

SOBRE LAS SUPERFICIES ORIENTABLES EXTENSIBLES EN NUDOS.

Por Guillermo Torres Díaz.

1. Introducción. Consideremos el conjunto de las curvas de Jordan sumergidas en R^3 . Diremos que dos de dichas curvas k_1 y k_2 son equivalentes $k_1 \sim k_2$ si existe un homeomorfismo ϕ de R^3 sobre sí mismo que conserva la orientación y tal que transforma a k_1 en k_2 , es decir $\phi(k_1) = k_2$. Llamaremos nudo a cada clase de equivalencia que contenga un polígono simple cerrado. Si K es un nudo y k es un elemento de la clase K , diremos que k es una representación (o representante) de K .

Consideremos una representación k de K que sea un polígono simple cerrado. Una proyección k' de k desde un punto $p \notin k$ sobre un plano π se dice que es regular si cada rayo proyectante interseca cuando más a dos segmentos de k . Los puntos múltiples de una proyección regular son puntos dobles y hay solamente un número finito v de ellos. Normali-

zamos la proyección denotando cual de los dos segmentos que determinan un punto doble está más cerca de p (haremos esto como se indica en la figura 1). Una proyección normalizada consta de un número

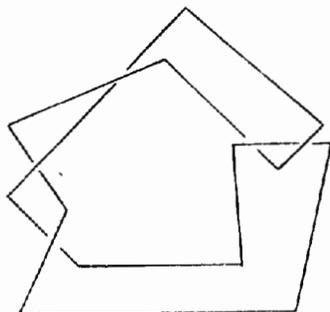


Fig. 1

una superficie orientable cuya frontera es un representante dado k de un nudo K . Diremos que tal superficie² está extendida en K .

El método se puede describir brevemente como sigue. Su-

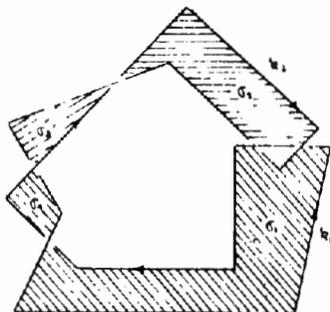


Fig. 2

ponemos que k está orientado y consideremos una proyección normalizada k' de k (figura 2). Unamos por un segmento s cada pareja de puntos de k que se proyectan sobre un

En su artículo (3)¹
H. Seifert describe un método para construir

¹Números entre paréntesis se refieren a la bibliografía que aparece al final del artículo.

²Se supone que todas las superficies que se mencionan son poliedros.

punto doble. (Suponemos que hay al menos un punto doble, de lo contrario la proyección es un polígono simple cerrado y la superficie es una célula). Partiendo de un punto de k recorramos k en el sentido positivo hasta encontrar un segmento s , recorramos s hasta encontrar k , sigamos a lo largo de k en el sentido positivo, etc., hasta volver al punto de partida. La trayectoria recorrida es un polígono simple cerrado k_1 (cuya proyección es simple) sobre el cual se extiende una célula σ_1 . Si k_1 no contiene a k , repetimos el proceso partiendo de un punto de k que no esté en k_1 , obteniendo un polígono k_2 sobre el que extendemos una célula σ_2 . Repetimos el proceso hasta haber recorrido todo k . Es fácil ver que la unión de las σ_i es una superficie orientable F cuya frontera es k . (En el caso ilustrado por la figura 2, F consta de cuatro células $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ y σ_4).

Inmediatamente se ocurre la siguiente pregunta. ¿Es posible obtener, por el método descrito, todas las superficies orientables que se pueden extender en un nudo? O dicho en forma precisa. Dado un nudo K y una superficie orientable F extendida en K . ¿Existe una representación k de K y una proyección k' de k tal que la superficie F' obtenida aplicando el método descrito a k' es tal que existe un homeomorfismo φ de R^3 sobre sí mismo tal que $\varphi(F') = F$?

