SOBRE LA EXTENSION DE LA TEORIA DEL AREA LEBESGUIANA, PARA SUPERFICIES INMERSAS EN R^n.*

Por E. Valle Flores.

1. INTRODUCCION. **El objeto del presente trabajo consiste** en hacer ver que los resultados más importantes que figuran en [1][1], relacionados con la teoría del área de Lebesgue para superficies de Fréchét, del tipo de la 2-célula, sumergidas en R^3, pueden generalizarse hasta superficies del mismo tipo, pero inmersas en R^n [2]. Con la finalidad de facilitar su lectura y al mismo tiempo darle cierto carácter de unidad, se incluyen en el trabajo, en vez de suponerlos conocidos, algunas definiciones, resultados, etc., dando las referencias bibliográficas pertinentes.

En la sección 2 se dará la definición de <u>superficie de</u> -

---

* Presentado en un trabajo y una conferencia, ante la V Asamblea Regional de la Sociedad Matemática Mexicana, que tuvo lugar en la Ciudad de Mérida, del 6 al 11 de septiembre de 1948.

(1) Véase la Bibliografía, al final del trabajo.

(2) Así designamos al espacio euclidiano n-dimensional.

Fréchét del tipo de la 2-célula (o célula bidimensional), sumergida en un espacio métrico arbitario. En la sección 3 se describen tales superficies, cuando están inmersas en R^n, -- por una colección de n funciones continuas $x^i(u,v)$ de dos variables reales. Se asocia allí a cada representación de una superficie el vector jacobiano correspondiente a esa representación, a saber el vector de componentes $\partial(x^i,x^j)/\partial(u,v)$, ordenadas lexicográficamente para $i < j$. El tamaño de este -- vector en el espacio vectorial $n(n-1)/2$-dimensional juega un importante papel en la teoría del área de las superficies en cuestión. En las secciones 4 y 5 se tratan ciertas superficies especiales, que constituyen las naturales generalizaciones de los poliedros y las llamadas superficies de clase K_1 y de clase K_2 por Radó en [1]. Se demuestra en particular - que el área elemental de un poliedro (definida con ayuda de - la fórmula de Herón) coincide con la integral clásica para el área, de las representaciones casi-lineales de ese poliedro. Se hace asímismo ver que sigue valiendo el teorema de Youngs en [2] . La sección 6 contiene la generalización para R^n, de ciertos resultados de Mc.Shane y Radó sobre integrales dobles en forma paramétrica. El resto del trabajo contine la parte básica de la teoría del área de Lebesgue para las superficies en cuestión.

2. SUPERFICIES DE FRÉCHÉT.

Sea Q una 2-célula, o imagen homeomorfa del subespacio de R^2 definido por $0 \leq u \leq 1$, $0 \leq v \leq 1$ y consideremos la totalidad de las funciones[3] continuas $f : Q \to R$, donde R es un espacio métrico arbitrario.

Se define entonces la distancia, en el sentido de Fréchét, entre dos funciones tales como[4]

$$(f,g) = \inf_{H} . \max_{q \in Q} . \; d(f(q),\; gH(q)),$$

donde $d(x,y)$ simboliza la distancia entre los puntos x,y de R y $H : Q \to Q'$ es un homeomorfismo arbitrario entre los dominios de f y g.

Dos funciones f y g se llaman equivalentes si $(f,g) = 0$ y de manera fácil se ve que ésta efectivamente es una relación de equivalencia. Ella induce entonces una partición en clases ajenas, en el conjunto de todas las funciones continuas f.

<u>Cada clase</u> F <u>se llama entonces una superficie fréchétiana del tipo de la</u> 2-<u>célula, sumergida en</u> R.[5] Cualquiera de los miembros f de una clase F, se llama <u>una representación de esa superficie</u> F.

---

(3) Se sigue la notación de Lefshetz [3], Capítulo I, Sección 2, para las funciones.

(4) Puede en la igualdad escribirse máx. porque el dominio de d, producto métrico de los compacta $f(Q)$ y $g(Q')$, es compacto, entonces la función es acotada y "alcanza sus extremos".

(5) Si en vez de partir de Q, lo hubiéramos hecho de cualquier espacio métrico compacto P, obtendríamos superficies del tipo P, sumergidas en R.

El conjunto de todas esas superficies fréchétianas se convierte en un espacio métrico general, definiendo la distancia (F,G) entre dos superficies F y G como la distancia[6] (f,g) donde f es cualquier representación de F y g cualquier representación de G. La métrica de este espacio de las superficies satisface los axiomas: 1º (F,F) = 0, 2º el axioma de simetría y 3º la desigualdad del triángulo.[7] La convergencia en este espacio se define como es usual

$$F_k \to F \quad \text{si y solo si} \quad (F_k,F) \to 0.$$

3. SUPERFICIES EN R^n.

En el caso especial en que R sea el espacio euclidiano n-dimensional R^n, las funciones anteriores f quedan descritas por[8]

$$(1) \qquad f : x^i = x^i(u,v) \; ; \quad (u,v) \in Q \; ; \quad i = 1, 2, \ldots, n \; ;$$

donde cada punto de R^n se representa por $x=(x^1,\ldots,x^n)$ y las $x^i(u,v)$ son funciones continuas de las variables reales u,v.

