NOTA
SOBRE LAS IMAGENES DE LOS CONJUNTOS.

F. Zubieta R.

El objeto de esta nota es presentar una definición intrínseca del concepto de imagen de un conjunto y otra parecida para las imágenes inversas.

En los tratados de Hausdorff, Sierpinski, Bourbaki, etc. se definen las imágenes de los conjuntos como sigue: Se consideran dos conjuntos X, Y, no-vacíos y una función unívoca $\bar{f}$ que transforma cada elemento de X en un elemento de Y; a esta $\bar{f}$ (que es una función de punto) se le asocia una función de conjunto f que transforma cada subconjunto A de X en un subconjunto $f(A)$ de Y. La imágen $f(A)$ de A, que determina f, es el conjunto de los valores $\bar{f}(a)$ correspondientes a los elementos de A. De este modo, queda definida f por medio de $\bar{f}$.

Hago notar que las funciones de conjunto así definidas (que determinan imágenes de conjuntos, asociadas a funciones unívocas de punto) se caracterizan por tener las tres propiedades siguientes, las cuales nos dan una nueva definición de esta clase de funciones:

1. Si $f(A) = \emptyset$ entonces $A = \emptyset$
2. Si $M' \subseteq f(A)$, existe $M \subseteq A$ tal que $f(M) = M'$
3. $f(\Sigma A) = \Sigma f(A)$

(donde ΣA es la unión de una familia arbitraria de subcon juntos de X).

Las propiedades 1 y 2 garantizan la univocidad de la-función de punto que resulta cuando se restringe la clase de los subconjuntos de X a los que tienen un solo elemento. Entonces, la propiedad 3 asegura la vieja definición de - imágen.

De estas tres propiedades (y de las reglas bien conocidas del cálculo de los conjuntos) se deducen sin dificultad-las otras propiedades de f. Por ejemplo, las siguientes:

4. $f(\emptyset) = \emptyset$.
5. Si $A \subseteq B$ entonces $f(A) \subseteq f(B)$.
6. $f(A-B) \supseteq f(A)-f(B)$.

. . . .

(La prop. 4 es consecuencia inmediata de 2. Se obtiene 5 aplicando 3 a la igualdad $A+B = B$, cuando $A \subseteq B$. Para - 6, se parte de $(A-B)+AB = A$.)

Las imágenes inversas $g(A')$ (con relación a f) de -- los subconjuntos A' de Y, las definimos por estas dos condiciones:

1'. $f(g(A')) \subseteq A'$

2'. Si $f(B) \subseteq A'$ entonces $B \subseteq g(A')$.

De esta definición (y de las propiedades de f) se deduce lo siguiente:

3'. Si $B \subseteq g(A')$ entonces $f(B) \subseteq A'$.

4'. $A \subseteq g(f(A))$.

5'. Si $A' \subseteq B'$ entonces $g(A') \subseteq g(B')$.

6'. Si $A' \subseteq f(X)$ entonces $f(g(A')) = A'$.

7'. $g(A') = g(A' \cdot f(X))$

8'. $f(g(A')) = A' \cdot f(X)$

9'. $g(\prod A') = \prod g(A')$

10'. $g(Y - A') = X - g(A')$

11'. $g(A' - B') = g(A') - g(B')$.

12'. $g(\sum A') = \sum g(A')$

13'. $f(A \cdot g(B)) = B \cdot f(A)$

14'. $g(\underline{\lim}\, A'_n) = \underline{\lim}\, g(A'_n)$.

. . . .

Las propiedades 3', 4', 5', son inmediatas, de la definición anterior (y de las propiedades de f). La propiedad 8' es corolario de 6' y 7'.

Demostración de 6'.- De la hipótesis $A' \subseteq f(X)$, por 2, existe $M \subseteq X$ tal que $f(M) = A'$. De esto, aplicando 2', resulta: $M \subseteq g(A')$. En vista de 5, $f(M) \subseteq f(g(A'))$, o sea: $A' \subseteq f(g(A'))$. De aquí y de 1', se obtiene la conclusión de 6'.

Demostración de 7'.- Por 5' se obtiene: $g(A' \cdot f(X)) \subseteq g(A')$. Puesto que $g(A') \subseteq X$, por 5 y 1', --

$f(g(A')) \subseteq A' \cdot f(X)$; aplicando ahora 2', se obtiene: ---
$g(A') \subseteq g(A' \cdot f(X))$.

De parecida manera se demuestran las propiedades restantes.

Instituto de Matemáticas Junio de 1950.

U.N.A.M.