El objeto del presente artículo es probar que existe un nudo K y una superficie orientable extendida en K que no

se puede obtener de una proyección de K .

2. Demostraremos el siguiente teorema.

Teorema. Sea K_0 la clase que contiene al círculo.

Sea F una superficie orientable de género 1 que se obtiene aplicando el método descrito a una proyección de K_0 . Entonces existe un homeomorfismo φ de R^3 sobre sí mismo, que transforma F en un subconjunto de un toro no anudado T , es decir $\varphi(F) \subset T$.

Demostración. Sea k el representante de K_0 y k' la proyección de k , de la cual se obtiene F . Las proyecciones de las células que componen F son células cuyas fronteras contienen un cierto número de puntos dobles de k' (que llamaremos vértices de la proyección de la célula). Si la intersección de las fronteras de las proyecciones de dos células no es vacía, entonces dicha intersección está compuesta de puntos dobles de k' , y cada punto doble pertenece a las proyecciones de dos células.

El género h de F está dado por $h = \frac{d-f+1}{2}$, en donde d es el número de puntos dobles de k' y f es el número de células de F . En nuestro caso $h = 1$, $d = \frac{\sum_{i>1} i n_i}{2}$ y $f = \sum_{i>1} n_i$, en donde n_i es el número de células de F cuyas proyecciones tienen i vértices. Por lo tanto, tenemos: $2 = \sum_{i>1} (i-2) n_i$, de donde $n_i = 0$ si $i \geq 5$. Los dos casos posibles son los siguientes:

Ver (3).

$$a) \begin{cases} n_2 & \text{arbitrario} \\ n_3 & = 0 \\ n_4 & = 1 \end{cases} \quad \text{y} \quad b) \begin{cases} n_2 & \text{arbitrario} \\ n_3 & = 2 \\ n_4 & = 0 \end{cases}$$

Consideremos el caso a). La proyección de F está compuesta de un cuadrilátero Q y dos cadenas c_1 y c_2 de biláteros cada una de las cuales une dos vértices del cuadrilátero.

Ahora bien, una cadena de bilátero no puede unir dos vértices consecutivos del cuadrilátero (ver. fig. 3), porque la

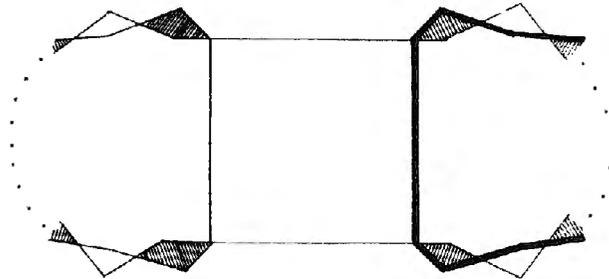


Fig. 3

cadena debe tener un número impar de biláteros puesto que F es orientable y en ese caso la frontera de F ten-

dría más de una componente. (En la figura 3 se ha indicado con una línea gruesa una de las componentes de la frontera de F).

Por lo tanto la proyección de F debe ser de la forma ilustrada por la fig. 4.

Sea v_{11} la semidiferencia del número de torceduras del tipo 1) (figura 5) menos el número de torceduras del tipo 2)

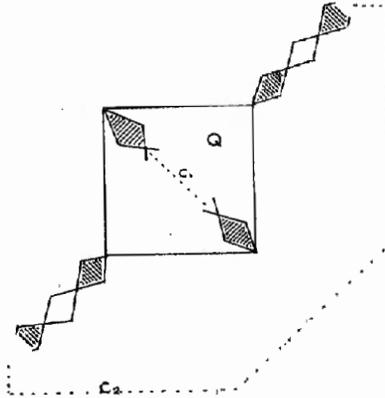


Fig. 4

(figura 5), en la cadena c_1 y sea v_{22} el número definido análogamente en la cadena c_2 . Entonces, es fácil ver que el polinomio de Alexander de K_0 es:

$$v_{11} v_{22} x^2 + (1 - 2 v_{11} v_{22}) x + v_{11} v_{22}$$

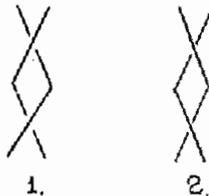


Fig. 5

y puesto que K_0 es la clase del círculo, se debe tener, $v_{11} v_{22} = 0$ ¹. Supongamos, por ejemplo, que

