SOBRE LA SUBSTITUCION DE LAS VARIABLES FUNCIONALES EN EL CALCULO FUNCIONAL DE PRIMER ORDEN.

Gonzalo Zubieta R.

En este artículo se desarrollan métodos que permiten dar una formulación correcta de las reglas de substitución para variables proposicionales y funcionales del cálculo funcional de primer orden. Algunos de los resultados fueron ya expuestos en la VI Asamblea Regional de Matemáticas que se celebró en Veracruz, a principios de mayo pasado.

1. FORMULAS.

Aunque los razonamientos que siguen no dependen del sistema particular de notación que se emplee, será conveniente tomar alguno a modo de ilustración. Las fórmulas de este sistema se construirán a partir de los siguientes elementos: variables proposicionales, 'p', 'q',..., variables funcionales, 'f', 'g', 'ϕ', 'ψ',... ; variables individuales, 'w', 'x', 'y', 'z', ... Las fórmulas elementales se construirán como de costumbre y adoptaremos la no-conjunción y cuantificación universal (de variables individuales) como medios de composición.

Las fórmulas serán designadas con letras latinas mayúsculas y las variables individuales con letras griegas minúsculas. La no-conjunción de las fórmulas A y B se designará con el símbolo 'A/B'. La cuantificación de la fórmula A respecto a la variable individual α se denotará con '(α)A'.

Decimos que dos fórmulas son de composición semejante si ambas son elementales, o ambas son no-conjunciones o ambas son cuantificaciones.

<u>Nota</u>. También usaremos la no-conjunción como una operación binaria definida entre valores de verdad, por medio de la tabla siguiente:

$$V/V = F \qquad V/F = F/V = F/F = V.$$

Una propiedad se llama hereditaria si la tienen las no conjunciones y cuantificaciones de fórmulas que la tienen.

Supondremos que la construcción de fórmulas está basada en los principios siguientes:

1.1. Si A y B son fórmulas y α es una variable individual, entonces son fórmulas A/B y (α)A.

1.2. (Principio de inducción). Una propiedad hereditaria que pertenece a las fórmulas elementales, pertenece a todas las fórmulas.

1.3. (Representación única). Una misma fórmula no puede ser de dos composiciones no semejantes. Además, si (α)A

$= (\beta)B$ entonces $\alpha = \beta$ y $A = B$; y si $A/B = A'/B'$, entonces $A = A'$ y $B = B'$.

(El que una fórmula no puede ser de dos composiciones no-semejantes quiere decir que no puede ser, por ejemplo, no conjunción y cuantificación a la vez.)

Las componentes de una fórmula se definen por inducción. Una fórmula elemental tiene por componente única la misma fórmula. Las componentes de A/B son: A/B y las componentes de A y las de B. Las componentes de $(\alpha)A$ son: $(\alpha)A$ y las componentes de A.

Las dos propiedades siguientes se cumplen para A elemental y son hereditarias.

(1) Si M es componente de A, entonces las componentes de M son componentes de A.

(2) Si las componentes elementales de A tienen una propiedad hereditaria P, entonces A tiene la propiedad P.

Combinando (1) y (2), tenemos:

Teorema I. Cualquier propiedad hereditaria que pertenece a las componentes elementales de una fórmula, es común a todas las componentes de la fórmula.

2. SUCESIONES.

Vamos a considerar únicamente sucesiones finitas y una sucesión nula (que no tiene elementos). A las presencias de elementos en una sucesión les llamaremos lugares. La longitud de una sucesión es el número de lugares en la sucesión. La sucesión nula tiene longitud cero.

La <u>concatenación</u> de las sucesiones u y v es la sucesión $u^\frown v$ que se obtiene colocando primero u y a continuación v.

Si u es la sucesión nula y v es una sucesión cualquiera, tendremos $u^\frown v = v^\frown u = v$.

