BOLETIN

DE LA

SOCIEDAD MATEMATICA MEXICANA

VOLUMEN VIII NUMEROS 1 y 2

CONTENIDO

ENERO Y ABRIL, 1951

MEXICO

SOBRE LAS SUPERFICIES ORIENTABLES EXTENSIBLES EN NUDOS.

Por Guillermo Torres Díaz.

1. Introducción. Consideremos el conjunto de las curvas de Jordan sumergidas en R^3. Diremos que dos de dichas curvas k_1 y k_2 son equivalentes $k_1 \sim k_2$ si existe un homeomorfismo φ de R^3 sobre sí mismo que conserva la orientación y tal que transforma a k_1 en k_2, es decir $\varphi(k_1) = k_2$. Llamaremos <u>nudo</u> a cada clase de equivalencia que contenga un polígono simple cerrado. Si K es un nudo y k es un elemento de la clase K, diremos que <u>k es una representación (o representante) de K</u>.

Consideremos una representación k de K que sea un polígono simple cerrado. Una proyección k' de k desde un punto $p \notin k$ sobre un plano π se dice que es <u>regular</u> si cada rayo proyectante intersecta cuando más a dos segmentos de k. Los puntos múltiples de una proyección regular son puntos dobles y hay solamente un número finito ν de ellos. <u>Normali-</u>

zamos la proyección denotando cual de los dos segmentos que-determinan un punto doble está más cerca de p (haremos esto como se indica en la figura 1). Una proyección normalizada consta de un número finito v de arcos poligonales ajenos. A dicha proyección la llamaremos una proyección de K.

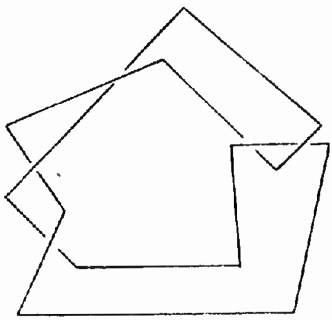


Fig. 1

En su artículo (3)[1] H. Seifert describe un método para construir una superficie orientable cuya frontera es un representante dado k de un nudo K. Diremos que tal superficie[2] está extendida en K.

El método se puede describir brevemente como sigue. Supongamos que k está orientado y consideremos una proyección normalizada k' de k (figura 2). Unamos por un segmento s cada pareja de puntos de k que se proyectan sobre un

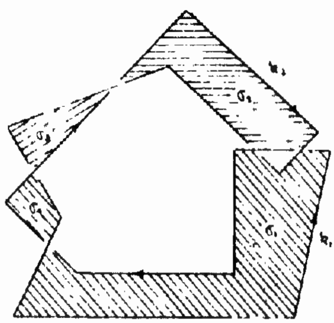


Fig. 2

[1]Números entre paréntesis se refieren a la bibliografía que aparece al final del artículo.

[2]Se supone que todas las superficies que se mencionan son poliedros.

punto doble. (Suponemos que hay al menos un punto doble, de lo contrario la proyección es un polígono simple cerrado y la superficie es una célula). Partiendo de un punto de k recorramos k en el sentido positivo hasta encontrar un segmento s, recorramos s hasta encontrar k, sigamos a lo largo de k en el sentido positivo, etc., hasta volver al punto de partida. La trayectoria recorrida es un polígono simple cerrado k_1 (cuya proyección es simple) sobre el cual se extiende una célula σ_1. Si k_1 no contiene a k, repetimos el proceso partiendo de un punto de k que no esté en k_1, obteniendo un polígono k_2 sobre el que extendemos una célula σ_2. Repetimos el proceso hasta haber recorrido todo k. Es fácil ver que la unión de las σ_i es una superficie orientable F cuya frontera es k. (En el caso ilustrado por la figura 2, F consta de cuatro células σ_1, σ_2, σ_3 y σ_4).