Ahora como cada superficie fréchétiana del tipo de Q, sumergida en R^n, queda completamente determinada por su re-

(6) Fácilmente se ve que (F,G) no depende de f y g.
(7) Obviamente no se cumple en general: (F,G)=0 implica F=G.
(8) De aquí en adelante las letras i,j como índices correrán de 1 a n.

presentación f, podemos referirnos a ella como

$$(2) \qquad S : x^i = x^i(u,v) \quad ; \quad (u,v) \in Q ,$$

y por consición llamamos a tal clase <u>superficie</u> a secas, de ahora en adelante.

Vamos a asociar a la función (1) una función vectorial de punto (u,v), en los puntos de Q donde exista, de componentes

$$(3) \qquad X^{ij}(u,v) = \partial(x^i,x^j)/\partial(u,v) , \qquad i < j ,$$

ordenadas lexicográficamente. Esta función tiene, para cada punto donde esté definida, valores en el espacio vectorial euclidiano $n(n-1)/2$-dimensional. A este vector lo simbolizamos con $X(u,v)$, o cuando no haya confusión, con X y lo llamamos

<u>vector jacobiano correspondiente a la función</u> (1).

El tamaño de X se simbolizará $|X|$ y el producto escalar de dos vectores X, Y tales, $X \cdot Y$.

La función

$$(4) \qquad \varphi(X) = |X| = \left[\sum_{\mu<\nu} (X^{\mu\nu})^2\right]^{1/2} ,$$

pertenece a la llamada <u>clase de funciones admisibles</u> de las

$n+n(n-1)/2$ variables independientes x^i, X^{ij}, en el sentido de Radó[9]

Si definimos para la transformación (1) sus magnitudes fundamentales de 1er. órden, como se hace en Geometría Diferencial, por[10]

$$E(u,v) = \frac{\partial x^\mu}{\partial u}\frac{\partial x^\mu}{\partial u} \; ; \quad F(u,v) = \frac{\partial x^\mu}{\partial u}\frac{\partial x^\mu}{\partial v} \; ; \quad G(u,v) = \frac{\partial x^\mu}{\partial v}\frac{\partial x^\mu}{\partial v}$$

resulta[11]

$$|X(u,v)|^2 = E(u,v)\, G(u,v) - F(u,v)^2 \; . \tag{5}$$

4. LOS POLIEDROS EN R^n.

DEFINICION 1. La función (1) se llamará casi-lineal si se satisfacen las tres siguientes condiciones

---

(9) Cf.[1], 1.2, a saber funciones $\varphi(x,X)$ que satisfacen las condiciones

i) $\varphi(x,X)$ es continua para todos los valores de las variables x^i, X^{ij}

ii) $\varphi(x,tX) = t\varphi(x,X)$ para $t \geq 0$.

iii) φ tiene primeras y segundas parciales continuas para $X \neq 0$.

La condición ii) expresa que φ es positivamente homogénea y de grado 1, respecto a X.

Tanto la definición anterior como la de vector jacobiano de una función, constituyen la natural generalización de hechos dados por Radó en [1].

(10) Con objeto de simplificar la escritura, la repetición de los índices μ,ν indicará contracción, con $\mu,\nu=1,\dots,n$ cuando solo figure uno de ellos y con $\mu<\nu$ cuando figuren simultáneamente, en cada fórmula.

(11) Allí las parciales se calculan naturalmente en el punto-(u,v) y las magnitudes fundamentales quedarán definidas en los puntos de Q donde estas parciales existan.

i) <u>La frontera de</u> Q <u>es polígono</u>.

ii) f <u>es buinívoca</u> (y entonces topológica)

iii) Q <u>puede descomponerse en un número finito de triángulos rectilíneos, en cada uno de los cuales las funciones</u> $x^i(u,v)$ <u>son lineales</u>.

En este caso se tiene para f:

$$(6)\qquad Q = \Sigma_{\lambda=1}^{m} \Delta_\lambda \; ; \quad \Delta_\lambda^o \cdot \Delta_{\lambda'}^o = 0 \quad \text{si} \quad \lambda \neq \lambda' \; ;$$
$$f : x^i = a_\lambda^i u + b_\lambda^i v + c_\lambda^i \,, \quad \text{si} \quad (u,v) \in \Delta_\lambda \,,$$

donde[12] Δ_λ es triángulo y las a,b,c son constantes.

Entonces el vector jacobiano de la función f existe c.d (casi dondequiera) en Q y, en virtud de (5) se cumple la igualdad

$$(7)\qquad |X(u,v)|^2 = \sum_i \sum_j (a_\lambda^i)^2 (b_\lambda^j)^2 - \sum_i \sum_j a_\lambda^i a_\lambda^j b_\lambda^i b_\lambda^j \,,$$

para todo punto $(u,v) \in \Delta_\lambda^o$.

DEFINICION 2. <u>Una superficie</u> P <u>se llamará poliedro, si entre sus representantes hay al menos uno</u> f <u>que sea casi-lineal</u>.[13]

---

(12) Si A es un conjunto de un espacio R, A^o designa su interior relativamente a R.

(13) Esta es la extensión natural de la definición de Huskey [4], 2.3.