Para las longitudes se tiene la propiedad

$$\text{long}(u^\frown v) = \text{long } u + \text{long } v \tag{2.1}$$

Si u es una sucesión y α un elemento, $u-\alpha$ es la sucesión que se obtiene de u suprimiendo los lugares que α ocupa en u. Si α no figura en u, $u-\alpha = u$. Si todos los lugares de u son ocupados por α, $u-\alpha$ es la sucesión nula.

Si u es una sucesión de la longitud de $s-\alpha$, designaremos con 'u_x' la sucesión que se obtiene de u intercalando x en los lugares que α ocupa en s. Es decir, u_x contiene x en los lugares que en s ocupa α, y si de u_x se suprimen estos lugares se obtiene u.

Una sucesión de símbolos le designaremos poniéndola entre paréntesis. Por ejemplo, $(xxyz)^\frown(xzwyw) = (xxyzxzwyw)$; $(xzwyw) - \text{'}w\text{'} = (xzy)$.

De particular interés es la sucesión $s(A)$ de una fórmula A, la que consta de las presencias libres de variables individuales en la fórmula, en el orden con que aparecen en A. Estas sucesiones tienen las propiedades siguientes:

(2.2) $$s(A/B) = s(A) \frown s(B)$$

(2.3) $$s((\alpha)A) = s(A) - \alpha.$$

Usaremos el símbolo '$a(M)$' para referirnos a una sucesión arbitraria de la longitud de $s(M)$. La sucesión $a(M/N)$ la descomponemos en dos partes $a(M)$, $a(N)$, de las longitudes de $s(M)$, $s(N)$ respectivamente, y tales que $a(M) \frown a(N) = a(M/N)$. De la sucesión $a((\alpha)M)$ se obtiene la sucesión $a_x(M)$ intercalando el elemento x en los lugares que α ocupa en $s(M)$.

Un sistema de valores de una clase T para la sucesión $s(M)$ es una sucesión $a(M)$ que se obtiene de $s(M)$ substituyendo cada variable, en todos los lugares que ocupa en $s(M)$, por un elemento de T.

Dos sistemas de valores $a(M)$ y $b(N)$, para $s(M)$ y $s(N)$, respectivamente, se llaman compatibles, si las variables comunes a ambas sucesiones son substituidas de la misma manera.

3. ANALOGIA.

La armadura de una fórmula es la expresión que se obtiene de dicha fórmula substituyendo por la letra 'P' cada una de las presencias libres de variables individuales en la fórmula.

Decimos que A y B son análogas, $A \approx B$, si sus armaduras son variantes alfabéticas la una de la otra*.

Podemos caracterizar la analogía como una relación de equivalencia (reflexiva, simétrica y transitiva) entre fórmulas, sujeta a las condiciones siguientes:

3.1. Si $A \approx B$ entonces A y B son de composición semejante y long s(A) = long s(B).

3.2. $A/B \approx A'/B'$ si, y sólo si, $A \approx A'$ y $B \approx B'$.

3.3. $(\alpha)A \approx (\beta)B$ si, y sólo si, $A \approx B$ y α ocupa en s(A) los mismos lugares que β ocupa en s(B).

Por inducción se demuestra que basta definir una relación de analogía entre fórmulas elementales para que ésta se extienda a todas las fórmulas. Lo más natural es considerar como análogas, fórmulas elementales que tienen la misma armadura, como 'fxy', 'fyy', cuya armadura común es 'fPP'.

---

*Para la definición de variante alfabética ver Quine, Math. Logic § 21.

4. INTERPRETACION.

En lo sucesivo consideraremos un conjunto no vacío T de elementos cualesquiera.

Una <u>función proposicional de grado n</u> $(n \geq 0)$ <u>en</u> T es una correspondencia f que a cada sucesión u, de longitud n, de elementos de T le asocia un valor de verdad fu.

