PRINCIPIOS DE CONSERVACION EN LA TEORIA DE LA GRAVITACION DE BIRKHOFF*.

Carlos Graef Fernández

En este trabajo se demuestra que en el movimiento de una partícula exploradora en el campo gravitacional Birkhoffiano debido a una masa fija en un sistema inercial, hay dos invariantes; uno de ellos es semejante a la energía de la Teoría de la Gravitación de Newton; el otro se parece al momento de la cantidad de movimiento. A la masa fija le llamamos: Sol; a la partícula exploradora: planeta. Coloquemos al Sol permanentemente en el origen del sistema de coordenadas cartesianas.

El planeta describe una trayectoria colocada totalmente en un plano apoyado en Sol(1). Conviene elegir al plano de la trayectoria como plano coordenado XOY. El espacio físico consiste en este caso de ese plano. Birkhoff(2) utiliza en su Teoría de la Gravitación el espacio-tiempo de Minkowski que tiene por cuadrado de la diferencial de arco a:

---

*Presentado en la V Asamblea de Matemáticas. Mérida, Septiembre de 1948.

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 \ . \tag{1}$$

Las ecuaciones del movimiento del planeta en el espacio-tiempo de Minkowski(3) son:

$$x'' = -\frac{M_\odot x}{r^3} - \frac{2\,M_\odot x}{r^3}\,(x'^2 + y'^2) + \frac{M_\odot x' r'}{r^2} \ ,$$

(2)

$$y'' = -\frac{M_\odot y}{r^3} - \frac{2\,M_\odot y}{r^3}\,(x'^2 + y'^2) + \frac{M_\odot y' r'}{r^2} \ .$$

En estas ecuaciones designamos con un acento la derivada con respecto a s; r es el radio vector del planeta. $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. $M_\odot$ es la masa del Sol. Sea M_p la masa en reposo del planeta. De las ecuaciones (2) obtenemos, por medio de una multiplicación por M_p, las que expresan a las fuerzas de Minkowski.

$$M_p x'' = -\frac{M_\odot M_p}{r^3}\,x - 2\,\frac{M_\odot M_p}{r^3}\,x\,(x'^2 + y'^2) + \frac{M_\odot M_p}{r^2}\,x' r' \ ,$$

(3)

$$M_p y'' = -\frac{M_\odot M_p}{r^3}\,y - 2\,\frac{M_\odot M_p}{r^3}\,y\,(x'^2 + y'^2) + \frac{M_\odot M_p}{r^2}\,y' r' \ .$$

Si se multiplican ambos miembros de la primera de las dos ecuaciones (3) por x' , ambos miembros de la segunda por y' , y si se suman miembro a miembro las dos ecuaciones resultantes, se obtiene:

$$(4) \qquad M_p\,(x'x'' + y'y'') = -\frac{M_\odot M_p}{r^2}\left[1 + x'^2 + y'^2\right] r' .$$

Divídanse ambos miembros de (4) entre $[1+x'^2 + y'^2]$.

$$(5) \qquad M_p \frac{x'x'' + y'y''}{1+x'^2 + y'^2} = -\frac{M_\odot M_p\, r'}{r^2} .$$

Por integración se obtiene:

$$(6) \qquad \frac{1}{2} M_p \ln\left[1 + x'^2 + y'^2\right] = \frac{M_\odot M_p}{r} + E .$$

E es una constante de integración. Despéjese a E de (6):

$$(7) \qquad E = -\frac{M_\odot M_p}{r} + \frac{1}{2} M_p \ln\left[1 + x'^2 + y'^2\right] .$$

Los siguientes desarrollos tienen por objeto expresar a $[1 + x'^2 + y'^2]$ en términos de la velocidad v del planeta.

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 .$$

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \left(\frac{dt}{dt}\right)^2 - \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 - \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = 1 - v^2 .$$

$$\left(\frac{dt}{ds}\right)^2 = \frac{1}{1 - v^2} .$$

$$1 + x'^2 + y'^2 = \frac{ds^2 + dx^2 + dy^2}{ds^2} = \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 .$$

$$1 + x'^2 + y'^2 = \frac{1}{1 - v^2} .$$

Substituyendo esta última expresión en (7) se obtiene:

(8) $$E = - \frac{M_\odot M_p}{r} + \frac{1}{2} M_p \ln \left[\frac{1}{1 - v^2}\right] .$$

E es una constante en el movimiento Birkhoffiano del planeta en torno del Sol. El término $- \frac{M_\odot M_p}{r}$ es exactamente igual a la energía potencial clásica del planeta en el campo gravitacional del Sol. El término $\frac{1}{2} M_p \ln \left[\frac{1}{1-v^2}\right]$ depende exclusivamente de la masa en reposo del planeta y de su velocidad.

Este término desempeña el papel de la energía cinética.