Inmediatamente se ocurre la siguiente pregunta. ¿Es posible obtener, por el método descrito, todas las superficies orientables que se pueden extender en un nudo?. O dicho en forma precisa. Dado un nudo K y una superficie orientable F extendida en K. ¿Existe una representación k de K y una proyección k' de k tal que la superficie F' obtenida aplicando el método descrito a k' es tal que existe un homeomorfismo φ de R^3 sobre sí mismo tal que $\varphi(F') = F$?

El objeto del presente artículo es probar que existe un nudo K y una superficie orientable extendida en K que no se puede obtener de una proyección de K.

2. Demostraremos el siguiente teorema.

<u>Teorema</u>. Sea K_0 la clase que contiene al círculo. Sea F una superficie orientable de género 1 que se obtiene aplicando el método descrito a una proyección de K_0. Entonces existe un homeomorfismo φ de R^3 sobre sí mismo, que transforma F en un subconjunto de un toro no anudado T, es decir $\varphi(F) \subset T$.

Demostración. Sea k el representante de K_0 y k' la proyección de k, de la cual se obtiene F. Las proyecciones de las células que componen F son células cuyas fronteras contienen un cierto número de puntos dobles de k' (que llamaremos <u>vértices</u> de la proyección de la célula). Si la intersección de las fronteras de las proyecciones de dos células no es vacía, entonces dicha intersección está compuesta de puntos dobles de k', y cada punto doble pertenece a las proyecciones de dos células.

El género h de F está dado por $h = \frac{d-f+1}{2}$ [1], en donde d es el número de puntos dobles de k' y f es el número de células de F. En nuestro caso $h = 1$, $d = \frac{\sum_{i>1} i n_i}{2}$ y $f = \sum_{i>1} n_i$, en donde n_i es el número de células de F cuyas proyecciones tienen i vértices. Por lo tanto, tenemos: $2 = \sum_{i>1} (i-2)\, n_i$, de donde $n_i = 0$ si $i \geqq 5$. Los dos casos posibles son los siguientes:

[1] Ver (3).

a) $\begin{cases} n_2 & \text{arbitrario} \\ n_3 = 0 \\ n_4 = 1 \end{cases}$ y b) $\begin{cases} n_2 & \text{arbitrario} \\ n_3 = 2 \\ n_4 = 0 \end{cases}$

Consideremos el caso a). La proyección de F está compuesta de un cuadrilátero Q y dos cadenas c_1 y c_2 de biláteros cada una de las cuales une dos vértices del cuadrilátero.

Ahora bien, una cadena de bilátero no puede unir dos vértices consecutivos del cuadrilátero (ver. fig. 3), porque la cadena debe tener un número impar de biláteros puesto que F es orientable y en ese caso la frontera de F tendría más de una componente. (En la figura 3 se ha indicado con una línea gruesa una de las componentes de la frontera de F).

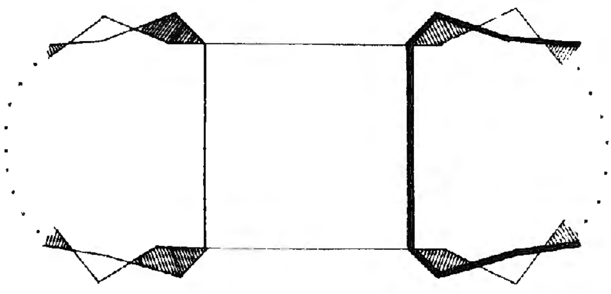


Fig. 3

Por lo tanto la proyección de F debe ser de la forma ilustrada por la fig. 4.

