AUTOADJUNTICIDAD DE CIERTO TIPO DE PROBLEMAS VECTORIALES DE CONDICIONES A LA FRONTERA.

Julián Adem y Marcos Moshinsky

I. INTRODUCCION.

Hay numerosos problemas de conducción de calor, de teoría de vibraciones y de otros campos de la Física, cuya solución es factible si se formulan como problemas vectoriales de condiciones a la frontera.[1] El problema matemático al que nos lleva esta formulación es el siguiente: Determinar los valores característicos λ y las correspondientes funciones vectoriales características $y(x)$, que satisfacen una ecuación del tipo:

$$M(y) = P(x)\,\frac{d^2y}{dx^2} + Q(x)\,\frac{dy}{dx} + R(x)y = \lambda W(x)y \qquad (1)$$

---

[1] Julián Adem y Marcos Moshinsky. "On Matrix boundary value problems". Presentado para su publicación en el "Quarterly of Applied Mathematics".

y la condición a la frontera

$$Ay(0) + By(1) + C\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=0} + D\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=1} = 0 \qquad (2)$$

en que $y(x)$ es una matriz columna (vector) de n componentes, funciones de x, definidas en el intervalo $[0,1]$; $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$, $W(x)$ son matrices $n x n$ cuyas componentes son funciones reales de x definidas en el intervalo $[0,1]$, y se supone que el determinante de $P(x)$ no se anula en dicho intervalo; λ es un parámetro escalar, y finalmente A, B, C, D son matrices $2n x n$ cuyas componentes son constantes reales y tales que la matriz $2n x 4n$ $G = (A\ B\ C\ D)$ sea de rango $2n$.[2] Esta última condición implica que (2) represente $2n$ ecuaciones linealmente independientes en las componentes de "y" y sus derivadas, valuadas en los puntos 0, 1 extremos del intervalo.

Desde el punto de vista matemático el problema vectorial de condiciones a la frontera (1), (2) está completamente definido. En el presente artículo nos proponemos definir el problema de condiciones a la frontera adjunto al que acabamos de formular. Para ello nos guiaremos por las definiciones usuales de problemas adjuntos de condiciones a la frontera que se establecen en el caso escalar.[3] Una vez definido el problema adjunto se discutirán las restricciones que hay que imponer

---

(2) Birkhoff-Mac Lane. Modern Algebra. Cap. X. p.291.
(3) E.L.Ince. Ordinary Differential Equations. Cap.IX. p.215.

a la ecuación diferencial (1) y a la condición a la frontera (2) para que el problema adjunto sea equivalente a (1), (2). Con estas restricciones el problema vectorial de condiciones a la frontera (1), (2) se convertirá en un problema autoadjunto.

La condición de autoadjuntícidad es de carácter fundamental para cualquier tipo de problema de condiciones a la frontera, por estar íntimamente relacionada con características de reciprocidad que se presentan en todo problema físico. Estas características de reciprocidad se manifiestan con particular claridad cuando el problema de condiciones a la frontera se reduce a una ecuación integral con ayuda de una función de Green apropiadamente definida.

En los problemas escalares de condiciones a la frontera (que son un caso particular de (1), (2) cuando $n=1$) se demuestra[4] que la función de Green $K(x,\xi)$, que es función de las variables x, ξ en $[0,1]$, es simétrica con respecto a ellas sí y solo sí el problema es autoadjunto. La función de Green tiene que ser necesariamente simétrica en todo problema físico por representar esencialmente[4] la acción que ocurre en x cuando se aplica una fuerza unitaria en ξ, que debe ser igual a la acción en ξ cuando se aplica una fuerza unitaria en x.

Vemos entonces que la característica de autoadjunticidad

[4] Courant y Hilbert. Methoden der Mathematischen Physik. Cap. V. p.305.

del problema matemático es requerida por el problema físico que se trata de resolver. El determinar las condiciones generales que deben satisfacer la ecuación diferencial (1) y la condición a la frontera (2) para que el problema sea autoadjunto, nos permitirá comprobar en las aplicaciones, si el problema físico que se trata de resolver ha sido correctamente planteado.

En la sección II se discute la ecuación diferencial adjunta, en la III las condiciones a la frontera adjuntas y las restricciones que debemos imponerles para que el problema sea autoadjunto. Finalmente en IV se ilustra la aplicación con un ejemplo.