Llamemos V a la energía potencial Newtoniana del planeta:

(9) $$V = - \frac{M_\odot M_p}{r} .$$

Designemos con T_B a la expresión:

(10) $$T_B = \frac{M_p}{2} \ln \left[\frac{1}{1 - v^2}\right] .$$

Llamemos T a la energía cinética clásica.

$$T = \frac{1}{2} M_p v^2 \quad . \tag{11}$$

En la Teoría de Birkhoff se conserva:

$$E = V + T_B \; . \tag{12}$$

Como v es siempre menor que 1, se puede desarrollar T_B en una serie convergente de potencias de v:

$$T_B = \frac{1}{2} M_p \left[v^2 + \frac{v^4}{2} + \frac{v^6}{3} + \frac{v^8}{4} + \dots \right] \quad . \tag{13}$$

La diferencia entre la energía cinética Birkhoffiana y la clásica es la serie convergente:

$$T_B - T = \frac{1}{2} M_p \left[\frac{v^4}{2} + \frac{v^6}{3} + \frac{v^8}{4} + \dots \right] \; . \tag{14}$$

Para las velocidades de los planetas conocidos y demás partículas exploradoras del sistema solar, $T_B - T$ es prácticamente nula.

En las ecuaciones (2) cambiemos la variable independiente s por el tiempo t.

Se obtienen las ecuaciones (15):

$$\ddot{x} = -\frac{M_\odot x}{r^3} + \frac{M_\odot x}{r^3}\dot{x}^2 - \frac{M_\odot y}{r^3}\dot{y}^2 + \frac{2M_\odot y}{r^3}\dot{x}\dot{y} ,$$

(15)

$$\ddot{y} = -\frac{M_\odot y}{r^3} + \frac{M_\odot y}{r^3}\dot{y}^2 - \frac{M_\odot x}{r^3}\dot{x}^2 + \frac{2M_\odot x}{r^3}\dot{x}\dot{y} .$$

El punto designa la derivada con respecto al tiempo.

Multiplíquense ambos miembros de la primera de las ecuaciones (15) por $-y$, ambos miembros de la segunda por x, y súmese miembro a miembro.

(16) $$x\ddot{y} - \ddot{x}y = \frac{2M_\odot}{r^3}\left[xy(\dot{y}^2 - \dot{x}^2) + (x^2 - y^2)\dot{x}\dot{y}\right] .$$

El segundo miembro (16) puede descomponerse en factores:

(17) $$x\ddot{y} - \ddot{x}y = \frac{2M_\odot}{r^3}\left[x\dot{y} - \dot{x}y\right]\left[x\dot{x} + y\dot{y}\right] .$$

Divídanse ambos miembros de (17) entre $[x\dot{y} - \dot{x}y]$

(18) $$\frac{x\ddot{y} - \ddot{x}y}{x\dot{y} - \dot{x}y} = \frac{2M_\odot\left[x\dot{x} + y\dot{y}\right]}{r^3} .$$

Por medio de una integración obtenemos, a partir de la ecuación (18):

(19) $$\ln(x\dot{y} - \dot{x}y) = -\frac{2M_\odot}{r} + \ln k ;$$

$\ln k$ es una constante de integración.

De la ecuación (19) se obtiene como consecuencia inmediata la (20):

$$(20) \qquad x\dot{y} - \dot{x}y = k\, e^{-\frac{2M_{\odot}}{r}} \; .$$

Consideremos otra vez la ecuación (8) en su siguiente forma:

$$(8) \qquad \frac{2E}{M_p} = -\frac{2\,M_{\odot}}{r} + \ln \frac{1}{1 - v^2} \; .$$

Una consecuencia inmediata de la (8) es:

$$(21) \qquad e^{-\frac{2M_{\odot}}{r}} = e^{\frac{2E}{M_p}} \left(1 - v^2 \right) .$$

Multipliquemos ambos miembros de (20) por M_p, y eliminemos de la ecuación resultante y de (21) a la masa del sol.

$$(22) \qquad M_p\,(x\dot{y} - \dot{x}y) = k\, M_p\, e^{\frac{2E}{M_p}} (1-v^2) \; .$$

Llamemos H a la constante:

$$(23) \qquad H = k\, M_p\, e^{\frac{2E}{M_p}} \quad ,$$

y despejémosla de (22):

$$H = \frac{M_p}{1 - v^2} (x\dot{y} - \dot{x}y) \quad . \tag{24}$$

H es un invariante en el movimiento del planeta en torno del Sol en la Teoría de Birkhoff. Este invariante merece el nombre de momento de la cantidad de movimiento.

Instituto de Física.

B I B L I O G R A F I A.

(1) G.D. Birkhoff. El Concepto Matemático de Tiempo y la Gravitación. Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana. Vol. 1, Nos. 4 y 5. Pag. 18.

(2) Locus Citatus. Pag. 10.

(3) Locus Citatus. Pag. 18.