planteamos el siguiente problema:

Sea (a,b) un intervalo cualquiera finito, y c un punto en el intervalo que nos define los subintervalos (a,c) y



(c,b) . En (a,c) supongamos definidas las funciones $q_1(x), w_1(x)$ continuas y $p_1(x)$ continua, con primera derivada continua, suponemos $p_1(x) \neq 0$ en (a,c) . En (c,b) supongamos definidas las funciones $q_2(x)$, $w_2(x)$ continuas y $p_q(x)$ continua, con primera derivada continua y $p_2(x) \neq 0$ en (c,b). Para fijar las ideas, supongamos $p_1(x)$, $p_2(x) > 0$ en los subintervalos en que estan definidas.

Tendremos además que, por lo menos una de las siguientes desigualdades se cumple en $x = c$:

$$p_1(c) \neq p_2(c) \;, \qquad q_1(c) \neq q_2(c) \;, \qquad w_1(c) \neq w_2(c)$$

$$p_1'(c) \neq p_2'(c)$$

Buscamos una $u(x)$ definida en (a,b) , continua y con sus derivadas hasta el 2do. orden continuas en (a,c) y (c,b) y que satisfaga las siguientes condiciones:

19) $(p_1u')' + q_1u + \lambda w_1u \equiv L_1(u) + \lambda w_1u = 0$ si x en (a,c)

20) $(p_2u')' + q_2u + \lambda w_2u \equiv L_2(u) + \lambda w_2u = 0$ si x en (c,b)

21) $Au(a) + Bu'(a) \equiv R_1(u) = 0$

22) $Cu(b) + Du'(b) \equiv R_2(u) = 0$

23) $u(c-0) = u(c+0)$

24) $p_1(c)\ u'(c-0) = p_2(c)\ u'(c+0)$

Por $'$ indicamos la derivación con respecto a x. La notación $R_1(u)$, $R_2(u)$, $L_1(u)$, $L_2(u)$, se usa para ahorrar espacio y λ es una constante arbitraria, tal que sólo para valores especiales de λ, que serán los valores característicos del problema, existe $u(x) \neq 0$ que satisface las condiciones del problema.

Vamos a demostrar que encontrar los valores de λ característicos y las funciones $u(x)$ correspondientes del problema (19-24), es completamente equivalente a resolver la ecuación integral:

25) $$u(x) = \lambda \left[\int_a^c K(x,t)\ w_1(t)\ u(t)\ dt + \int_c^b K(x,t)\ w_2(t)\ u(t)\ dt \right]$$

Donde $K(x,t)$ es una función apropiadamente definida de x y t en (a,b) y que es simétrica en x y t.

Demostremos como se puede definir una $K(x,t)$ tal que con ayuda de ella se pueda mostrar la equivalencia de los problemas (19-24) y (25). Trataremos aquí sólo el caso de que $\lambda = 0$ no sea valor característico.

26) Definición de $K(x,t)$

I) $K(x,t)$ es función continua de x en (a,b) para todo valor dado, fijo de t.

II) Para una t fija, $K(x,t)$ considerada como función de x satisface:

$$R_1\left[K(x,t)\right] = 0, \qquad R_2\left[K(x,t)\right] = 0$$

$$p_1(c)\, K'(c-0,t) = p_2(c)\, K'(c+0,t) .$$

Para t en el subintervalo (a,c)

III) La primera y segunda derivada de $K(x,t)$ respecto a x, son continuas para x en (a,t), (t,c) y (c,b).

IV) En el subintervalo (a,t) y en el (t,c) se satisface la ecuación $L_1\left[K(x,t)\right] = 0$.

V) En el subintervalo (c,b) se satisface la ecuación $L_2\left[K(x,t)\right] = 0$ (Los operadores L_1, L_2 aplicados a $K(x,t)$ como función de x).

VI) En el punto $x = t$ se verifica la relación:

$$\lim_{\delta\to 0}\left[\frac{\partial}{\partial x}K(x,t)\right]_{x=t-\delta}^{x=t+\delta} = -\frac{1}{p_1(t)}$$

Para t en el subintervalo (c,b).

VII) La primera y segunda derivadas de $K(x,t)$ respecto a x son continuas en los subintervalos (a,c), $(c,t$ y (t,b).

VIII) En el subintervalo (a,c) se satisface $L_1\left[K(x,t)\right] = 0$

IX) En los subintervalos (c,t) y (t,b) se satisfacen las ecuaciones $L_2\left[K(x,t)\right] = 0$ (Los operadores L_1, L_2 aplicados a $K(x,t)$ como función de x).