$v_{11} = 0$, entonces F es de la forma indicada en la figura 6

¹ Para una definición del polinomio de Alexander se puede ver (1) ó (3). El polinomio de un nudo está determinado excepto por un factor de la forma x^n (n entero arbitrario). El polinomio de K_0 es 1.

y es claro que F se puede sumergir en un toro no anudado T . Si $v_{22} = 0$ la situación es análoga.

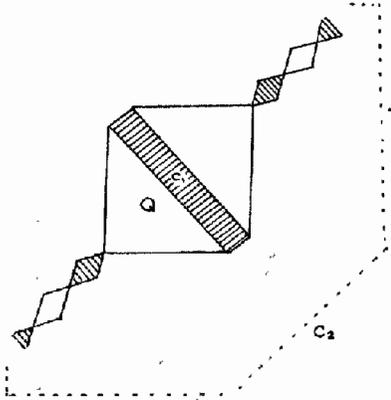


Fig. 6

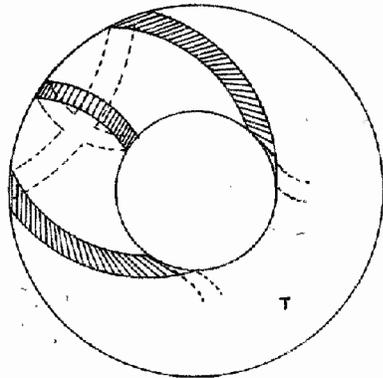


Fig. 7

Consideremos ahora el caso b). F está compuesta de dos triángulos T_1 y T_2 y tres cadenas de biláteros c_1 , c_2 y c_3 que unen los vértices de T_1 con los de T_2 . (Una cadena no puede unir dos vértices del mismo triángulo, por la misma razón que no puede unir dos vértices consecutivos de Q en el caso anterior). Entonces F es de la forma que ilustra la figura 8.

Sean m , n y r los números de puntos dobles en c_1 , c_2 y c_3 respectivamente. Puesto que F es orientable, se debe tener $m = n = r \pmod{2}$. Si m , n y r son pares, entonces la frontera de F tiene más de una componente. Por lo

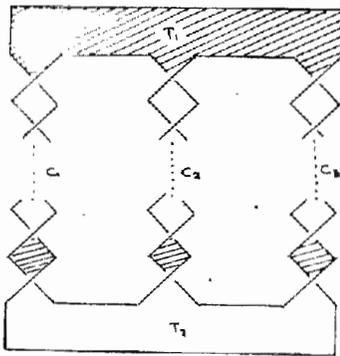


Fig. 8

superficie del tipo indicado en la figura 10. Ahora bien esta

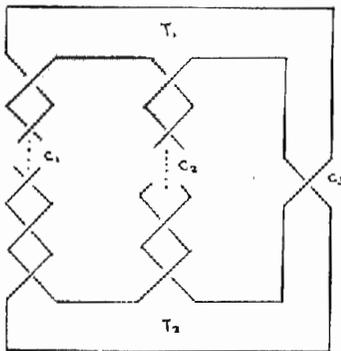


Fig. 9

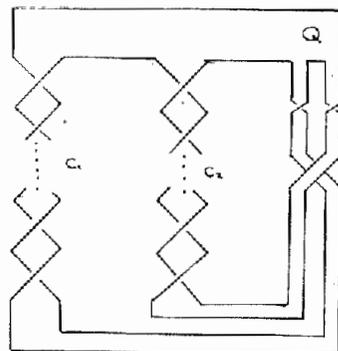


Fig. 10

superficie consta de un cuadrilátero Q y dos cadenas de biláteros c_1 y c_2 y en este caso el teorema ya ha sido demostrado. Los casos correspondientes a $m = 1$ y $r = 1$ son completamente análogos.

