UNA SUBSTITUCION PARA CIERTOS SISTEMAS MAGNETICOS

por Anselmo Chargoy

Instituto de Geofísica de la Universidad Nal. de México.

a) Se tiene un sistema de un dipolo y un cuadripolo en forma tal, que residen en un punto 0, la dirección del vector momento M_1 del dipolo se escoge como eje OZ de un sistema de coordenadas ortogonales. Si en las ecuaciones que dan el potencial del dipolo y cuadripolo respectivamente, para un punto $P(r,\theta,\lambda)$ con $r \geqq 1$,

$$V_1 = \frac{M_1 \cos\theta}{r^2}, \quad V_2 = \frac{M_2}{r^3}\left\{\frac{3}{2}\cos u_1 \cos u_2 - \frac{1}{2}\cos\alpha\right\}$$

Se expresa el potencial debido al sistema de las dos cargas con el uso de los harmónicos esféricos introducidos por A. Schmidt [1] :

$$P_1^0 = \cos\theta, \quad P_1^1 = \operatorname{sen}\theta, \quad P_2^0 = \frac{3\cos 2\theta + 1}{4}$$

Trabajo presentado en la VI Asamblea de la Sociedad Matemática Mexicana en Veracruz, Ver. Mayo de 1950.

$$P_2^1 = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ sen } 2\,\theta \quad , \qquad P_2^2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ sen}^2\,\theta \ .$$

Sea la ecuación:

$$V = \frac{M_1}{r^2} P_1^0 + \frac{1}{r^3} \Big\{ a_2^0 P_2^0 + (a_2^1 \cos\lambda +$$

$$b_2^1 \text{ sen } \lambda) P_2^1 + (a_2^2 \cos 2\lambda + b_2^2 \text{ sen } 2\lambda) P_2^2 \Big\} \qquad \ldots (1)$$

Y si en esta ecuación se tiene:

I) $M_1 \gg a_2^0, a_2^1, b_2^1$, en tal forma que para un desarrollo de Taylor, los términos que contienen coeficientes con cuadrados, o potencias mayores de dos de a_1^0/M_1 , a_2^1/M_1, b_2^1/M_1, no afectan el potencial en forma sensible y esos términos pueden despreciarse.

Entonces, para puntos P suficientemente alejados de O, existe un sistema de dipolo y cuadripolo, cuyos ejes forman un sistema ortogonal, con el momento del dipolo paralelo e igual al del dipolo dado, y con residencia en un punto Q próximo a O, con la propiedad, que produce un potencial muy aproximado al potencial del sistema dado.

b) En efecto, si en el dipolo dado, se considera un desplazamiento $\bar{\ell}$ a lo largo del eje OZ, lo suficientemen te pequeño para tomar en cuenta un solo término del incremento de potencial, en el desarrollo de Taylor, este incremento estará representado por

$$V^1_{1,z} = - \ell \frac{\partial V_1}{\partial z} = M_1 \ell \frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{1}{r}\right) .$$

Con el uso de los harmónicos esféricos del párrafo a) es:

$$V^1_{1,z} = \frac{1}{r^3} c^o_2 P^o_2 , \quad \text{con} \quad c^o_2 = 2 M_1 \ell .$$

Como en el caso anterior, si se considera un desplazamiento $\bar{\ell}$, $\bar{\ell}$ colocado en el plano XOY, será:

$$V^1_{1,e} = M_1 \ell \frac{\partial^2}{\partial z \partial \ell} \left(\frac{1}{r}\right)$$

por lo tanto

$$V^1_{1,e} = \frac{1}{r^3} (c^1_2 \cos \lambda + d^1_2 \operatorname{sen} \lambda) P^1_2 ,$$

con

$$c^1_2 = \sqrt{3} M_1 \cos \lambda_o , \quad d^1_2 = \sqrt{3} M_1 \operatorname{sen} \lambda_o ,$$

$\cos \lambda_o$, $\operatorname{sen} \lambda_o$ cosenos de $\bar{\ell}$ con los ejes OX, OY.

En general un desplazamiento de M_1 a un punto próximo a O, sea Q (x_o, y_o, z_o), tiene un incremento de poten cial dado por

$$V_1^1 = \frac{1}{r^3} \left[c_2^0 \, P_2^0 + (c_2^1 \cos \lambda + d_2^1 \operatorname{sen} \lambda) \, P_2^1 \right] \qquad \ldots (2)$$

c) Comparando (1) y (2), se ve puede hacerse

$$V = V_1 + V_1^1 + \frac{1}{r^3} (a_2^2 \cos 2 \lambda + b_2^2 \operatorname{sen} 2 \lambda) \, P_2^2 \qquad \ldots (3)$$

con tal que se verifique

$$c_2^0 = a_2^0 \, , \qquad c_2^1 = a_2^1 \, , \qquad d_2^1 = b_2^1$$

lo que conduce a

$$z_o = \frac{a_2^0}{2 M_1} \, , \qquad x_o = \frac{a_2^1}{\sqrt{3} \, M_1} \, , \qquad y_o = \frac{b_2^1}{\sqrt{3} \, M_1}$$

por la condición I) se obtiene un punto Q (x_o, y_o, z_o) - cercano a 0.