Para un poliedro P, con representación casi-lineal f dada por (6), cada imagen $f(\Delta_\lambda)$ es un triángulo plano en R^n, de lados rectilíneos y nunca degenerado (en una recta o en un punto). Al <u>área elemental</u> de un tal triángulo, que tenga por vértices x_1, x_2, x_3 en R^n la definimos como[14].

$$(8) \qquad A(f(\Delta_\lambda)) = 1/2 \left[d(x_1,x_2)^2\, d(x_1,x_3)^2 - (\overline{x_1x_2}\cdot\overline{x_1x_3})^2\right]^{1/2},$$

donde $\overline{xy}$ designa el vector en R^n, de extremos x,y.

DEFINICION 3. <u>El área elemental del poliedro</u> P, <u>con representación casi-lineal</u> (6) <u>es</u>:

$$(9) \qquad A(P) = \Sigma_{\lambda=1}^{m} A(f(\Delta_\lambda))$$

La definición se justifica porque si g es cualquier otra representación de P (aun cuando no necesariamente casi-lineal), se cumple $f(Q) = g(Q')$ y $A(P)$ se definió en términos de la imagen de la función f.[15]

TEOREMA 1. <u>Para el área elemental de un poliedro</u> P <u>vale</u>[16]

---

(14) Cf. Sección 2 para el significado de $d(x,y)$.

(15) Esto constituye una demostración elemental, obviamente simple de un teorema de Huskey (Cf.[4], 4.4): <u>el área elemental de un poliedro es independiente de las representaciones paramétricas particulares de éste</u>.

(16) Las integrales se toman en el sentido de Lebesgue.

(10) $$A(P) = \iint_{Q^o} |X(u,v)|\,du\,dv.$$

<u>donde</u> $X(u,v)$ <u>es el vector jacobiano de cualquier representación casi-lineal de</u> P.

En efecto, tomando en cuenta el 1er. renglón de (6), resulta que la demostración se reduce al caso de que Q sea un triángulo. Y para este caso el teorema se prueba directamente, usando (7) y (8) y moviendo quizá para simplificar, ese triángulo hasta que un lado quede en el eje u y un vértice quede en el origen del plano u-v.

5. OTRAS SUPERFICIES ESPECIALES EN R^n.

DEFINICION 4. <u>Una función</u> f <u>se llamará</u>(17) <u>de la clase</u> K_1 <u>si satisface</u>:

i) <u>Las parciales de las funciones</u> $x^i(u,v)$ <u>existen</u> c.d. <u>en</u> Q.

ii) <u>Los jacobianos</u> $X^{ij}(u,v)$ <u>son sumables en</u> Q.

Entonces las funciones $X^{ij}(u,v)^2$ son de la clase $L^{1/2}$ y también lo es(18) la función $\sum_{i<j} X^{ij}(u,v)^2$. Esto quiere decir que la integral

(11) $$\iint_{Q^o} |X(u,v)|\,du\,dv\ ,$$

(17) Aquí también el nombre y el concepto se deben a Radó en [1]

(18) Véase [5], 24.6.

existe y es finita.

TEOREMA 2 (Youngs) <u>Toda superficie</u> S, <u>tiene al menos una representación</u> f <u>que es de la clase</u> K_1.

DEMOSTRACION.[19] Si S está dada por[20]

$$g : x^i = y^i (u',v') \ ; \quad Q' : 0 \leq u' \leq 1, \quad 0 \leq v' \leq 1 ,$$

y $w(t)$, $0 \leq t \leq 1$ es la función de Cantor[21], entonces definimos la función $f : Q' \to R^n$ mediante:

$$f : x^i = x^i(u,v) = y^i(w(u'), w(v')) \ , \qquad (u',v') \in Q' \ ,$$

donde $(u,v) \in Q$, cuadrado unitario del plano u,v.

Ahora bien f es también una representación de S y $\partial x^i/\partial u = 0$, $\partial x^i/\partial v = 0$ para puntos (u,v) cuyas coordenadas estén en el complemento del discontinuo de Cantor[22]; f satisface las exigencias de la Definición 4.

OBSERVACION. Para la representación f del teorema 2, la integral (11) vale 0. Esto muestra que el área de una

---

(19) Esencialmente figura en [2].

(20) Es claro que si Q' es cualquier tipo <u>especial</u> de 2-célula (por ejemplo el cuadrado unitario) siempre existe una representación g de la superficie S, con dominio Q'.

(21) La definición y principales propiedades de la función de Cantor figuran en [6].

(22) Los detalles pueden verse en [2].

superficie <u>no</u> puede definirse (como muy a menudo se hace) mediante la integral $\iint_Q \sqrt{EG-F^2}\, du\, dv$, donde E, F, G son las magnitudes fundamentales del 1er. órden de esa superficie.

DEFINICION 5. <u>Una superficie</u> S <u>se llemará de Radó</u>[23] <u>si entre sus miembros figura al menos uno</u> f <u>que satisfaga</u>:

i) f <u>es de clase</u> K_1

ii) <u>Existe una sucesión de funciones casi-lineales</u>

$$f_k : x^i = x_k^i(u,v) \quad , \qquad (u,v) \in Q \; ,$$

<u>que converge hacia</u> f <u>y tal que</u>

$$\lim_k \iint_{Q_k^o} |X_k(u,v)|\, du\, dv = \iint_{Q^o} |X(u,v)|\, du\, dv \; .$$

Allí naturalmente $X_k(u,v)$ es el vector jacobiano correspondiente a la función f_k, en el punto $(u,v) \in Q_k$ donde exista. A la función f que satisfaga i) y ii) la llamamos de <u>clase de Radó</u>.