X) En el punto $x = t$ se verifica la relación:

$$\lim_{\delta \to 0} \left[\frac{\partial}{\partial x} K(x,t)\right]_{x=t-\delta}^{x=t+\delta} = -\frac{1}{p_2(t)}$$

Desde luego es fácil ver que $K(x,t) = K(t,x)$ es decir, que $K(x,t)$ es simétrica. Esto se ve poniendo simplemente $K(x,\xi) = r(x)$ y $K(x,\eta) = s(x)$ donde $a \leq \xi \leq \eta \leq b$ y siguiendo razonamientos similares a los de los casos clásicos, se llega a la conclusión de que $K(\xi,\eta) = K(\eta,\xi)$.[1]

La función $K(x,t)$ como esta definida, es única en caso de que $\lambda = 0$ no sea valor característico de nuestro problema, porque en caso de haber otra función que satisficiera esas condiciones que designaremos por $J(x,t)$; $K(x,t)-J(x,t)$ para cualquier valor fijo de t, nos dá una función $\alpha(x)$ que, evidentemente, es función característica para el valor $\lambda = 0$ y como suponemos que $\lambda = 0$ no es valor característico, entonces $\alpha(x) = 0$ y $J(x,t) = K(x,t)$.

[1] Courant und Hilbert-Methoden der Mathematischen Physik (p.304-5).

Vamos a demostrar que con ayuda de $K(x,t)$ definida por (26), el problema (19-24) se reduce al problema (25).

Empezaremos por mostrar que toda solución del sistema (19-24) satisface (25).

Supongamos a t en (a,c), y en tal caso:

$$L_1(u) = -\lambda w_1 u \qquad \text{si} \quad x \quad \text{en } (a,c)$$

$$L_2(u) = -\lambda w_2 u \qquad \text{si} \quad x \quad \text{en } (c,b)$$

$$L_1\left[K(x,t)\right] = 0 \qquad \text{si} \quad x \quad \text{en } (a,t),(t,c) \text{ separadamente}$$

y $$L_2\left[K(x,t)\right] = 0 \qquad \text{si} \quad x \quad \text{en } (c,b).$$

De las expresiones anteriores vemos que:

$$\int_a^t \left[u\, L_1(K) - K\, L_1(u)\right] dx + \int_t^c \left[u\, L_1(K) - K\, L_1(u)\right] dx$$
$$+ \int_c^b \left[u\, L_2(K) - K\, L_2(u)\right] dx = \lambda \int_a^c K(x,t)\, w_1(x)\, u(x)\, dx$$
$$+ \lambda \int_c^b K(x,t)\, w_2(x)\, u(x)\, dx$$

De la forma de los operadores L_1 y L_2 tenemos:

$$\left[p_1(x)\left\{u(x)\, K'(x,t) - K(x,t)\, u'(x)\right\}\right]_a^t + \left[p_1(x)\left\{u(x) K'(x,t)\right.\right.$$
$$\left.\left. - K(x,t)\, u'(x)\right\}\right]_t^c + \left[p_2(x)\left\{u(x)\, K'(x,t) - K(x,t)\, u'(x)\right\}\right]_c^b =$$
$$\lambda \int_a^c K(x,t)\, w_1(x)\, u(x)\, dx + \lambda \int_c^b K(x,t)\, w_2(x)\, u(x)\, dx .$$

Aprovechando las condiciones en $x = a,b,c$ y la condición de discontinuidad de $K'(x,t)$ cuando $x = t$, se llega fácilmente a la conclusión de que:

$$29) \quad u(t) = \lambda \int_a^c K(x,t)\, w_1(x)\, u(x)\, dx + \lambda \int_c^b K(x,t)\, w_2(x)\, u(x)\, dx .$$

si t en (a,c) y la demostración es análoga si t en (c,b), de donde (29) es válido para t en (a,b).

Intercambiando las variables x y t y recordando que $K(x,t)$ es simétrica, llegamos a la conclusión de toda solución de (19-24) satisface la ecuación integral (25).

Partamos ahora de la ecuación (25) suponiendo inicialmente que x está en (a,c) y escribimos (25) bajo la forma:

$$30) \quad u(x) = \lambda \int_a^x K(x,t)w_1(t)u(t)dt + \lambda \int_x^c K(x,t)w_1(t)u(t)dt + \lambda \int_c^b K(x,t)w_2(t)u(t)dt .$$

Ahora, para t en (a,x), (x,b) y (c,b) se tiene que $K(x,t)$ es función continua de x y t y su primera y segunda derivada respecto a x, existen y son funciones continuas de x.