Queda por ser considerado únicamente el caso en que $m \geq 3$, $n \geq 3$, $r \geq 3$. (Es claro que podemos suponer que los puntos dobles de cada cadena son del mismo tipo 1) ó 2) figura 5).

tanto se debe tener $m \equiv n \equiv r \equiv 1 \pmod{2}$. Supongamos que uno de los números m , n ó r es igual a 1, sea, por ejemplo, $r = 1$, entonces F tiene la forma indicada en la figura 9. Es claro que existe un homeomorfismo φ de R^3 que transforma F en una su-

Probaremos que este caso no se puede presentar¹, con lo cual quedará completa la demostración del teorema. Tenemos que considerar tres subcasos que están ilustrados por i, ii, iii figura 11, dependiendo del tipo de torceduras que aparezcan en las cadenas. (Es claro que basta considerar estos subcasos).

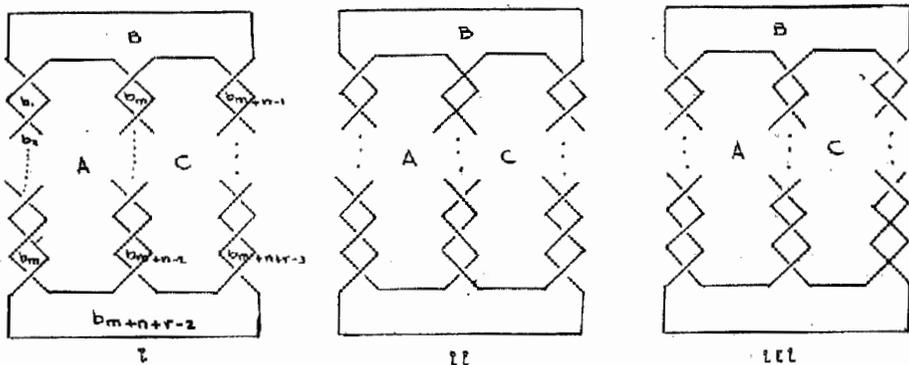


Fig. 11

Consideremos el grupo G de K_0 ². Puesto que K_0 es la clase del círculo. G es cíclico infinito y por lo tanto abeliano. Sin embargo, para los tres casos i, ii, e iii da

¹Para dicha prueba no bastan los invariantes de homología de K . En su artículo (3), Seifert da un ejemplo de un nudo que no es la clase del círculo y que sin embargo, tiene los mismos invariantes de homología. El método que usaremos es una generalización inmediata del método usado por Seifert para probar que el nudo considerado por él no es deformable en un círculo.

²Se entiende por grupo de un nudo K el grupo fundamental $\pi_1(R^3 - K)$ del complemento de un representante de K . Por lo tanto el grupo es un invariante asociado a la clase K .

ramos una representación de G sobre un grupo no abeliano.

Calculemos G en el caso 1¹. G está generado por $A, B, C, b_1, b_2, \dots, b_{m+n+r-2}$, en donde cada generador corresponde a la región indicada con el mismo símbolo en la figura 11. Las relaciones son:

$$\begin{array}{lll} AB^{-1} = b_1 & OB^{-1} = b_m A^{-1} & B = Ob_{m+n-1}^{-1} \\ Ab^{-1} = b_2 & Ob_m^{-1} = b_{m+1} A^{-1} & b_{m+n-1} = Ob_{m+n}^{-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ Ab_{m-1}^{-1} = b_{m+n+r-2} & Ob_{m+n-2}^{-1} = b_{m+n+r-2} A^{-1} & b_{m+n+r-3} = Ob_{m+n+r-2}^{-1} \end{array}$$

