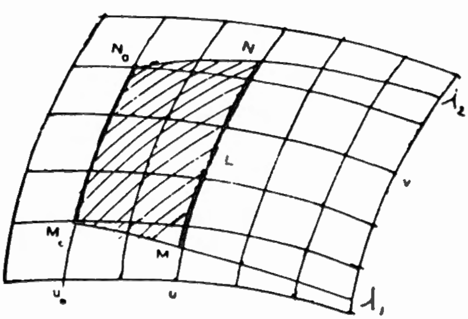
DERIVADA, CON RESPECTO A UN PARAMETRO INTRINSECO, DEL AREA BARRIDA POR UNA CURVA DEFORMABLE QUE SE DESLIZA SOBRE UNA SUPERFICIE.

Alfonso Nápoles Gándara

En lo que sigue se supone que tanto la superficie como las curvas y funciones consideradas satisfacen las condiciones de regularidad usuales en geometría diferencial.



Sea $L = \widehat{MN}$ la curva que se desliza sobre una superficie (S), y sean λ_1, λ_2 las trayectorias respectivas de sus extremos M y N. Que

$$ds^2 = Edu^2 + Gdv^2$$

sea el elemento lineal en (S), tomando a las posiciones sucesivas de L como curvas u = const. y a sus trayectorias --

ortogonales como curvas $v = \text{const.}$

Si $A(u)$ designa al área barrida por L, se tiene el siguiente

TEOREMA 1.

$$(1) \qquad \frac{dA}{du} = \int_{(L)} \frac{ds}{|\nabla u|} \quad , \qquad \text{con } ds = \sqrt{G}\, dv$$

Además, con más generalidad, siendo $Q(u,v)$ un escalar definido en (S) y ϕ la integral de superficie de Q en A, se tiene:

TEOREMA 2.

$$(2) \qquad \frac{d\phi}{du} = \int_{(L)} \frac{Q ds}{|\nabla u|}$$

Casos particulares: Si las curvas $u = \text{const.}$ son paralelas geodésicas, aplicando (1) y (2), con Ω (curvatura íntegra) y K (curvatura gaussiana), se obtiene respectivamente:

$$(1.1) \qquad \frac{dA}{du} = L \qquad y \qquad (2.1) \qquad \frac{d\Omega}{du} = \int_{(L)} K ds.$$

La justificación de (2) es obvia. En efecto:

$$\phi = \int_{u_0}^{u} du \int_{v_1}^{v_2} Q \sqrt{EG}\; dv$$

$$\therefore \qquad \frac{d\phi}{du} = \int_{v_1}^{v_2} \frac{Q \sqrt{G}\, dv}{|\nabla u|} = \int_{(L)} \frac{Q\, ds}{|\nabla u|}$$

Si $Q = 1$, entonces $\phi = A$, $\therefore$ resulta (1).

Si las curvas u = const. son paralelas geodésicas, entonces resultan (1.1) y (~~1.2~~).
2,1

Instituto de Matemáticas.
Mayo 1950.