Derivando la expresión (30) respecto a x según las reglas bien conocidas, se tiene:

$$u'(x) = \lambda \int_a^x K'(x,t)w_1(t)u(t)dt+\lambda \int_x^c K'(x,t)w_1(t)u(t)dt$$

$$31) \qquad + \lambda \int_c^b K'(x,t)w_2(t)u(t)dt+\lambda w_1(x)u(x)\left[K(x,x-0)-K(x,x+0)\right]$$

Pero la continuidad de $K(x,t)$ nos elimina el último término.

Volviendo a derivar se tiene:

$$u''(x) = \lambda \int_a^x K''(x,t)\ w_1(t)\ u(t)\ dt$$

$$32) \qquad + \lambda \int_c^c K''(x,t)w_1(t)u(t)dt+\lambda\int_c^b K''(x,t)w_2(t)u(t)dt$$

$$+ \lambda \left[K'(x,x-0) - K'(x,x+0)\right] w_1(x)u(x)$$

Multiplicando (30) por $q_1+\lambda w_1$, (31) por $p_1'(x)$ y (32) por $p_1(x)$ y sumando, se tiene:

$$L_1(u) = \lambda\int_a^x L_1\left[K(x,t)\right] w_1(t)u(t)dt$$

$$33) \qquad +\lambda\int_x^c L_1[K(x,t)]w_1(t)u(t)dt+\lambda\int_c^b L_1[K(x,t)]w_2(t)u(t)dt$$

$$+\lambda[K'(x,x-0) -K'(x,x+0)]p_1(x)w_1(x)u(x)$$

Como supusimos x en (a,c), por la definición de $K(x,t)$ se tiene que:

34) $$L_1\left[K(x,t)\right] = 0 \quad \text{para toda} \quad t \quad \text{en } (a,b),$$

y aprovechando la condición de discontinuidad de la primera derivada si $x = t$, se tiene finalmente que:

34) $$L_1(u) = -\lambda\, w_1(u) \,, \quad \text{si} \quad x \quad \text{en } (a,c)$$

De manera análoga se demuestra que:

35) $$L_2(u) = -\lambda\, w_2\, u \,, \quad \text{si} \quad x \quad \text{en } (c,b).$$

Las condiciones a la frontera (21) a (24), es fácil ver que las satisface $u(x)$, por satisfacerlas $K(x,t)$ para cualquier t, vgr.:

36) $$\begin{aligned} R_1(u) &= \lambda \int_a^c R_1\left[K(x,t)\right] w_1(t)\, u(t)\, dt \\ &+ \lambda \int_c^b R_1\left[K(x,t)\right] w_2(t)\, u(t)\, dt = 0 \end{aligned}$$

porque $R_1\left[K(x,t)\right] = 0$ para toda t, por (26-II).

Hemos demostrado pues, la completa equivalencia entre el problema (19-24) y el (25), con la $K(x,t)$ definida por (26), nos falta probar que $K(x,t)$ como esta definida, existe.

Consideremos primero a las ecuaciones:

37) $$\begin{aligned} &a) \quad \left[p_1(x)\, r'(x)\right]' + q_1(x)\, r(x) = 0 \quad \text{si } x \quad \text{en } (a,c) \\ &b) \quad \left[p_2(x)\, s'(x)\right]' + q_2(x)\, s(x) = 0 \quad \text{si } x \quad \text{en } (c,b) \end{aligned}$$

No anulándose las $p_1(x)$, $p_2(x)$ en sus respectivos subintervalos, existen dos funciones linealmente independientes $r_1(x)$, $r_2(x)$, con derivadas cóntinuas hasta el segundo orden que satisfacen (37-a) si x en (a,c) y dos funciones continuas con derivadas hasta de segundo orden continuas y linealmente independientes, $s_1(x)$, $s_2(x)$ que satisfacen (37-b) si x en (c,b).