<u>Una interpretación</u> Γ <u>de la fórmula</u> A <u>en el conjunto</u> T asocia a cada componente M de A una función proposicional en T, Γ_M, de grado = long s(M) y con las propiedades siguientes:

4.1. Si $M \approx N$ entonces $\Gamma_M = \Gamma_N$.

4.2. Para toda sucesión a(M/N) de elementos de T, $\Gamma_{M/N}\, a(M/N) = \Gamma_M\, a(M)/\, \Gamma_N\, a(N)$.

4.3. Dada una sucesión $a((\alpha)M)$ de elementos de T, $\Gamma_{(\alpha)M}\, a((\alpha)M) = V$ si, y sólo si, $\Gamma_M\, a_x(M) = V$, para toda x de T.

De 4.2, 4.3 e inducción resulta que, en una interpreración, las funciones asociadas a las componentes elementales determinan las funciones asociadas a las componentes restantes. Por otra parte, si a cada componente elemental M de una fórmula se le asocia una función propcsicional Γ_M de grado = long s(M), de manera que a componentes elementa les análogas les corresponda la misma función, y si se extiende esta correspondencia a las componentes restantes de la fórmula por medio de las condiciones 4.2 y 4.3, entonces se obtiene una interpretación de la fórmula. La demostración se basa en la anterior definición de interpretación y en la unicidad de representación de una fórmula.

(Un sistema de valores de T para s(M) es, por definición, una sucesión a(M) de elementos de T, obtenida de s(M) por substitución).

Decimos que la fórmula A <u>es válida en el conjunto</u> T si, para toda interpretación Γ de A en T y todo sistema a(A) de valores de T para s(A), se tiene Γ_A a(A)=V.

5. OPERACIONES REGULARES.

Si 'fxy' se reemplaza por 'ϕxyxz' entonces:

'fyx'	se	substituye	por	'ϕyxyz'
'fxw'	"	"	"	'ϕxwxz'
'fyy'	"	"	"	'ϕyyyz'
'fxz'	"	"	"	'ϕxzxz'

. . . .

La operación que nos permite pasar de la sucesión de la primera fórmula a la de la segunda, esto es, la que transforma (xy) en (xyxz), etc., es un ejemplo de operación regular.

Un segundo ejemplo lo tenemos al substituir 'gxyz' por 'ψxyy'. En este caso 'gxwz' debe substituirse por 'ψxww', 'gxyw' por 'ψxyy', etc.

Las operaciones regulares pueden caracterizarse como sigue:

Una operación regular R de longitud n transforma sucesiones u de longitud n en sucesiones Ru de longitud constante. Así, de las operaciones anteriores, la primera es de longitud 2 y la segunda de longitud 3.

Una operación regular R asocia a cada lugar de la sucesión original u, cero o más lugares de la sucesión transformada Ru. Esta correspondencia está determinada por R y no depende de la sucesión particular u que se considere. Además, un lugar de Ru no puede ser correspondiente de dos lugares distintos de u.

Para toda operación regular R y toda sucesión u de la longitud de R, el elemento que ocupe algún lugar de u ocupa los lugares correspondientes en Ru. Puede observarse esto en los dos ejemplos anteriores. La operación del primer ejemplo asocia al primer lugar de la sucesión original, el primero y tercer lugar de la sucesión transformada, y al segundo lugar de la original le asocia el segundo de la transformada. La operación del segundo ejemplo asocia al tercer lugar de la sucesión original cero lugares (ningún lugar) de la transformada.

A los lugares de Ru que no son correspondientes de algún lugar de u, les llamaremos <u>lugares sobrantes respecto a</u> R.

La operación R asigna a cada lugar sobrante un elemento llamado parámetro de tal manera que en la sucesión transformada cada lugar sobrante es ocupado por el parámetro respectivo independientemente de cuál sea la sucesión original.

En la operación del primer ejemplo anterior, hay un lugar sobrante, que es el cuarto lugar de la sucesión transformada, y el parámetro es 'z'. En el segundo ejemplo no hay lugares sobrantes.