6. GENERALIZACION DE RESULTADOS DE MC.SHANE[24] Y RADO SOBRE INTEGRALES DOBLES.

---

(23) Introducidas por Radó en [1], 1.19 y 1.26. Allí son llamadas por él superficies de la clase K_2.

(24) Véanse [7],[1] y [8].

TEOREMA 3.[25] Sea Q el cuadrado unitario del plano u-v y supongamos que las funciones $f_k : Q \to R^n$, dadas por

$$(12) \qquad f_k : x^i = x^i_k (u,v) \; ; \qquad (u,v) \in Q ,$$

satisfacen las condiciones siguientes:

i) f_o es de la clase K_1

ii) f_k es casi lineal para $k = 1, 2, \ldots$

iii) $f_k \to f_o$ uniformemente sobre Q.

Entonces dadas arbitrariamente las constantes a_{1i}, a_{2j} y siendo $A_{ij} = a_{1i}\, a_{2j} - a_{1j}\, a_{2i}$, existe una sucesión de conjuntos medibles $E_k \subset Q$, tales que[10]

$$\lim_{k\to\infty} \iint_{E_k} A_{\mu\nu}\, X^{\mu\nu}_k (u,v)\, du\, dv = \iint_Q A_{\mu\nu}\, X^{\mu\nu}_o (u,v)\, du\, dv .$$

Donde $X_k(u,v)$ es el vector jacobiano de la función f_k.

DEMOSTRACION. Pongamos[10]

$$\bar{x}(u,v) = a_{1\mu}\, x^{\mu}_o(u,v) \quad ; \quad \bar{x}_k(u,v) = a_{1\mu}\, x^{\mu}_k(u,v) \; ;$$

---

(25) Constituye para R^n, la extensión del teorema establecido para R^3 por Mc.Shane (Cf. [7], pág 829) bajo las hipótesis adicionales:

iv) Las funciones $x^i_o(u,v)$ son absolutamente continuas en la frontera FQ de Q.

v) Se tiene

$$\iint_Q X^{2,3}_o (u,v)\, du\, dv = 1/2 \int_{FQ} (x^2(u,v)dx^3 - x^3(u,v)dx^2) ,$$

y las otras dos igualdades análogas. Radó lo generalizó en [8], secciones 1 y 2, suprimiendo estas hipótesis adicionales. Cf.[1], 1.28.

$$\bar{y}(u,v) = a_{2\mu}\, x_o^{\mu}(u,v)\,; \qquad \bar{y}_k(u,v) = a_{2\mu}\, x_k^{\mu}(u,v)\;;$$

$$\bar{J}(u,v) = \partial(\bar{x},\bar{y})/\partial(u,v)\;;\; \bar{J}_k(u,v) = \partial(\bar{x}_k,\bar{y}_k)/\partial(u,v)\;;$$

donde la segunda columna de igualdades se establece para $k = 1, 2, \ldots$

Apliquemos ahora el Teorema[26] de la sección 4 (pág 74) de [7] , a las funciones $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{x}_k$, $\bar{y}_k$. Como por cálculo directo resulta que

$$\bar{J} = A_{\mu\nu}\, X_o^{\mu\nu}\;, \qquad \bar{J}_k = A_{\mu\nu}\, X_k^{\mu\nu}\;,$$

queda el teorema demostrado.

COROLARIO. Si

$$\iint_Q A_{\mu\nu}\, X^{\mu\nu}(u,v)\, du\, dv \geq 0\;,$$

entonces los conjuntos E_k existen de modo que $A_{\mu\nu}X^{\mu\nu}(u,v)\geq 0$ sobre E_k.

La demostración del corolario a partir del Teorema 3, se

[26] El Teorema es (Cf.[7], pág 74):
Sea Q el cuadrado $0\leq u\leq 1$, $0\leq v\leq 1$ y supongamos que las funciones $x(u,v)$, $y(u,v)$, $x_k(u,v)$, $y_k(u,v)$ satisfacen las condiciones:
I. Las parciales x_u, x_v, y_u, y_v existen c.d. en Q.
II. El jacobiano $J = x_u y_v - x_v y_u$ es sumable en Q.
III. Las funciones x_k, y_k son casi lineales en Q.
IV. $x_k(u,v) \rightarrow x(u,v)$; $y_k(u,v) \rightarrow y(u,v)$ uniformemente sobre Q.
Entonces si $J_k = x_{ku}y_{kv} - x_{kv}y_{ku}$, existe una sucesión de conjuntos medibles K_k de Q con

$$\iint_{K_k} J_k\, du\, dv \rightarrow \iint_Q J\, du\, dv.$$

hace exactamente del mismo modo que en [1], 1.30 (pág 344).

TEOREMA 4. Sean las funciones $f_k : Q_k \rightarrow R^n$ tales que satisfagan las condiciones siguientes:

i) f_o es de la clase K_1

ii) f_k es casi-lineal para $k = 1,2, \ldots$

iii) $\lim_k (f_o, f_k) = 0$.

Entonces se verifica[27]

$$\liminf_k \iint_{Q_k^o} |X_k(u,v)|\, du\, dv \geq \iint_{Q_o^o} |X_o(u,v)|\, du\, dv.$$

El Teorema 4, fundamental en este trabajo, es la generalización natural del lema 2.6 de Radó en [1] y puede demostrarse calcando formalmente la demostración del propio Radó, a partir del siguiente lema, establecido igualmente[28] para R^3 por Radó.