Supongamos ahora que t se encuentra en (a,c), en tal caso, podemos poner $K(x,t)$ bajo la forma:

$$\begin{array}{llll} & (i) & K(x,t) = a_1 r_1(x) + a_2 r_2(x), & \text{si } x \text{ en } (a,t), \\ 38) & (ii) & K(x,t) = a_3 r_1(x) + a_4 r_2(x), & \text{si } x \text{ en } (t,c), \\ & (iii) & K(x,t) = a_5 s_1(x) + a_6 s_6(x), & \text{si } x \text{ en } (c,b). \end{array}$$

Donde en general, $a_1, \ldots, a_6$ son funciones de t.

Volviendo a (26), vemos que $K(x,t)$ satisface las condiciones III, IV, V de (26), y para que satisfaga (I) y (VI), tenemos:

$$\begin{array}{lll} & (i) & (a_1-a_3)\, r_1(t) + (a_2-a_4)\, r_2(t) = 0 \\ 39) & & \\ & (ii) & (a_1-a_3)\, r_1'(t) + (a_2-a_4)\, r_2'(t) = \dfrac{1}{p_1(t)} \end{array}$$

Esto nos despeja a_1-a_3 y a_2-a_4 en función de t, porque el determinante del sistema es $r_1(t)\ r_2'(t)-r_1'(t)\ r_2(t)$

que es Wrosnkiano de dos funciones linealmente independientes y es por lo tanto, diferente de 0 para toda t.

Para satisfacer la condición II de (26), tenemos que $a_1, \ldots, a_6$ satisfacen las siguientes relaciones:

$$(i) \quad A[a_1r_1(a)+a_2r_2(a)]+B[a_1r_1'(a)+a_2r_2'(a)]=0$$

$$(ii) \quad a_3r_1(c)+a_4r_2(c)=a_5s_1(c)+a_6s_2(c)$$

40)

$$(iii) \quad p_1(c)\; a_3r_1'(c)+a_4r_2'(c) = p_2(c)\; a_5s_1'(c)+a_6s_2'(c)$$

$$(iv) \quad C[a_5s_1(b)+a_6s_2(b)]+D[a_5s_1'(b)+a_6s_2'(b)]=0$$

Podemos modificar (i) restando y sumando $R_1\; a_3r_1(x)+a_4r_2(x)$ y se tiene entonces:

40) (i')
$$\begin{aligned} &A[a_3r_1(a)+a_4r_2(a)]+B[a_3r_1'(a)+a_4r_2'(a)] \\ &= A[(a_3-a_1)r_1(a)+(a_4-a_2)r_2(a)] \\ &+ B[(a_3-a_1)r_1'(a)+(a_4-a_2)r_2'(a)] \end{aligned}$$

Pero a_1-a_3 y a_2-a_4 están determinadas, de manera que las ecuaciones (40), poniendo (i') en lugar de (i), nos dan 4 ecuaciones para determinar las 4 incógnitas a_3, a_4, a_5 y a_6, y es fácil ver que el determinante del sistema no es 0, porque en caso de serlo, vemos fácilmente que $\lambda=0$ sería valor característico de nuestro problema, lo que esta en contradicción con nuestras hipótesis.

Vemos entonces que se pueden determinar $a_1, \ldots, a_6$ para que las $K(x,t)$ bajo la forma de (38) satisfagan las condiciones I a VI de (26) si t en (a,c), y cosa análoga se hace si t está en (c,b) y vemos que $K(x,t)$ definida por (26) existe.

Hemos reducido el problema (19-24) al (25) con ayuda de una función $K(x,t)$ cuya existencia acabamos de demostrar. Llamemos $w(x)$ a la función de x definida en (a,b), tal que $w(x) = w_1(x)$ si x en (a,c) y $w(x) = w_2(x)$ si x en (c,b).

La ecuación integral que tenemos que resolver es:

$$41) \qquad u(x) = \lambda \int_a^b K(x,t)\, w(t)\, u(t)\, dt \,.$$

Donde $K(x,t)$ es una función continua y simétrica de x y t en (a,b) y $w(t)$ es continua con excepción del punto $t = c$.

Se presentan varios casos para (41), según sean las características de $w(x)$, pero el que más nos interesa es aquél en que $w(x)$ 0 para x en (a,b) y en el que $K(x,t)$ es un "kernel" positivo y definido, lo que significa que:

$$\int_a^b \int_a^b K(x,t)\, h(x)\, h(t)\, dt\, dx > 0$$

para toda $h(x)$ seccionalmente continua que no es idéntica mente nula.