La concatenación de las operaciones regulares R y S es una operación $R^\frown S$ que tiene por longitud la suma de las longitudes de R y de S. $R^\frown S$ se define de tal modo que, para toda sucesión $u^\frown v$, donde u tiene la longitud de R y v tiene la de S,

(5.1) $$(R^\frown S)(u^\frown v) = (Ru)^\frown(Sv).$$

Se demuestra que $R^\frown S$ es regular, haciendo corresponder a cada lugar de la primera parte de $u^\frown v$ los lugares de la primera parte de $Ru^\frown Sv$ asociados por R, y a cada lugar de la segunda parte de $u^\frown v$, los lugares de la segunda parte de $Ru^\frown Sv$ asociados por S. A cada lugar sobrante de la primera parte de $Ru \frown Sv$, $R \frown S$ le asignará el parámetro asignado por R, y a cada lugar sobrante de la segunda parte, $R \frown S$ asociará el parámetro asignado por S.

Consecuencia de lo anterior es que los parámetros de $R \frown S$ son los parámetros de R y los parámetros de S.

Para cualquier operación regular R y cualquier sucesión s de la longitud de R, definimos (R,s,α) como la operación que se obtiene de R suprimiendo en la sucesión original los lugares que α ocupa en s y suprimiendo en la sucesión transformada los lugares correspondientes.

En otros términos, (R,s,α) es una operación de la longitud de $s-\alpha$ tal que si v es de la longitud de s y u se obtiene de v suprimiendo los lugares que α ocupa en s, entonces

(5.2) $(R,s,\alpha)u$ se obtiene de Rv suprimiendo los lugares correspondientes, según R, a los que α ocupa en s.

Se demuestra que (R,s,α) es regular, haciendo corresponder a cada lugar de u, situado en v, los lugares de $(R,s,\alpha)u$, situados en Rv, asociados por R; y asociando a cada lugar sobrante en $(R,s,\alpha)u$, situado en Rv, el parámetro asignado por R.

Como consecuencia, tenemos que los parámetros de

(R,s,α) son los parámetros de R.

<u>Teorema II</u>. Si u es una sucesión de la longitud de (R,s,α) y si u_x se obtiene de u intercalando el elemento x en los lugares que α ocupa en s, entonces Ru_x se obtiene de $(R,s,\alpha)u$ intercalando x en los lugares correspondientes.

Demostración.- Por hipótesis, x ocupa en u_x los lugares que α ocupa en s y si se suprimen en u_x estos lugares se obtiene u. Por ser R regular, x ocupa en Ru_x los lugares correspondientes a los que α ocupa en s, y, por definición de (R,s,α), al suprimir estos lugares en Ru_x, se obtiene $(R,s,\alpha)u$.

Decimos que la operación R' se obtiene de la operación regular R al asignarle un sistema de valores a los parámetros de R, si R' es de la longitud de R y si, para toda sucesión u de la longitud R, $R'u$ se obtiene de Ru substituyendo los parámetros, en los lugares sobrantes, por sus valores respectivos en el sistema.

Se prueba que R' es regular, asociándole a cada lugar de u los mismos lugares de $R'u$ que le asocia R, y asociándole a cada lugar sobrante de $R'u$ el valor, en el sistema, del parámetro asignado por R.

Si $(R\frown S)'$ se obtiene de $R\frown S$ asignándole un sistema de valores a los parámetros de $R\frown S$ y si R' se obtiene de R y S' de S asignándole a los parámetros los mismos valores, entonces

$$(5.3) \qquad (R\frown S)' = R'\frown S'$$

En efecto, si $u\frown v$ es una sucesión tal que long u = long R y long v = long S, entonces, por (5.1):

$$(R\frown S)\ (u\frown v) = (Ru)\frown(Sv)$$

Si substituímos los parámetros, en los lugares sobrantes, por sus valores, tenemos

$$(R\frown S)'\ (u\frown v) = (R'u)\frown(S'v).$$

Otra propiedad importante es la siguiente:

Si $(R,s,\alpha)'$ se obtiene de (R,s,α) asignándole un sistema de valores a los parámetros de (R,s,α) y si R' se obtiene de R asignándole los mismos valores a los parámetros, entonces

$$(5.4) \qquad (R,s,\alpha)' = (R',s,\alpha).$$

Demostración.- Sea u una sucesión de la longitud de (R,s,α) y v una sucesión de la longitud de R de la cual se obtiene u al suprimir los lugares que α ocupa en s. Por (5.2), $(R,s,\alpha)u$ se obtiene de Rv suprimiendo los lugares correspondientes a los que α ocupa en s. Substituyendo los parámetros, en los lugares sobrantes, por sus valores, tenemos que $(R,s,\alpha)'u$ se obtiene de $R'v$ suprimiendo los lugares correspondientes a los que α ocupa en s. Luego $(R,s,\alpha)'u = (R',s,\alpha)u$.

La operación idéntica de longitud n, es decir, aquella que transforma en si misma cada sucesión de longitud n, es una operación regular sin elementos sobrantes. Esta operación asocia a cada lugar de la sucesión original el mismo lugar en la transformada.

6. CASOS PARTICULARES DE UNA FORMULA.

Para que la fórmula B pueda considerarse como un caso particular de la fórmula A, cada componente M de A debe tener su representante M' en B, de tal manera que las M' sean entre si como las componentes que representan, es decir: la representante de A debe ser B; si M' es la representante de M y N' la de N, entonces la representante de M/N debe ser M'/N' y la representante de $(\alpha)M$ debe ser $(\alpha)M'$.

Además, cada lugar de $s(M)$ debe tener sus representantes (cero o más) en $s(M')$ de manera que la variable que ocupe dicho lugar en $s(M)$ ocupará los lugares corres pondientes en $s(M')$. Esta correspondencia define, para cada componente M de A, una operación regular $[M]$ que transforma $s(M)$ en $s(M')$. De esta manera, al darles valores a las variables proposicionales y funcionales en B, la matriz que se obtiene de cada componente M' de B, y cuyos términos forman la sucesión $s(M')$, define una relación entre los términos que son correspondientes de términos de $s(M)$, relación que depende de los parámetros formados por los términos restantes. Estas relaciones deben ser entre si como las que, en términos de $s(M)$, expresan las matrices obtenidas de las componentes M al darles valores a las variables proposicionales y funcionales de A.

Por lo mismo, si $M \approx N$ en A, entonces las matrices obtenidas de M' y N' al darles valores a las variables proposicionales y funcionales de B, deben expresar la misma relación en los términos de $s(M')$ y $s(N')$, respectivamente, que son correspondientes de los de $s(M)$ y $s(N)$. Para ello debe tenerse: i) $M' \approx N'$; ii) los lugares correspondientes en $s(M')$ y $s(N')$ a un mismo lugar de $s(M)$ y $s(N)$ deben coincidir; iii) finalmente, los lugares de $s(M')$ y $s(N')$ que no sean correspondientes de algún lugar de $s(M)$ y $s(N)$, deben ser ocupados de la misma manera. Las condiciones contenidas en ii) y iii) equivalen a suponer que $[M] = [N]$.

Por otra parte, si M/N es componente de A, la matriz que se obtiene de M'/N' al dar valores a las variables proposicionales y funcionales de B, debe expresar una relación, en los términos correspondientes a los de $s(M/N)$, que sea equivalente a la no-conjunción de la relación que, en los términos de $s(M')$ correspondientes a los de $s(M)$, expresa la matriz obtenida de M' y la relación que, en los términos de $s(N')$ correspondientes a $s(N)$, expresa la matriz obtenida de N'. Por consiguiente, $[M/N] = [M] \frown [N]$.