Se pueden eliminar los generadores $b_1, \dots, b_{m+n+r-2}$ obteniendo como presentación de G los generadores A, B y C y las relaciones:

$$\begin{aligned} A^{\frac{m+1}{2}} B^{-1} A^{\frac{m-1}{2}} &= (CA^{-1})^{\frac{n-1}{2}} CB^{-1} A (C^{-1}A)^{\frac{n-1}{2}} B = \\ &= C^{-\frac{r-1}{2}} B^{-1} C^{\frac{r+1}{2}} \end{aligned}$$

o las equivalentes:

$$\begin{aligned} A^{\frac{m+1}{2}} B^{-1} A^{\frac{m-1}{2}} B &= (CA^{-1})^{\frac{n-1}{2}} CB^{-1} A (C^{-1}A)^{\frac{n-1}{2}} B = \\ &= C^{-\frac{r-1}{2}} B^{-1} C^{\frac{r+1}{2}} B. \end{aligned}$$

¹Para un método de cálculo de G se puede ver, por ejemplo (2).

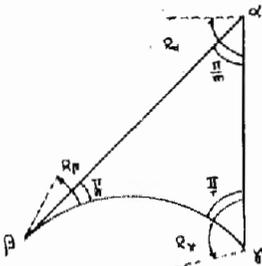
En el caso ii, G está dado por generadores A , B y C y relaciones:

$$\begin{aligned} A^{\frac{n+1}{2}} B^{-1} A^{-\frac{n-1}{2}} B &= (CA^{-1})^{\frac{n-1}{2}} AB^{-1}C (A^{-1}C)^{\frac{n-1}{2}} B = \\ &= C^{-\frac{r-1}{2}} B^{-1} C^{\frac{r+1}{2}} B \end{aligned}$$

y en el caso iii, tenemos A , B y C como generadores y como relaciones:

$$\begin{aligned} A^{\frac{n+1}{2}} B^{-1} A^{-\frac{n-1}{2}} B &= (CA^{-1})^{\frac{n-1}{2}} CB^{-1}A (C^{-1}A)^{\frac{n-1}{2}} B = \\ &= C^{\frac{r+1}{2}} B^{-1} C^{-\frac{r-1}{2}} B . \end{aligned}$$

Ahora consideramos en el plano hiperbólico, un triángulo $\alpha\beta\gamma$ con ángulos $\frac{\pi}{m}$, $\frac{\pi}{n}$ y $\frac{\pi}{r}$. (Si $m = n = r = 3$, la representación se hace en el plano euclidiano). Denotemos por R_α una rotación negativa, alrededor de α , de un ángulo $\frac{2\pi}{m}$, por R_γ una rotación positiva, alrededor de γ , de un ángulo $\frac{2\pi}{r}$ y por $R_{\alpha\gamma}$ la reflexión sobre $\alpha\gamma$. Sea G' el grupo de movimientos del plano generado por R_α , R_γ y $R_{\alpha\gamma}$, es claro que G' no es abeliano. La correspondencia



$A \rightarrow R_\alpha$, $B \rightarrow R_{\alpha\gamma}$ y $C \rightarrow R_\gamma$, de los generadores de G con los de G' , constituye un homomorfismo de G sobre G' (en los tres casos i, ii e iii). Basta hacer ver que las relaciones que definen a G valen en G' . Tenemos:

$$B^{-1} A^{-1} B \rightarrow R_{\alpha\gamma} R_\alpha^{-1} R_{\alpha\gamma} = R_\alpha$$

$CA^{-1} \rightarrow R_{\alpha\gamma} R_\beta R_{\alpha\gamma}$, en donde R_β es una rotación positiva, alrededor de β , de un ángulo $\frac{2\pi}{r}$.

$$C^{-1} A \rightarrow R_\beta$$

$$CB^{-1} A \rightarrow R_{\alpha\gamma} R_\beta$$

$$AB^{-1} C \rightarrow R_{\alpha\gamma} R_\beta$$

$$B^{-1} CB \rightarrow R_\gamma^{-1}$$

Se tiene: $A^{\frac{n+1}{2}} B^{-1} A^{\frac{n-1}{2}} B = A^{\frac{n+1}{2}} (B^{-1} A^{-1} B)^{n-1} R_\alpha^{-\frac{n+1}{2}} R_\alpha^{\frac{n-1}{2}} = R_\alpha^n = 1$.