Sea v_{11} la semidiferencia del número de torceduras del tipo 1) (figura 5) menos el número de torceduras del tipo 2) (figura 5), en la cadena c_1 y sea v_{22} el número definido análogamente en la cadena c_2. Entonces, es fácil ver que el polinomio de Alexander de K_o es:

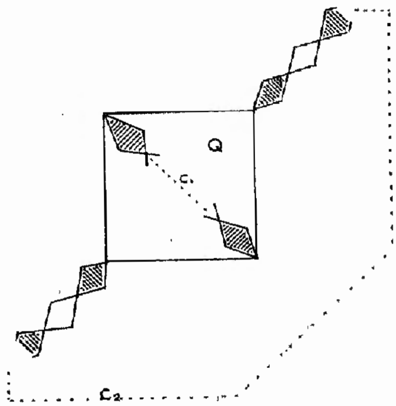


Fig. 4

$$v_{11}\, v_{22}\, x^2 + (1-2\, v_{11}\, v_{22})\, x + v_{11}\, v_{22}$$

y puesto que K_o es la clase del círculo, se debe tener, $v_{11}v_{22}=0$ [1]. Supongamos, por ejemplo, que $v_{11} = 0$, entonces F es de la forma indicada en la figura 6

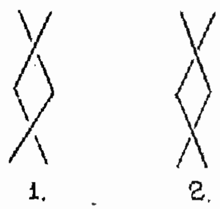


Fig. 5

[1] Para una definición del polinomio de Alexander se puede ver (1) ó (3). El polinomio de un nudo está determinado excepto por un factor de la forma $\pm x^n$ (n entero arbitrario). El polinomio de K_o es 1.

y es claro que F se puede sumergir en un toro no anudado T. Si $v_{22} = 0$ la situación es análoga.

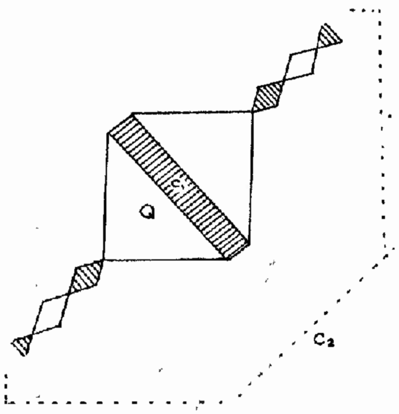


Fig. 6

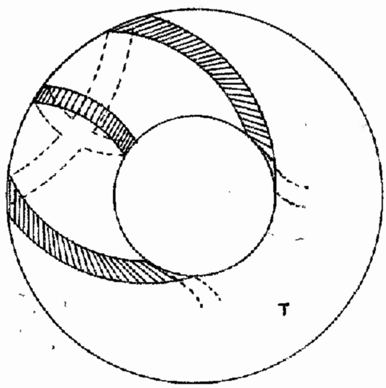


Fig. 7

Consideremos ahora el caso b). F está compuesta de dos triángulos T_1 y T_2 y tres cadenas de biláteros c_1, c_2 y c_3 que unen los vértices de T_1 con los de T_2. (Una cadena no puede unir dos vértices del mismo triángulo, por la misma razón que no puede unir dos vértices consecutivos de Q en el caso anterior). Entonces F es de la forma que ilustra la figura 8.

Sean m, n y r los números de puntos dobles en c_1, c_2 y c_3 respectivamente. Puesto que F es orientable, se debe tener $m \equiv n \equiv r \pmod 2$. Si m, n y r son pares, entonces la frontera de F tiene más de una componente. Por lo

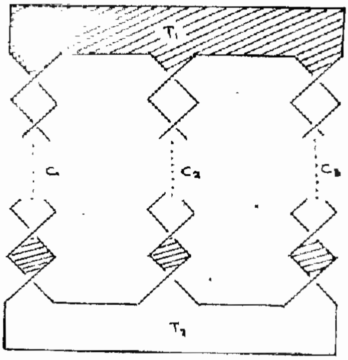


Fig. 8

tanto se debe tener $m \equiv n \equiv r \equiv 1 \pmod 2$. Supongamos que uno de los números m, n ó r es igual a 1, sea, por ejemplo, $r = 1$, entonces F tiene la forma indicada en la figura 9. Es claro que existe un homeomorfismo φ de R^3 que transforma F en una superficie del tipo indicado en la figura 10. Ahora bien esta