II. ECUACION ADJUNTA.

Consideremos la ecuación

$$M(y) = P(x) \frac{d^2y}{dx^2} + Q(x) \frac{dy}{dx} + R(x)y = 0 \tag{3}$$

en la que $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$ son matrices nxn, "y" matriz columna de n elementos.

Introduzcamos ahora las definiciones siguientes:

a) La ecuación lineal (3) es exacta si el primer miembro puede expresarse como la derivada de una expresión lineal.

b) $S(x)$, matriz rxn, es factor integrante de (3) si la ecuación

$$S(x)\left[P(x)\frac{d^2y}{dx^2}+Q(x)\frac{dy}{dx}+R(x)y\right]=0$$

es una ecuación lineal exacta.

Por un método análogo al caso escalar[5] se establecen los siguientes teoremas:

Teorema I. La condición necesaria y suficiente para que

$$T(x)\frac{d^2y}{dx^2}+U(x)\frac{dy}{dx}+V(x)y=0$$

sea exacta es que

$$\frac{d^2T}{dx^2}-\frac{dU}{dx}+V=0\quad,$$

siendo T, U, V matrices rxn. y "y" matriz columna de n elementos.

Teorema II. La condición necesaria y suficiente para que S(x), matriz rxn, sea factor integrante de (3), es que satisfaga la ecuación

$$N(S)=\frac{d^2S}{dx^2}P+\frac{dS}{dx}\left(2\frac{dP}{dx}-Q\right)+S\left(\frac{d^2P}{dx^2}-\frac{dQ}{dx}+R\right)=0\qquad(4)$$

Definición. A la ecuación (4) se le llama ecuación adjunta de r renglones de la (3).

---

(5) L.R.Ford. Differential Equations. p.79-80.

Sea $y(x)$ una matriz $n x 1$ y $S(x)$ una matriz $r x n$, arbitrarias, y si $M(y)$, $N^*(S)$ estan definidas por

$$M(y) = P \frac{d^2y}{dx^2} + Q \frac{dy}{dx} + Ry, \qquad N^*(S) = \frac{d^2S}{dx^2} P^* + \frac{dS}{dx} Q^* + SR^* ,$$

donde P, Q, R, P^*, Q^*, R^* matrices $n x n$ funciones de x, entonces se tiene el

Teorema III: La condición necesaria y suficiente para que $SM(y) - N^*(S)y$ se pueda expresar como la derivada de una forma bilineal en y, S y sus primeras derivadas es que $N^*(S) = N(S)$.

Demostración:

$$SM(y) - N^*(S)y = SM(y) - N(S)y + [N(S) - N^*(S)]y =$$

$$= \frac{d}{dx}\left[SP \frac{dy}{dx} - \frac{dS}{dx} Py - S \frac{dP}{dx} y + SQy\right] + [N(S) - N^*(S)]y$$

Si $SM(y) - N^*(S)y$ puede expresarse como la derivada de una forma bilineal en y, S y sus primeras derivadas, entonces $[N(S) - N^*(S)]y$ también debía poder representarse en esa forma o bien ser idénticamente nulo; lo primero es claramente imposible, por lo tanto $N(S) = N^*(S)$.

Inversamente si $N^*(S) = N(S)$ entonces $SM(y) - N^*(S)y$ es la derivada de una forma bilineal.

Definición:

Si la ecuación transpuesta de la (3) es idéntica a su ecuación adjunta de 1 renglón, entonces la ecuación (3) es autoadjunta.

Se tiene entonces que la ecuación (3) es autoadjunta si y solo si[6]

$$P' = P, \quad Q' = 2\frac{dP}{dx} - Q, \quad R' = \frac{d^2P}{dx^2} - \frac{dQ}{dx} + R \tag{5}$$

<u>Teorema</u> IV. La condición necesaria y suficiente para que la ecuación (3) sea autoadjunta es que

$$P = P_S, \quad Q = \frac{dP_S}{dx} + Q_A, \quad R = R_S + \frac{1}{2}\frac{dQ_A}{dx} \tag{6}$$

siendo P_S y R_S matrices simétricas y Q_A matriz antisimétrica.