LEMA. Supongamos que las funciones del teorema 4 satisfacen las mismas hipótesis de este teorema y además:

iv) Si q es cualquier cuadrado cerrado $\subset Q_o^o$, entonces existe $N(q)$ tal que $q \subset Q_k^o$ para toda $k \geq N$.

v) Sobre cualquier cuadrado cerrado $\subset Q_o^o$ es $x_k(u,v) \rightarrow x_o(u,v)$ uniformemente.

DEMOSTRACION. Siguiendo el esquema de Radó, definimos para todo cuadrado cerrado $q \subset Q_o^o$,

---

(27) $X_k(u,v)$ es naturalmente el vector jacobiano de la función f_k.

(28) Cf.[1], 2.1.

$$\psi(q) = \lim_{k}.\text{inf}. \iint_{q^o} |X_k(u,v)|\, du\, dv.$$

Sea (u_o,v_o) un punto de Q_o tal que

(12) $$X_o(u_o,v_o) \text{ existe.}$$

(13) $$D\left[\iint_{Q_o^o} X^{ij}(u,v)\, du\, dv\right]_{(u_o,v_o)} = X_o^{ij}(u_o,v_o).$$ [29]

(14) $$|X_o(u_o,v_o)| > 0.$$

Las condiciones (12) y (13) se garantizan c.d. en Q_o^o en virtud de i) y del Teorema de Lebesgue.[30] En virtud de (13) podemos tomar un "cuadrado variable" $q_o \subset Q_o^o$, con centro (u_o,v_o) y tal que[31] si $L(q_o) \to 0$, sea

$$\iint_{q_o} X_o^{ij}(u,v)\, du\, dv / L(q_o) \to X_o^{ij}(u_o,v_o) .$$

Entonces se cumple[32]

---

(29) Se sigue aquí la notación de [1], 1.31 para la derivación de las funciones de cuadrados, en el sentido de esa misma referencia. Igualmente se hace uso de los lemas que allí figuran. La derivada se calcula en el punto (u_o,v_o)

(30) Cf.[9], teorema 6.3, pág. 118.

(31) $L(A)$ designa la medida lebesguiana bidimensional del conjunto mediable A.

(32) $|X_o(u_o,v_o)|_{ij}$ designa para $X \neq 0$, la derivada $\partial|X_o|/\partial X_o^{ij}$, valuada en el punto (u_o,v_o). Para puntos donde $X = 0$, el anterior símbolo se define como 0.

$$(15)\qquad \frac{\iint_{q_o} X_o^{\mu\nu}(u,v)\,|X_o(u_o,v_o)|_{\mu\nu}\,du\,dv}{L(q_o)} \longrightarrow |X_o(u_o,v_o)|\,,$$

cuando $L(q_o) \longrightarrow 0$.

Ahora por (15) y (14), q_o puede tomarse suficientemente pequeño para que

$$(16)\qquad \iint_{q_o} X_o^{\mu\nu}(u,v)\,|X_o(u_o,v_o)|_{\mu\nu}\,du\,dv \geq 0$$

y k puede tomarse suficientemente grande para que $X_k(u,v)$ esté definido en q_o. Pongamos en el Teorema 3:

$$a_{1i} = |X_o(u_o,v_o)|^{-1}(\partial x^i/\partial u)_{(u_o,v_o)}\ ;\quad a_{2j} = (\partial x^j/\partial v)_{(u_o,v_o)}\ .$$

Existe, por el corolario de ese teorema, una sucesión E_k de subconjuntos de q_o, medibles y tales que

$$(17)\qquad \lim_k \iint_{E_k} X_k^{\mu\nu}(u,v)\,|X_o(u_o,v_o)|_{\mu\nu}\,du\,dv =$$

$$= \iint_{q_o} X_o^{\mu\nu}(u,v)\,|X_o(u_o,v_o)|_{\mu\nu}\,du\,dv$$

y que, en vista de (16)

$$(18)\qquad X_k^{\mu\nu}(u,v)\,|X_o(u_o,v_o)|_{\mu\nu} \geq 0, \qquad (u,v) \in E_k\ .$$

Pongamos ahora $\bar{X}_k(u,v) = X_k(u,v)$ para $(u,v) \in E_k$ y

$\overline{X}_k(u,v) = 0$ para $(u,v) \in q_o - E_k$ y tendremos para (u,v) c.d. en q_o y k suficientemente grande,

$$(19) \qquad |\overline{X}_k(u,v)| \geq (1-\delta)\, \overline{X}_k^{\mu\nu}(u,v)\, |X_o(u_o,v_o)|_{\mu\nu} ,$$

donde $\delta > 0$ es arbitraria. En efecto, para puntos en los que $\overline{X}_k = 0$, se tiene $\overline{X}_k^{ij} = 0$ y entonces $\overline{X}_k^{\mu\nu}(u,v)\, |X_o(u_o,v_o)|_{\mu\nu} = 0$, cumpliéndose (19) en este caso ya que el tamaño de todo vector X es ≥ 0.