En tal caso, poniendo $v(x) = \sqrt{w(x)}\, u(x)$, tenemos multiplicando (41) por $\sqrt{w(x)}$ que:

$$42) \qquad v(x) = \lambda \int_a^b H(x,t)\, v(t)\, dt$$

donde $H(x,t) = K(x,t) \cdot \sqrt{w(x)} \cdot \sqrt{w(t)}$ y por lo tanto, simétrico y continuo, excepto para x , t =

Para el tipo de ecuación (42), podemos utilizar los resultados de la teoría de Hilbert-Schmidt para las ecuaciones integrales de Kernel simétrico.[2]

Para el problema (42), tenemos que los valores característicos λ son reales (Lovitt-p.129), que su número es ∞ (Lovitt,p.183) y numerable por ser los valores característicos raíces de una función analítica en todo el plano complejo (Lovitt-p.32-33).

A cada valor característico corresponde sólo una función característica linealmente independiente y las funciones características correspondientes a valores característicos diferentes son ortogonales y podemos normalizarlas de manera que:

$$\int_a^b v_j(x)\, v_i(x)\, dx = \int_a^b w(x)\, u_j(x)\, u_i(x)\, dx = \begin{matrix} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{matrix}$$

[2] Lovitt-Linear Integral Equations-Cap. V-VI.- Courant und Hilbert-Methoden der Mathematischen Physik - Cap. III y V.

Respecto al teorema del desarrollo en serie tenemos que si $F(x)$ es una función de x tal que $F(x) = \sqrt{w(x)}\ G(x)$, donde $G(x)$ satisface las condiciones a la frontera en $x = a, c, b$, es continua en (a,b) y tiene primera y segunda derivadas seccionalmente continuas, entonces:

$$F(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \left\{ \int_a^b F(t)\ v_j(t)\ dt \right\} v_j(x)$$

y esto implica que:

$$G(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \left\{ \int_a^c w_1(t)\ G(t)\ u_j(t)\ dt + \int_c^b w_q(t) G(t) u_j(t) dt \right\} u_j(x)$$

Siendo la serie absoluta y uniformemente convergente, y representando a la función.

(La demostración se hace en forma parecida a la de Lovitt, p.158-182, Courant und Hilbert, p.114-115 y 309-313).

Respecto a la condición D, pag.10, podemos imponer a la $G(x)$ algunas restricciones más (derivadas continuas - hasta el segundo orden y seccionalmente continuas hasta el cuarto, etc.) y en tal caso, se satisfacen las condiciones D también.

El problema que tratamos al principio, es un caso particular de la teoría desarrollada, y por tanto, todos los resultados obtenidos se aplican a él.

GENERALIZACION Y APLICACIONES.

Una generalización inmediata y que no introduce nada nuevo en la teoría, es aquella en que en lugar de un solo punto c que nos da dos subintervalos, tenemos n puntos $c_1 \ldots c_n$ que nos dan $n+1$ subintervalos, a cada uno de los cuales asociamos una ecuación del tipo (19) y en cada punto c_i tenemos condiciones a la frontera análogas a las (23-24). Una aplicación de esto es a la vibración de un alambre compuesto de varios segmentos de diferentes densidades.

Se ha generalizado el problema a ecuaciones diferenciales lineales de orden superior y a condiciones a la frontera mucho más generales, como sucede en el caso en que se tome un segmento (a,b), dividido en dos subintervalos (a,c) y (c,b), al primero de los cuales se asocia un operador diferencial lineal ordinario de orden n, y al segundo un operador diferencial lineal ordinario de orden m y suponiendo $m+n$ combinaciones lineales de $u(x)$ y sus primeras $n-1$ derivadas en $x = a$ o $c-0$ y de sus primeras $m-1$ derivadas en $x = c+0$ o $x = b$, igualadas a 0 y que sean linealmente independientes.

Se pueden generalizar los resultados obtenidos a mas de una dimensión, pero es fácil ver que todos los problemas de mas de una dimensión, de condiciones a la frontera con características discontinuas, que sean separables, es decir, en las que la función característica sea expresable por un producto de funciones características, cada una de las cuales depende de una sola variable, se pueden reducir a problemas de condiciones a la frontera en una sola dimensión y tratarse por los métodos aquí expuestos. Así por ejemplo, se puede tratar el caso de la vibración de la membrana circular de dos densidades. La teoría desarrollada tiene aplicación a múltiples sistemas vibratorios y también puede aplicarse a problemas de la física atómica, como vgs. a la ecuación de Schrödinger en la que el potencial varía de manera discontinua.

Institutos de Física y de
Geofísica de la U.N.A.M.