Finalmente, la matriz obtenida de $(\alpha)M'$ debe expresar una relación en los términos de $s((\alpha)M')$ correspondientes a los términos de $s((\alpha)M)$, que sea equivalente a la cuantificación, en los términos de $s(M')$ correspondientes a los lugares que α ocupa en $s(M)$, de la relación que, en los términos de $s(M')$ correspondientes a los de $s(M)$, expresa la matriz obtenida de M. Es decir, $[(\alpha)M] = ([M], s(M), \alpha)$.

Las consideraciones anteriores conducen a la siguiente definición.

<u>Definición</u>. La fórmula B es un caso particular de la fórmula A si a cada componente M de A le corresponde una componente M' de B y una operación regular $[M]$ que transforma $s(M)$ en $s(M')$, con las propiedades siguientes:

6.1. $A' = B$, $(M/N)' = M'/N'$, $((\alpha)M)' = (\alpha)M'$.

6.2. Si $M \approx N$ entonces $M' \approx N'$ y $[M] = [N]$.

6.3. $[M/N] = [M] \frown [N]$.

6.4. $[(\alpha)M] = ([M], s(M), \alpha)$.

De esta definición se obtienen los dos teoremas siguientes:

<u>Teorema III</u>. Si $(\alpha)M$ es componente de A, entonces α no es parámetro de $[M]$.

Demostración.- En vista de que α no figura en $s((\alpha)M') = s((\alpha)M)' = [(\alpha)M]s((\alpha)M)$, resulta que α no es parámetro de $[(\alpha)M]$. Y como $[(\alpha)M] = ([M], s(M), \alpha)$, α no es parámetro de $[M]$.

<u>Teorema IV</u>. Si A es válida en un conjunto (no vacío) T y si B es un caso particular de A, entonces B es válida en T.

Demostración.- Sea Γ una interpretación de B en T y sea b(B) un sistema de valores de T para s(B). Para cada componente M de A definimos la operación regular $[\dot{M}]$ que se obtiene de $[M]$ substituyendo los parámetros, en los lugares sobrantes, por sus valores en el sistema b(B). A cada componente M de A le asociamos la función proposicional Φ_M definida de la manera siguiente:

$$\Phi_M\, a(M) = \Gamma_{M'}[\dot{M}]a(M).$$

Φ satisface las condiciones 4.1, 4.2 y 4.3 y, por consiguiente, es una interpretación de A. Además, si a(A) es un sistema de valores de T para s(A) compatible con b(B), resulta que $[\dot{A}]a(A) = b(B)$. Por lo tanto, tenemos

$$\Gamma_B\, b(B) = \Gamma_A \cdot [\dot{A}]a(A) = \Phi_A a(A).$$

como Φ es una interpretación de A y $a(A)$ es un sistema de valores para $s(A)$, se tiene $\Phi_A a(A) = V$, de donde $\Gamma_B\, b(B) = V$, como se quería demostrar.

7. SUBSTITUCION DE COMPONENTES ELEMENTALES.

Sea $\{M\}$ un conjunto de fórmulas elementales análogas y R una operación regular de la longitud de $s(M)$. Si a cada una de estas fórmulas M le asociemos una fórmula M' de manera que estas M' resulten análogas entre si y que $R\, s(M) = s(M')$, entonces el conjunto formado por las M' se llama un <u>sistema asociado a</u> $\{M\}$ <u>mediante la operación</u> R.

Como ejemplos de sistemas asociados, tenemos los que se dieron al principio del párrafo 5 para ilustrar el concepto de operación regular. Un tercer ejemplo es el siguiente:

Fórmulas M:	Fórmulas asociadas M':
fxyz	(fxy/(w)gwyx)
fyyz	(fyy/(w)gwyy)
fxwz	(fxw/(z)gzwx).

Teorema V. Si B se obtiene de A reemplazando las componentes de A análogas a una componente elemental dada H por las fórmulas respectivas de un sistema asociado al de estas componentes mediante cierta operación regular R, y si ninguna componente de A es de la forma $(\gamma)C$, donde γ es parámetro de R, entonces B es un caso particular de A.