<u>Demostración</u>:

La condición es necesaria porque Q y R pueden escribirse en la forma $Q = Q_S + Q_A$, $R = R_S + R_A$ en que Q_S y R_S son matrices simétricas y Q_A y R_A matrices antisimétricas, siendo $Q_S = \frac{1}{2}(Q + Q')$, $Q_A = \frac{1}{2}(Q - Q')$, etc., y se tiene entonces de (5)

$$P = P' = P_S, \quad Q_S = \frac{dP}{dx}, \quad R_A = \frac{1}{2}\frac{dQ_A}{dx}$$

por lo tanto

$$Q = \frac{dP_S}{dx} + Q_A \qquad R = R_S + \frac{1}{2}\frac{dQ_A}{dx}$$

(6) ' indica matriz transpuesta.

Inversamente, si se cumple la condición del teorema IV es inmediato que se verifican las igualdades (5).

En virtud del teorema IV se tiene que la forma general de la ecuación autoadjunta es

$$L(y) = \frac{d}{dx}\left[P_S \frac{dy}{dx}\right] + R_S\, y + Q_A \frac{dy}{dx} + \frac{1}{2}\frac{dQ_A}{dx}\, y = 0 \qquad (7)$$

en que P_S, R_S son matrices simétricas nxn y Q_A matriz antisimétrica nxn.

Si W es una matriz nxn simétrica y λ es un parámetro escalar, entonces

$$L(y) = \lambda\, W\, y \qquad (8)$$

también es autoadjunta.

Además, por el teorema III, se tiene que si "y" y "y*" son matrices columna de n elementos, la función escalar[7]

$$y^{*\prime}\, L(y) - L'(y^*)y$$

es la derivada de una forma bilineal.

---

(7) $L'(y^*)$ matriz transpuesta de $L(y^*)$, es decir:

$$L'(y^*) = \frac{d}{dx}\left[\frac{dy^{*\prime}}{dx} P_S\right] + y^{*\prime} R_S - \frac{dy^{*\prime}}{dx} Q_A - \frac{1}{2}\, y^{*\prime}\, \frac{dQ_A}{dx}$$

III. PROBLEMA ADJUNTO DE CONDICIONES A LA FRONTERA.

Si tomamos una ecuación autoadjunta, como conviene para los fines de las aplicaciones, entonces el problema (1), (2) se transforma en el siguiente:

$$L(y) = \frac{d}{dx}\left[P_S \frac{dy}{dx}\right] + R_S\, y + Q_A \frac{dy}{dx} + \frac{1}{2}\frac{dQ_A}{dx}\, y = \lambda\, Wy \tag{9a}$$

$$Ay(0) + By(1) + C\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=0} + D\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=1} = 0 \tag{9b}$$

Para que las soluciones de (9a) sean continuas y con primera derivada continua, se requerirá que el determinante de la matriz P_S sea $\neq 0$ en $0 \leq x \leq 1$, que R_S y Q_A sean de clase $C^{(1)}$, y además que R_S y W sean de clase C, en el mismo intervalo.[8]

Definición: Dado el problema vectorial de condiciones a la frontera (9), su problema de condiciones a la frontera adjunto es aquel constituido por la ecuación (9a) y una condición a la frontera tal que si "y^*" es solución del problema adjunto del (9) y "y" es solución del problema (9), entonces la forma bilineal[9]

$$\int_0^1 \left[y^{*\prime} L(y) - L'(y^*)y\right]dx = \left[y_i^* P_{ij}\frac{dy_j}{dx} - \frac{dy_i^*}{dx} P_{ij}y_j + y_i^* Q_{ij} y_j\right]_0^1 \tag{10}$$

se anule.

(8) E.L.Ince. loc.cit. p. 73.

(9) Letras con subíndices representan elementos de matrices, así P_{ij} es el elemento i,j de la matriz P. Además índices repetidos indican suma, así $y_i^* P_{ij}\frac{dy_j}{dx} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} y_i^* P_{ij}\frac{dy_j}{dx}$.

Para determinar cual debe ser la condición a la frontera del problema adjunto del (9), introduzcamos la notación

$$z = \begin{bmatrix} y_i(0) \\ y_i(1) \\ \left(\frac{dy_i}{dx}\right)_{x=0} \\ \left(\frac{dy_i}{dx}\right)_{x=1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ z_{4n} \end{bmatrix} \qquad z^* = \begin{bmatrix} y_i^*(0) \\ y_i^*(1) \\ \left(\frac{dy_i^*}{dx}\right)_{x=0} \\ \left(\frac{dy_i^*}{dx}\right)_{x=1} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} z_1^* \\ z_2^* \\ z_3^* \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ z_{4n}^* \end{bmatrix} \qquad (11)$$

$i = 1, 2, \ldots, n$.