En el caso restante $\overline{X}_k \neq 0$, es $(u,v) \in E_k$ y allí $\overline{X}_k(u,v) = X_k(u,v)$ con lo cual $\overline{X}_k^{ij}(u,v) = X_k^{ij}(u,v)$ y consiguientemente, en virtud de (18), $-\delta\, \overline{X}_k^{\mu\nu}(u,v)\, |X_o(u_o,v_o)|_{\mu\nu} < 0$. Ahora por cálculo directo se comprueba

$$|\overline{X}_k| = \frac{1}{2}\, |\overline{X}_k| \left| \overline{X}_k / |\overline{X}_k| - X_o / |X_o| \right|^2 + \overline{X}_k^{\mu\nu} |X_o(u_o,v_o)|_{\mu\nu} .$$

Así en este caso restante queda también probada (19) ya que el 1er. sumando del 2o. miembro es ≥ 0.

De (19) sacamos, integrando sobre q_o y haciendo $k \to \infty$,

$$\psi(q_o) = \liminf_k \iint_{q_o^o} |X_k(u,v)|\, du\, dv \geq \liminf_k \iint_{q_o^o} |\overline{X}_k(u,v)|\, du\, dv$$

$$\geq (1-\delta) \liminf_k \iint_{q_o^o} \overline{X}_k^{\mu\nu}(u,v)\, |X_o(u_o,v_o)|_{\mu\nu}\, du\, dv$$

$$\geq (1-\delta) \liminf_k \iint_{E_k} X_k^{\mu\nu}(u,v)\, |X_o(u_o,v_o)|_{\mu\nu}\, du\, dv$$

$$\geq (1-\delta) \iint_{q_o^o} X_o^{\mu\nu}(u,v)\,|X_o(u_o,v_o)|_{\mu\nu}\, du\, dv ,$$

en virtud de (17). Consiguientemente, gracias a (15)

$$\lim_{L(q_o)\to 0} \psi(q_o)/L(q_o) \geq$$

$$(1-\delta) \lim_{L(q_o)\to 0} \frac{1}{L(q_o)} \iint_{q_o} X_o^{\mu\nu}(u,v)\,|X_o(u_o,v_o)|_{\mu\nu}\, du\, dv$$

$$\geq |X_o(u_o,v_o)| .$$

Hemos demostrado entonces[29]

(20) $\underline{D}\, \psi(u_o,v_o) \geq |X_o(u_o,v_o)|$, (u_o,v_o) c.d. en Q_o^o ,

para $|X_o(u_o,v_o)| > 0$. También vale (20) para $X_o(u_o,v_o)=0$ ya que la derivada inferior de ψ es siempre ≥ 0.

Apliquemos ahora a las funciones $|X_k(u,v)|$ y $\psi(q)$ el lema[33]

---

(33) Es el siguiente (Cf.[1], 1.34, pág 345):

<u>Sean en el plano</u> u-v <u>simplemente conexas y acotadas las regiones de Jordan</u> Q_k, $k = 0,1,\ldots$ <u>y sea</u> $\varphi_k(u,v)$ <u>sumable en</u> Q_k^o. <u>Supongamos que para cualquier cuadrado cerrado</u> $q \subset Q_o^o$ <u>es</u> $q \subset Q_k^o$ <u>para</u> k <u>suficientemente grande</u>. <u>Por último supongamos que para la función</u>

$$\psi(q) = \liminf_{k} \iint_q \varphi_k(u,v)\, du\, dv,$$

<u>se cumple en</u> (u,v) c.d. <u>en</u> Q_o^o <u>la desigualdad</u>,

$$\underline{D}\, \psi(u,v) \geq \varphi_o(u,v).$$

<u>Entonces se concluye que</u>

$$\liminf_{k} \iint_{Q_k^o} \varphi_k(u,v)\, du dv \geq \iint_{Q_o^o} \varphi_o(u,v) du\, dv.$$

En nuestro caso ponemos, al aplicar el lema $\varphi_k(u,v) = |X_k(u,v)|$.

1.34 de Radó en [1] y queda entonces completa la demostración.

TEOREMA 5.[34] __Supongamos que las funciones__ $f:Q \rightarrow R^n$, $g:Q_1 \rightarrow R^n$ __satisfacen las condiciones__

i) f y g __son de la clase de Radó__ (Cf. Definición 5).

ii) $(f,g) = 0$. (Cf. 2).

__Entonces se cumple__

$$(21) \qquad \iint_{Q^o} |X(u,v)|\, du\, dv = \iint_{Q_1^o} |Y(u,v)|\, du\, dv .$$

Donde Y es el vector jacobiano correspondiente a g.

La demostración se hace siguiendo el molde de la de Radó y solo la esbozamos para completar. Por i) existe una sucesión de representaciones casi-lineales $f_k:Q_k \rightarrow R^n$ tales que $\lim_k (f_k,f) = 0$ y que

$$\lim_k \iint_{Q_k^o} |X_k(u,v)|\, du\, dv = \iint_{Q^o} |X(u,v)|\, du\, dv .$$

Pero como $\lim_k (f_k,g) = 0$, tenemos, aplicando el Teorema 4,

$$\iint_{Q^o} |X(u,v)|\, du\, dv \geq \iint_{Q_1^o} |Y(u,v)|\, du\, dv .$$

La restante desigualdad se demuestra en forma análoga.

---

(34) Constituye la calca, para R^n de [1], 2.8. Todo lo que sigue del trabajo es ya pura aplicación formal de lo contenido en [1]. Se repite el detalle solo en vías de claridad.

