UNA RELACION ENTRE EL NUMERO CARDINAL DE UN CONJUNTO Y SU CARACTER DE SER GRUPO*

Por R. Vázquez García y E. Valle Flores.

1. INTRODUCCION. Es bien conocido[1] que tratándose de grupos finitos, el axioma de la posibilidad de las divisiones izquierda y derecha que aparece en la definición de ellos, puede ser reemplazado por el axioma de la unicidad de las divisiones o leyes de cancelación. De otro modo: los semigrupos de Dickson[2] que tengan un orden finito, resultan necesariamente grupos. En este trabajo se estudia la situación recíproca, concluyéndose la finitud de todo conjunto que resulte ser grupo respecto a cualquiera de las operaciones definidas en él, que sean cerradas, asociativas y que satisfagan las dos leyes de cancelación. De otro modo; se concluye

---

*Presentado ante la IV Asamblea Regional de la Sociedad Matemática Mexicana, que tuvo lugar en la Ciudad de Monterrey del 13 al 18 de Mayo de 1946.

(1) Véase [1], pág. 17 de la bibliografía que figura al final del trabajo.

(2) La definición figura en [2], No. 2, pág. 205.

que todo conjunto que resulte grupo siempre que sea semigrupo, debe necesariamente tener un número finito de elementos. (Teorema siguiente)

Con más precisión:

<u>Dado un conjunto</u> $M \neq 0$, <u>sea</u> L_M <u>la familia de operaciones binarias definidas en</u> M[3] <u>y que satisfagan</u>:

i) M <u>es cerrado</u>[4] <u>respecto a cualquiera de ellas</u>.

ii) <u>son asociativas</u>.

iii) <u>cumplen con las leyes de cancelación izquierda y derecha</u>.

<u>Entonces si</u> M <u>es finito</u>, <u>es</u> $L_M \neq 0$ <u>y</u> M <u>resulta grupo respecto a cualquier elemento de</u> L_M <u>y recíprocamente vale el</u>:

TEOREMA: <u>Si</u> $L_M \neq 0$ <u>y</u> M <u>es grupo respecto a cada uno de los elementos de</u> L_M, <u>entonces</u> M <u>es finito</u>.

2. Respecto a la proposición directa, es fácil ver que $L_M \neq 0$. En efecto, sean $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ los elementos de M; un miembro de L_M se determina del siguiente modo

$$a_p \cdot a_q = a_r ,$$

---

(3) Esto es funciones cuyo dominio es el producto cartesiano $M \times M$.

(4) O sea, el resultado de la operación es siempre un elemento de M.

donde $0 \leq p \leq n-1$; $0 \leq q \leq n-1$; $0 \leq r \leq n-1$; $r \equiv p + q$ (n). Entonces los axiomas para un semigrupo de Dickson se comprueban con facilidad. Además la conocida demostración de que M resulta grupo respecto a todo miembro de L_M, figura en[1], por ejemplo.

3. Respecto a la proposición recíproca, demostraremos en primer lugar el

LEMA. Sean R y $\bar{R}$ dos conjuntos no vacíos equipotentes, sea $L_R \neq 0$ y supongamos además que R no es grupo respecto a cierta operación $f \in L_R$. Entonces existe una operación $\bar{f} \in L_{\bar{R}}$ respecto de la cual $\bar{R}$ no es grupo.

En efecto, sea $a \leftrightarrow \bar{a}$ una correspondencia biunívoca de R y $\bar{R}$. Definimos entonces $\bar{f}$ del modo siguiente

$$\bar{f}(\bar{a},\bar{b}) = \overline{ab} ,$$

donde $ab = f(a,b)$ es el resultado obtenido al ejecutar la operación f con a y b. Así resultan R y $\bar{R}$ isomorfos relativamente a sus operaciones f y $\bar{f}$. Entonces $\bar{f} \in L_{\bar{R}}$ y $\bar{R}$ no puede ser grupo respecto a $\bar{f}$ y queda el Lema demostrado.

Supongamos ahora que M es infinito y que $L_M \neq 0$. Sean $a, b, c, \ldots,$ los elementos de M; definamos $M_n (n=1,2,3,\ldots)$ como el conjunto de elementos que resultan agregando el mismo índice n a los de M. Entonces M_n se compone de los objetos a_n, b_n, c_n, ... y por consiguiente M y M_n son coordinables.

Sabiendo además que $f \in L_M$ y e s c r i b i e n d o $f(a,b) = ab$, vamos a formar a continuación un semigrupo de Dickson con los elementos de

$$\overline{M} = \sum_{n=1}^{\infty} M_n .$$

Definimos en primer lugar para dos elementos cualesquiera de $\overline{M}$, $a_n = b_m$ como $a = b$ y $m = n$. Como operación $\overline{f}$ entre los elementos de $\overline{M}$ tomamos la siguiente

$$\overline{f}(a_m, b_n) = a_m b_n = c_{m+n} ,$$

donde $ab = c$ (en M), esto es:

$$a_m b_n = (ab)_{m+n}.$$

Veremos enseguida que la operación $\overline{f}$ está en $L_{\overline{M}}$.

1o. Evidentemente es $\overline{M}$ cerrado respecto a $\overline{f}$.

2o. Se tiene

$$a_m(b_n c_p) = a_m(bc)_{n+p} = [a(bc)]_{m+n+p} = [(ab)c]_{m+n+p}$$

$$= (ab)_{m+n}\, c_p = (a_m b_n)\, c_p .$$

3o. De $a_m b_n = a_m c_p$ se sigue que

$$(ab)_{m+n} = (ac)_{m+p} .$$

Con lo cual es $m+n = m+p$ y $ab = ac$. Luego $n = p$ y $b = c$ y entonces $b_n = c_p$. Se satisface entonces la ley de cancelación izquierda y análogamente se prueba la otra ley de cancelación.

En resumen $\bar{f} \in L_{\bar{M}}$. Ahora en $\bar{M}$ no puede haber elemento unitario ya que si fuera $a_m e_k = a_m$, se tendría $m+k=m$ y entonces $k = 0$. Luego e_k no puede pertenecer a ninguna M_n.

Por otro lado si $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ designen respectivamente los números cardinales de $\bar{M}$ y M se tiene(5)

$$\mathfrak{n} \leq \mathfrak{m} = \aleph_0 \mathfrak{n} \leq \mathfrak{n}\mathfrak{n} = \mathfrak{n}^2 .$$

Pero, como es sabido,(6) por la infinitud de M es $\mathfrak{n}^2 = \mathfrak{n}$. Luego $\mathfrak{m} = \mathfrak{n}$ y $\bar{M}$ y M son equipotentes.

Entonces utilizando el lema concluímos que hay una operación que figura en L_M y con respecto a la cual M no es grupo. Así, el teorema se ha demostrado.

BIBLIOGRAFIA.

[1] B.L. Van der Waerden. "Moderne Algebra", zweite auflage. Julius Springer, Berlin 1940.

---

(5) $\aleph_0$ designa al cardinal del conjunto de los naturales.
(6) Por ejemplo [3], *8.621, pág. 34.

[2] L.E. Dickson. "On semigroups and the general isomorfism between infinite groups". Transactions of the American Mathematical Society. Vol. 6 (1905), págs. 205 a 208.

[3] Kurt Gödel. "The Consistency of the continuum hypothesis" Annals of Mathematics Studies, No. 3, Princeton 1940.

Instituto de Matemáticas
U. N. A. M.