UNA SOLUCION ELEMENTAL EN UN PROBLEMA DE ELASTICIDAD ANISOTROPICA.*

Por José Adem

1. Introducción.

En una placa isotrópica, semi-infinita, con frontera el eje Y y una fuerza P normal a dicho eje operando en el origen, la distribución de esfuerzos en coordenadas polares queda expresada por las ecuaciones

$$\sigma_r = -\frac{2P}{\pi}\frac{\cos\theta}{r}$$

$$\sigma_\theta = 0$$

$$\tau_{r\theta} = 0$$

El objeto de este trabajo es obtener la solución correspondiente en una placa anisotrópica homogénea, con dos direcciones de simetría en ángulo recto para cada punto.

---

* Trabajo presentado en la V Asamblea de Matemáticas, celebrada en Mérida en septiembre de 1948.

La notación que se emplea es conocida y por lo mismo no es detallada.

2. Preliminares.

Tómese en un punto, las dos direcciones de simetría como ejes coordenados. La función "energía de deformación" con respecto a dichos ejes tiene la forma (ver Love, p.160)

$$2W = A\epsilon_x^2 + B\epsilon_y^2 + 2C\epsilon_x\epsilon_y + D\gamma_{xy}^2 \tag{1}$$

donde A, B, C y D representan las constantes elásticas.

Se obtiene de (1)

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\partial W}{\partial \epsilon_x} = A\epsilon_x + C\epsilon_y \\ \sigma_y &= \frac{\partial W}{\partial \epsilon_y} = B\epsilon_y + C\epsilon_x \\ \tau_{xy} &= \frac{\partial W}{\partial \gamma_{xy}} = D\gamma_{xy} \end{aligned} \tag{2}$$

Despejando a ϵ_x, ϵ_y y γ_{xy} en (2)

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\sigma_x}{E_x} - \frac{\sigma_y}{F} \\ \epsilon_y &= \frac{\sigma_y}{E_y} - \frac{\sigma_x}{F} \\ \gamma_{xy} &= \frac{xy}{D} \end{aligned} \tag{3}$$

con $E_x = B^{-1}(AB-C^2)$, $E_y = A^{-1}(AB-C^2)$ y $F = C^{-1}(AB-C^2)$.

Obsérvese que E_x y E_y son respectivamente el módulo de Young en la dirección de los ejes X y Y.

3. <u>La Ecuación Diferencial</u>.

La compatibilidad de los componentes de deformación lineal y angular requiere que

$$(4) \qquad \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2}$$

y sustituyendo (3) en (4) resulta

$$(5) \qquad \frac{1}{D} \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{\sigma_x}{E_x} - \frac{\sigma_y}{F}\right) + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\sigma_y}{E_y} - \frac{\sigma_x}{F}\right)$$

Suponiendo el sistema estático y despreciando el peso del material, las ecuaciones de equilibrio son

$$(6) \qquad \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} &= 0 \end{aligned}$$

Derivando y sumando en (6) se obtiene

$$(7) \qquad \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2}\right)$$

y sustituyendo (7) en (5)

$$(8) \qquad \frac{1}{E_x}\frac{\partial^2\sigma_x}{\partial y^2} + \frac{1}{E_y}\frac{\partial^2\sigma_y}{\partial y^2} - 2\left(\frac{1}{2D} - \frac{1}{F}\right)\frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x\partial y} = 0$$

Supóngase que la distribución de esfuerzos admite una función de Airy, es decir que existe una función ϕ tal que

$$(9) \qquad \sigma_x = \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y}$$

con (9) en (8) resulta la siguiente ecuación diferencial

$$(10) \qquad M\frac{\partial^4\phi}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4\phi}{\partial x^2\partial y^2} + N\frac{\partial^4\phi}{\partial y^4} = 0$$

donde $M = \dfrac{2FD}{E_y(F-2D)}$ y $N = \dfrac{2FD}{E_x(F-2D)}$

4. <u>Solución de la ecuación diferencial.</u>

Sean p y q las raíces de $Z^2 - \frac{2}{N}Z + \frac{M}{N} = 0$, $(p \neq q)$, y k una constante arbitraria. Se puede verificar directamente que la función siguiente es una solución de (10).

$$(11) \qquad \phi = \frac{k}{2(p-q)}\Big(x\log(x^2+qy^2) - x\log(x^2+py^2) + 2\sqrt{q}\,y\tan^{-1}\frac{x}{y\sqrt{q}} - 2\sqrt{p}\,y\tan^{-1}\frac{x}{y\sqrt{p}}\Big)$$

5. **Distribución de esfuerzos.**

Tomando derivadas en (11) de acuerdo con (9) tenemos

$$
\begin{aligned}
\sigma_x &= \frac{kx^3}{(x^2+qy^2)(x^2+py^2)}\\
\sigma_y &= \frac{kxy^2}{(x^2+qy^2)(x^2+py^2)} \qquad (12)\\
\tau_{xy} &= \frac{kyx^2}{(x^2+qy^2)(x^2+py^2)}
\end{aligned}
$$

Si en una placa semi-infinita la frontera es el eje Y y el eje X penetra en la placa, de (12) se tiene que σ_x, σ_y y τ_{xy} se anulan para cualquier punto de la frontera con excepción del origen donde σ_x es "infinito". Luego, si suponemos una fuerza P en la dirección del eje X operando en el origen, la constante k queda determinada de acuerdo con esta condición de frontera, en la forma conocida.

Finalmente, transformando el tensor de esfuerzos a coordenadas polares, sustituyendo luego $x = r\cos\theta$, $y = r \operatorname{sen}\theta$, y efectuando cálculos con las constantes p y q obtenemos

$$\sigma_r = \frac{k\cos\theta}{r\left(\frac{E_x}{E_y}\operatorname{sen}^4\theta + \frac{E_x(F-2D)}{FD}\cos^2\theta\operatorname{sen}^2\theta + \cos^4\theta\right)}$$

$$\sigma_\theta = 0\,, \qquad \tau_{r\theta} = 0$$

que es la solución prometida en la introducción.

Instituto de Matemáticas.