Si tenemos una superficie S de Radó, la integral $\iint_{Q^o} |X(u,v)|\, du\, dv$ del tamaño del vector jacobiano de cualquiera de sus representaciones $f : Q \rightarrow R^n$ que sea de la clase de Radó, es <u>siempre la misma</u> en vista del Teorema 5. Esta integral es entonces una funcional de la superficie S. La llamamos <u>la integral clásica de</u> S, y la representamos por

$$(22) \qquad I(S) = \iint_{Q^o} |X(u,v)|\, du\, dv \ .$$

Para los poliedros P (que obviamente son superficies de Radó) hemos demostrado (Teorema 1) que su integral clásico coincide con su área elemental:

$$(23) \qquad I(P) = A(P) \ .$$

TEOREMA 6.[35] <u>La funcional</u> I(S) <u>es inferiormente semicontinua en la clase de las superficies de Radó.</u>

Esto es, si S_k es cualquier sucesión de superficies de Radó, con $\lim_k S_k = S_o$, entonces se cumple

$$(24) \qquad \liminf_k \ I(S_k) \geq I(S_o) \ .$$

Porque para cada k existe una sucesión de poliedros P_{km} tales que $\lim_m P_{km} = S_k$ y que $\lim_m I(P_{km}) = \lim_m A(P_{km}) =$

(35) Contenido, para R^3 en [1], 3.5.

$= I(S_k)$. Podemos entonces sacar una subsucesión de poliedros P^k tal que $\lim_k P^k = S$ y que $\lim_k A(P^k) = I(S_k)$. Apliquemos el Teorema 4 y obtenemos $\lim.\inf._k A(P^k) \geq I(S)$. De aquí sale (24).

COROLARIO.[36] <u>El área elemental de los poliedros es una funcional semicontinua en la clase de ellos.</u>

7. EL AREA LEBESGUIANA DE LAS SUPERFICIES EN R^n.

TEOREMA 7. <u>La clase de los poliedros es densa en el espacio de las superficies de Fréchét.</u>

En efecto, para la superficie arbitraria S tomamos una representación $f : Q \rightarrow R^n$, en la que el dominio sea el cuadrado unitario[20] de R^2. Ahora para el número natural arbitrario k descomponemos Q en $2k^2$ triángulos rectángulos Δ^k_m $(m = 1, \ldots , 2k^2)$ congruentes, de catetos paralelos a los ejes coordenados y con hipotenusa de pendiente 1. Para los vértices a_{km}, b_{km}, c_{km}, los puntos $f(a_{km})$, $f(b_{km})$, $f(c_{km})$ determinan en R^n un triángulo plano bidimensional Λ^k_m. Si éste resulta degenerado, lo substituimos por otro triángulo no degenerado y cuyos nuevos vértices disten de los antiguos

---

[36] Fréchét demuestra en [10], de una manera tan elemental como elegante, las dos propiedades siguientes de $A(P)$, para poliedros de R^3.

i) $A(P)$ es totalmente discontinua: Para cada poliedro P existe una sucesión de poliedros P_k con $\lim_k P_k = P$ y tal que es falso $\lim_k E(P_k) = E(P)$.

ii) $A(P)$ es inferiormente semicontinua.

en menos que $1/k$. Ahora existe una función única t_m^k : $\Delta_m^k \to R^n$, lineal y biunívoca que da Λ_m^k como imagen de Δ_m^k.(37) Si ahora $f_k : Q \to R^n$ es la función casi lineal que concuerda en cada Δ_m^k con t_m^k, ella define un poliedro P_k. Ahora es $\lim_k f_k(u,v) = f(u,v)$; uniformemente sobre Q; entonces $\lim_k (f,f_k) = 0$ y $\lim_k P_k = S$.

Tiene entonces sentido, según el Teorema 7, la

DEFINICION 6. <u>Sea S una superficie arbitraria y P_k^a cualquier sucesión de poliedros tales que $\lim_k P_k^a = S$. Entonces el área, en el sentido de Lebesgue de S, se define como</u>

$$L(S) = \inf_a . \lim_k . \inf A(P_k^a) . \tag{25}$$

En conclusión damos los siguientes teoremas que describen las propiedades básicas del área lebesguiana de las superficies de Fréchét, del tipo de la 2-célula, e inmersas en R^n. Todos ellos son las naturales extensiones de teoremas conocidos para R^3 y se expresan con los mismos enunciados

---

(37) En efecto, si Λ_m^k, de vértices x_0, x_1, x_2 tiene por representación paramétrica en R^n

$$x = x_0 + \sigma(x_1 - x_0) + \delta(x_2 - x_0), \quad 0 \leq \sigma + \delta \leq 1 ,$$

(los puntos de R^n se manejan como elementos del espacio vectorial de dimensión n con coeficientes reales), entonces σ y δ se pueden determinar unívocamente como funciones lineales en u,v definidas en Δ_m^k, mediante las seis ecuaciones que resultan de hacer $\sigma=0$, $\delta=0$, $(u,v)=a_{km}$; $\sigma=1$, $\delta=0$, $(u,v)=b_{km}$ y $\sigma=0$, $\delta=1$, $(u,v) = c_{km}$.

formales que estos e incluso las demostraciones de aquellos constituyen la calca de las de estos.

TEOREMA 8. $L(S)$ <u>es independiente de las representaciones paramétricas de</u> S.

Pues en la Definición 6 para nada aparece alguna representación de S.

TEOREMA 9. $L(S)$ <u>es inferiormente semicontinua en la clase de las superficies de Fréchét</u>.