Demostración.- A cada componente M de A le asociamos la fórmula M' que se obtiene de ella al hacer la substitución: si $M \approx H$ y M^* su asociada, entonces $M' = M^*$; para M elemental $\not\approx H$, $M' = M$; $(M/N)' = M'/N'$; $((\alpha)M)' = (\alpha)M'$. La operación $[M]$ la definimos, para componentes elementales, igual a R o a la operación idéntica, según que M sea análoga a H o no, Para las componentes restantes la operación se define por inducción: $[M/N] = [M]\frown[N]$ y $[(\alpha)M] = ([M], s(M), \alpha)$. A fin de que, bajo las presentes circunstancias, la fórmula B sea un caso particular de A, es necesario que se cumplan las tres condiciones siguientes:

(1) $$[M]s(M) = s(M')$$

(2) Si $M \approx N$ entonces $[M] = [N]$.

(3) Si $M \approx N$ entonces $M' \approx N'$.

Estas propiedades son inmediatas en el caso de componentes elementales y sólo necesitamos probar que son hereditarias.

Primeramente, supongamos que (1) se cumple para M y también para N. Dado que $[M/N] = [M]\frown[N]$ y por la hipótesis de inducción, tenemos que $[M/N]s(M/N) = s(M')\frown s(N')$ $= s(M'/N') = s(M/N)'$. Supongamos ahora que (1) se cumple para M y demostraremos que se cumple para $(\alpha)M$. Primero conviene observar que los parámetros de $[M]$ son parámetros de R, lo cual se demuestra fácilmente por inducción. En vista de este hecho y de que $[(\alpha)M] = ([M], s(M), \alpha)$, y de la hipótesis de inducción, tenemos que $[(\alpha)M]s((\alpha)M =$ $s(M')-\alpha = s((\alpha)M') = s((\alpha)M)'$, como se quería demostrar.

El que (2) sea hereditaria, resulta de las condiciones 3.2 y 3.3 de analogía y de la definición de $[M]$ que hemos adoptado cuando M no es elemental.

Para demostrar que (3) es hereditaria, supongamos primero que $M_1/M_2 \approx N_1/N_2$. Por la condición 3.2 de analogía y por la hipótesis de inducción obtenemos que $M_1'/M_2' \approx N_1'/N_2'$, de donde $(M_1/M_2)' \approx (N_1/N_2)'$. Supongamos ahora que $(\alpha)M \approx$ $(\beta)N$, lo cual implica que $M \approx N$ y, por (2), que $[M] = [N]$. Como α no es parámetro de $[M]$, los lugares que α ocupa en $s(M')$ son los correspondientes, según $[M]$, de los que α ocupa en $s(M)$. Análogamente, los lugares que β ocupa en $s(N')$ son los correspondientes, según $[N]$, de los que β ocupa en $s(N)$. Ahora bien, como estos lugares son los mismos en $s(M)$ y $s(N)$ por ser $(\alpha)M \approx (\beta)N$, y como además $[M] = [N]$, resulta que los lugares que α ocupa en $s(M')$ son los mismos que β ocupa en $s(N')$. Esto, unido a que $M' \approx N'$, lo cual vale por la hipótesis de inducción, nos dice que $(\alpha)M' \approx (\beta)N'$, de donde $((\alpha)M)' \approx ((\beta)N)'$, como se quería demostrar.

Instituto de Matemáticas U.N.A.M. — Junio de 1950.

REFERENCIAS.

1 W.V. Quine - Mathematical Logic (Capítulos 2 y 7)

2 - Concatenation as a basis for arithmetic, Journal of Symbolic Logic, Vol. 11, pags. 105-114.

3 A.Church - Introduction to Mathematical Logic (Part 1)

4 Hilbert y Bernays - Grundlagen der Mathematik (Tomo 1).