Con esta notación la condición a la frontera (9b) queda en la forma

$$Gz = 0 \qquad (12)$$

en que $G = (A\ B\ C\ D)$ matriz de $2n x 4n$.

La forma bilineal (10) puede expresarse como

$$z^{*\prime} H z \qquad (13)$$

en que

$$H = \begin{bmatrix} -Q(0) & 0 & -P(0) & 0 \\ 0 & Q(1) & 0 & P(1) \\ P(0) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -P(1) & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ matriz } 4n x 4n$$

En la condición (12) la matriz G es de rango $2n$, lo que implica que por lo menos una submatriz de $2n \times 2n$, que designaremos por Δ, tiene su determinante $\neq 0$, existiendo, por lo tanto su inverso Δ^{-1}.

Sea E la matriz de permutación $4n \times 4n$[10], tal que transforme las $2n$ columnas de Δ contenidas en G en las $2n$ primeras columnas de la matriz transformada GE, es decir,

$$GE = (\Delta \; K)$$

donde K matriz $2n \times 2n$ esta compuesta por las $2n$ columnas restantes de G.

Introduzcamos ahora una permutación de coordenadas en el espacio vectorial de las z, definida por la transformación:

$$E'z = u \tag{14}$$

donde $E' = E^{-1}$ por ser matriz ortogonal.

La ecuación lineal $Gz = 0$ se convierte en:

$$GEE'z = G\,E\,u = (\Delta \; K)\; u = 0$$

Multiplicando por Δ^{-1} a la izquierda tenemos finalmente la ecuación lineal:

$$(I \;\; \Delta^{-1}K)\; u = (I \;\; F)\; u = 0 \tag{15}$$

---

[10] Birkhoff-Mac Lane. Modern Algebra. p.227.

donde $F = \Delta^{-1} K$ es una matriz $2n\mathrm{x}2n$, y I es la matriz unitaria $2n\mathrm{x}2n$.

La forma bilineal $z^{*\prime}Hz$ se convierte en:

$$z^{*\prime}Hz = u^{*\prime}E^{\prime}HEu = u^{*\prime}Ju \tag{16}$$

donde $J = E^{\prime}HE$ es una matriz $4n\mathrm{x}4n$.

En resumen, se tiene que mediante la notación (11) y la transformación (14) la condición a la frontera (9b) puede expresarse en la forma (15) y la forma bilineal (10) en la forma (16).

<u>Teorema</u> V. La condición necesaria y suficiente para que la forma bilineal $u^{*\prime}Ju$ se anule cuando el vector u satisface la ecuación $(I\ F)\ u = 0$, es que el vector u^* satisfaga la ecuación $(-F^{\prime}\ I)\ J^{\prime}\ u^* = 0$.

<u>Demostración</u>:

Definamos

$$v_\ell = u_\ell + F_{\ell p}\, u_{p+2n}$$

$$v_{\ell+2n} = u_{\ell+2n} \qquad (\ell,\ p = 1,2,\ \ldots,\ 2n)$$

es decir, $v = Tu$, siendo $T = \begin{bmatrix} I & F \\ 0 & I \end{bmatrix}$. Como el inverso de T existe y de hecho tiene la forma $T^{-1} = \begin{bmatrix} I & -F \\ 0 & I \end{bmatrix}$, se tiene que $u = T^{-1}\, v$.

Consideremos la forma bilineal

$$u^{*\prime}Ju = u^*_\alpha J_{\alpha\beta}\, u_\beta = u^*_\alpha J_{\alpha\beta}\, T^{-1}_{\beta\gamma}\, v_\gamma =$$

$$= u^*_\alpha J_{\alpha\beta} \left[T^{-1}_{\beta\ell}\, v_\ell + T^{-1}_{\beta\, \ell+2n}\, v_{\ell+2n} \right]$$

$(\alpha, \beta, \gamma = 1,2, \ldots, 4n; \quad \ell, p = 1,2, \ldots, 2n)$

pero $v_\ell = u_\ell + F_{\ell p}\, u_{p+2n} = 0$, por la hipótesis del teorema, y $v_{\ell+2n} = u_{\ell+2n}$; por lo tanto $u^{*\prime}Ju = u^*_\alpha J_{\alpha\beta}\, T^{-1}_{\beta\, \ell+2n}\, u_{\ell+2n}$.