Sea $\lim_k S_k = S$. Podemos suponer que $L(S_k) < \infty$ y que $\lim\inf_k L(S_k) < \infty$. Ahora de (25) concluímos que para cada k existe una sucesión de poliedros P_m^k tal que $\lim_m P_m^k = S_k$ y que $\lim_m A(P_m^k) = L(S_k)$; luego dado $1/k$ podemos tomar un poliedro P_k tal que simultáneamente se cumplan (Cf. 2).

$$(P_k, S_k) < \frac{1}{k} \qquad y \qquad |L(S_k) - A(P_k)| < \frac{1}{k}$$

tomando $k \to \infty$ obtenemos $\lim_k P_k = S$ y $\lim\inf_k L(S_k) = \lim\inf_k A(P_k) \geq L(S)$, quedando demostrado el teorema.

TEOREMA 10. <u>Para un poliedro</u> P, <u>su área lebesguiana coincide con su área elemental</u>: $L(P) = A(P)$.

En efécto, para la sucesión P_k de poliedros que converja hacia P y que cumpla $\lim_k A(P_k) = L(P)$ tenemos, en virtud del corolario al Teorema 6

$$A(P) \leq \lim\inf_k A(P_k) = \lim_k A(P_k) = L(P)$$

La desigualdad faltante $L(P) \leq A(P)$ sale de (25) al tomar una sucesión de poliedros, con todos sus elementos iguales a P.

TEOREMA 11.[38] <u>Para cualquier representación</u> $f: Q \to R^n$ <u>perteneciente a la clase</u> K_1, <u>de la superficie arbitraria</u> S <u>vale</u>

$$L(S) \geq \iint_{Q^o} |X(u,v)|\, du\, dv \,, \tag{26}$$

<u>y el signo de igualdad vale si y solo si</u> f <u>es de la clase de Radó</u>.

En efecto sea cualquier sucesión de poliedros P_k^a tal que $\lim_k P_k^a = S$. Escojamos para cada k una representación casi lineal $f_k : Q_k \to R^n$. Aplicando los teoremas 1 y 4 se tiene

$$\lim_k .\inf A(P_k^a) = \lim_k .\inf . \iint_{Q_k^o} |X_k(u,v)|\, du\, dv \geq \iint_{Q^o} |X(u,v)|\, du\, dv$$

Tomando inf. respecto a <u>a</u> sale (26).

En cuanto a la <u>necesidad</u> de la condición de la igualdad, existen poliedros P_k con representaciones casi lineales respectivas f_k de modo que $\lim_k P_k = S$ y $\lim_k A(P_k) = L(S)$. Entonces $\lim_k \iint_{Q_k^o} |X_k(u,v)|\, du\, dv = L(S) = \iint_{Q^o} |X(u,v)|\, du\, dv$

---

[38] Cf.[1], 3.18, 3.19 y 3.20.

y $\lim_k f_k = f$. f satisface entonces las exigencias de la Definición 5.

En cuanto a la suficiencia si los poliedros P_k satisfacen $\lim_k P_k = S$ y $\lim_k A(P_k) = \lim_k \iint_{Q_k^o} |X_k(u,v)|\, du\, dv = \iint_{Q^o} |X(u,v)|\, du\, dv$, entonces $L(S) \leq \iint_{Q^o} |X(u,v)|\, du\, dv$ y con (26) se completa.

Corolarios inmediatos del Teorema 11 son el Teorema 10 (pues toda representación casi-lineal de un poliedro es obviamente de la clase de Radó) y el

TEOREMA 12. La condición necesaria y suficiente para que una superficie S sea de la clase de Radó, es que admita al menos una representación $f: Q \to R^n$ que cumpla

i) f es de la clase K_1

ii) $L(S) = \iint_{Q^o} |X(u,v)|\, du\, dv$.

Esto es que admita una representación cuya integral clásica coincida con el área de Lebesgue de esa superficie.

BIBLIOGRAFIA.

[1] T. Radó. "On the semicontinuity of double integrals in parametric form". Transactions of the American Mathematical Society, Vol. 51 (1942) págs. 336-361.

[2] J.W.T.Youngs. "On surfaces of class K_1". Bulletin of the American Mathematical Society, Vol. 51 (1945), págs. 669-673.

[3] S.Lefshetz. "Algebraic Topology", American Mathematical Society Colloquium Publications, Vol. XXVII, New York, 1942.

[4] H.D.Huskey. "Fréchét Polyhedra". Duke Mathematical Journal, Vol. 11 (1944) págs 417-425.

[5] E.J.Mc.Shane. "Integration". Princeton Mathematical Series, Vol. 7. Princeton, 1944.

[6] E.Hill y J.D.Tamarkin. "Remarks on a known example of a monotone continuos function". American Mathematical Monthly, Vol. XXXIV (1924), págs. 255-263.

[7] E.J.Mc.Shane. "On the semicontinuity of integrals in the calculus of variations". Annals of Mathematics, Vol 34 (1933), págs. 815-838.

[8] T.Radó. "On a lemma of Mc.Shane". Annals of Mathematics, Vol. 42 (1941), págs. 73-83.

[9] S.Saks. "Theory of the Integral", Warszawa, 1937.

[10] M.Fréchét. "Sur la semicontinuité en géométrie élémentaire". Nouvelles Annales de Mathematiques, Vol. 3 (1924) págs. 1-9.

Instituto de Matemáticas
de la U.N.A.M.