$(CA^{-1})^{\frac{n-1}{2}} CB^{-1} A (C^{-1} A)^{\frac{n-1}{2}} B \rightarrow R_{\alpha\gamma} R_\beta^{\frac{n-1}{2}} R_{\alpha\gamma} R_{\alpha\gamma} R_\beta R_\beta^{\frac{n-1}{2}} R_{\alpha\gamma} = R_{\alpha\gamma} R_\beta^n R_{\alpha\gamma} = 1$.

$C^{\frac{r-1}{2}} B^{-1} C^{\frac{r+1}{2}} B = C^{\frac{r-1}{2}} (B^{-1} CB)^{\frac{r+1}{2}} R_\gamma^{-\frac{r-1}{2}} R_\gamma^{\frac{r+1}{2}} = R_\gamma^{-r} = 1$.

Análogamente se tiene:

$$(AC^{-1})^{\frac{n-1}{2}} AB^{-1} C (A^{-1} C)^{\frac{n-1}{2}} B \rightarrow 1 \text{ y } C^{\frac{r+1}{2}} B^{-1} C^{\frac{r-1}{2}} B \rightarrow 1,$$

con esto ha quedado demostrado el teorema.

Ahora consideremos un nudo S una de cuyas proyecciones s' está dada en la figura 12.1 y una superficie F' extendida en S . S es la clase del círculo, para ver esto se muestra en la figura 12.2 un primer paso de la deformación de s en un círculo, la deformación restante es obvia. Es

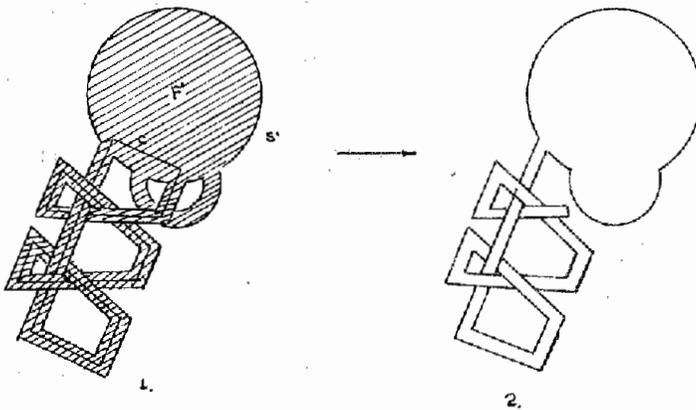


Fig. 12

claro que F' es de género 1. Ahora bien si F' se pudiera obtener de una proyección de S , en virtud del teorema que acabamos de demostrar, la curva simple cerrada c (que se muestra en la figura 12.1) sería un representante de un nudo toral¹, pero es sabido² que una curva simple cerrada que tiene la propiedad de pertenecer a la misma clase que una curva

¹Se llama nudo toral, a un nudo (distinto del círculo) que tiene un representante contenido en un toro no anudado.

²Ver (2)

obtenida reflejando R^3 sobre un plano, no es representante de un nudo total y se escogió teniendo dicha propiedad.

BIBLIOGRAFIA.

- (1) Alexander, J.W. Topological Invariants of Knots and Links, Trans. Amer. Math. Soc. vol. 30 (1928).
- (2) Reidemeister, K.: Knotentheorie. Chelsea Publishing Co. New York, 1948.
- (3) Seifert, H.: Über das Geschlecht von Knoten. Math. Annalen. Vol. 110 (1934).

Instituto de Matemáticas
de la U.N.A.M.