d) Existe un cuadripolo con momento

$$\left| M_{2,0} \right| = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(a_2^2 \, a_2^2 + b_2^2 \, b_2^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

con ejes OH_1, OH_2, tales que están situados en el plano --

XOY, y, en que si

$$XOH_1 = \lambda_o ,$$

verifican:

$$\frac{\sqrt{3}}{2} M_{2,0} \text{ sen } 2\lambda_o = -a_2^2 , \quad \frac{\sqrt{3}}{2} M_{2,0} \cos 2\lambda_o = b_2^2 ,$$

$$XOH_2 = \lambda_o + \frac{\pi}{2} .$$

En tal forma que este cuadripolo tiene su potencial -- para P (r,θ,λ):

$$V_{2,0} = \frac{1}{r^3} (a_2^2 \cos 2\lambda + b_2^2 \text{ sen } 2\lambda) P_2^2 ,$$

de manera que el potencial del sistema dado en el párrafo - a), puede escribirse:

$$V = V_1 + V_1^1 + V_{2,0} .$$

Consistente en el potencial de un dipolo de momento - M_1 residente en Q y de un momento de cuadripolo $M_{2,0}$ - con residencia en O.

e) Si se considera una traslación del cuadripolo ---

H_1OH_2 paralelamente a la posición del sistema de residencia en O, y de este punto O hacia Q, el potencial sufre un incremento de la forma

$$V^1_{2,0} = - \ell \frac{\partial V_{2,0}}{\partial \ell} ,$$

por lo tanto

$$V^1_{2,0} = - \frac{1}{2} \ell \; M_{2,0} \frac{\partial^3}{\partial h_1 \partial h_2 \partial \ell} \left(\frac{1}{r} \right) ,$$

este no es apreciable en el cálculo; para puntos cuya distancia r sea tal que $\frac{1}{r^4}$ resulta ya muy pequeño, con lo cual se tiene que el potencial debido al sistema de dipolo y cuadripolo con residencia en Q, y de momentos M_1 y $M_{2,Q}$ con sus ejes ortogonales; sea

$$V = V_1 + V^1_1 + V_{2,Q} ,$$

es muy aproximado el valor del segundo miembro de (1) párrafo a) para puntos $P (r,\theta,\lambda)$, con $\frac{1}{r^4}$ pequeño.

La ventaja que se obtiene al sustituir el sistema magnético dado en O por el sistema ortogonal en Q, es que se puede tomar como sistema de referencia el sistema en Q, con lo cual se puede escribir la ecuación (1) en la forma:

$$V = \frac{M_1 \cos\theta}{r^2} + \frac{3}{4}\,\frac{M_2 Q}{r^3}\ \text{sen}\ 2\,\lambda\ \text{sen}^2\,\theta\ .$$

con r, θ, λ tomados en el nuevo sistema. En el nuevo sistema de coordenadas, QH_1 da la dirección del eje OX y QH_2 da la dirección del eje OY. Otra ventaja también con esta sustitución, es que el dipolo trasladado a Q tiene un potencial que describe con más aproximación el potencial dado por todo el segundo miembro de la ecuación (1), que el dipolo con residencia en O.

f) Usando este criterio en el caso terrestre se encuentra que en la ecuación del potencial [2] :

$$\begin{aligned} V = a \Big\{ & \left(\frac{a}{r}\right)^2 \cdot \Big[g_1^o\, P_1^o + (g_1^1 \cos\lambda + h_1^1\, \text{sen}\lambda)\, P_1^1 \Big] \\ & + \left(\frac{a}{r}\right)^3 \cdot \Big[g_2^o\, P_2^o + (g_2^1 \cos\lambda + h_2^1\, \text{sen}\lambda)\, P_2^1 \\ & + (g_2^2 \cos 2\lambda + h_2^2\, \text{sen}\ 2\lambda)\, P_2^2 \Big] \Big\} , \end{aligned}$$

Aproximado a sólo términos de orden primero y segundo de P_J^i, y para la acción magnética de origen interno, puede atribuirse a la existencia de un dipolo y un cuadripolo con residencia en el centro O de la tierra.

Usando los valores:

$$g_1^0 = -3032 , \quad g_1^1 = -229 , \quad h_1^1 = 590 ,$$

$$g_2^0 = -125 , \quad g_2^1 = 228 , \quad h_2^1 = -146 ,$$

$$g_2^2 = 150 , \quad h_2^2 = 48 ,$$

dados por V.I. Afanasieva [3] , es obvio que la condición I) se verifica; al sustituirse el sistema de dipolo-cuadri polo con residencia en 0 por un ortogonal, se encontró [4] que Q tiene la siguiente posición: 14°23' lat.norte, 156°24' long. Este, distancia al centro 0 de la tierra 388 Km. los cosenos directores de OH_1 valen: - 0.88990 , 0.42853 , 0.15632; los de OH_2 son: -0.44778 ,- 0.88335 , - 0.13850 .

$$M_{2,Q} = 218.87 \times 10^{-4} R^4 \text{ oersteds} \times \text{cm}^4,$$

R radio de la tierra.

$$M_1 = 3097.35 \times 10^{-4} R^3 \text{ oersteds} \times \text{cm}^3$$

Al Dr. Manuel Sandoval Vallarta, se le agradece la orienta ción que dió en este trabajo.

B I B L I O G R A F I A.

[1] S. Chapman and J. Bartls, Geomagnetism II, 611, Clavendon Press, Oxford (1940).

[2] Opos Cit., 639

[3] V.I. Afanasieva, Terr.Magnetism, 51, 26, Table 6 - (1946).

[4] Anselmo Chargoy, Journal of Geophysical Research, 55, 47 (1950).