Si la forma bilineal se anula se tiene

$$u^*_\alpha J_{\alpha\beta}\, T^{-1}_{\beta\, \ell+2n}\, u_{\ell+2n} = 0 \quad ,$$

pero las $u_{\ell+2n}$ son linealmente independientes y por lo tanto se tiene que $u^*_\alpha J_{\alpha\beta}\, T^{-1}_{\beta\, \ell+2n} = 0$, es decir:

$$(-F' \;\; I)\; J'\; u^* = 0 \tag{17}$$

Inversamente, si la condición (17) se satisface es inmediato que la forma bilineal $u^{*\prime} J\, u$ se anula.

Expresada en términos de z^* se tiene que (17) toma la forma

$$(-F' \;\; I)\; J'\; E'\; z^* = G^*\, z^* = 0 \tag{18}$$

que es la condición a la frontera del problema adjunto del (9).

IV. PROBLEMA AUTOADJUNTO.

Definición: El problema de condiciones a la frontera (9) es autoadjunto si el problema adjunto $L(y) = \lambda Wy$, $G^{*}z = 0$ es equivalente al problema (9); es decir, si G^{*} es "equivalente de renglón" a G.

Para investigar si un problema vectorial de condiciones a la frontera es autoadjunto se procede como sigue:

1o) Se determina si la ecuación diferencial puede expresarse en la forma (9a).

2o) Se determina la matriz G^{*} del problema adjunto de acuerdo con el análisis de la sección anterior y se investiga si es equivalente de renglón a G.

Ejemplo:

Determinar si el siguiente problema es autoadjunto[11]:

$$\frac{d^2\bar{\theta}}{dx^2} + \lambda \frac{\rho c}{K}\bar{\theta} = 0 \qquad \bar{\theta} = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \end{bmatrix} \tag{19}$$

$$\begin{gathered} \theta_1(1) = \theta_2(1) = \theta_3(1) = \theta_4(1) \\ \theta_1(0) = \theta_2(0) = \theta_3(0) = \theta_4(0) = 0 \\ \sum_{i=1}^{4} \left[\frac{d\theta_i}{dx}\right]_{x=1} = 0 \end{gathered} \tag{20}$$

---

[11] Este problema es el de la conducción de calor en una cruz. Se discute en el artículo "On Matrix boundary value problems" citado anteriormente.

1o) La ecuación (20) es desde luego autoadjunta, pues $P_S = I$, $Q_A = R_S = 0$; $W = -\frac{\rho c}{K} I$; y es por lo tanto del tipo (9a).

2o) La matriz de la condición a la frontera es[12]

$$G = \begin{bmatrix} \mathrm{1} & \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc \\ \bigcirc & \begin{matrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} & \bigcirc & \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{matrix} \end{bmatrix}$$

La matriz de permutación apropiada es:

$$E = \begin{bmatrix} \mathrm{1} & \bigcirc & \bigcirc & \bigcirc \\ \bigcirc & \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} & \bigcirc & \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix} \\ \bigcirc & \bigcirc & \mathrm{1} & \bigcirc \\ \bigcirc & \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix} & \bigcirc & \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \end{bmatrix} = E' = E^{-1}$$

ya que GE toma la forma:

---

(12) $\mathrm{1}$ y $\bigcirc$ representan respectivamente a la matriz unitaria y a la matriz cero de 4×4.

$$GE = (I\ F) = \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{matrix} \end{array}\right]$$

Se tiene entonces:

$$J = E'HE = \left[\begin{array}{cccc} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{matrix} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \begin{matrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix} & 0 & 0 \end{array}\right]$$

y finalmente

$$G^{*} = (-F'I)\ J'E' = \begin{bmatrix} -1 & O & O & O \\ O & \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} & O & \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \end{matrix} \end{bmatrix}$$

Como G^{*} es obviamente equivalente de renglón a G el problema (19), (20) es autoadjunto.

Este trabajo fue patrocinado en parte por la Comision Impulsora y Coordinadora de la Investigación Científica.

Diciembre 1950.

Instituto de Geofísica
U.N.A.M.