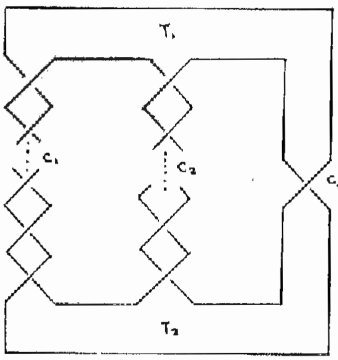


Fig. 9

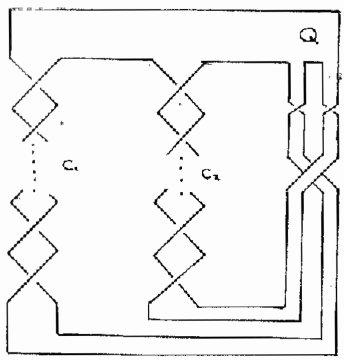


Fig. 10

superficie consta de un cuadrilátero Q y dos cadenas de biláteros c_1 y c_2 y en este caso el teorema ya ha sido demostrado. Los casos correspondientes a $m = 1$ y $r = 1$ son completamente análogos.

Queda por ser considerado únicamente el caso en que $m \geqq 3$, $n \geqq 3$, $r \geqq 3$. (Es claro que podemos suponer que los puntos dobles de cada cadena son del mismo tipo 1) ó 2) figura 5).

Probaremos que este caso no se puede presentar[1], con lo cual quedará completa la demostración del teorema. Tenemos que considerar tres subcasos que están ilustrados por i, ii, iii figura 11, dependiendo del tipo de torceduras que aparezcan en las cadenas. (Es claro que basta considerar estos subcasos).

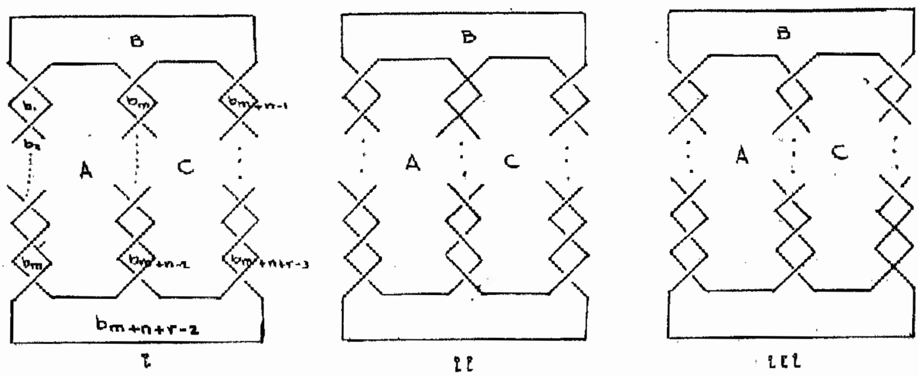


Fig. 11

Consideremos el grupo G de K_o [2]. Puesto que K_o es la clase del círculo, G es cíclico infinito y por lo tanto abeliano. Sin embargo, para los tres casos i, ii, e iii da

---

[1] Para dicha prueba no bastan los invariantes de homología de K_o. En su artículo (3), Seifert da un ejemplo de un nudo que no es la clase del círculo y que sin embargo, tiene los mismos invariantes de homología. El método que usaremos es una generalización inmediata del método usado por Seifert para probar que el nudo considerado por él no es deformable en un círculo.

[2] Se entiende por grupo de un nudo K el grupo fundamental $\pi_1(R^3-k)$ del complemento de un representante de K. Por lo tanto el grupo es un invariante asociado a la clase K.

remos una representación de G sobre un grupo no abeliano.

Calculemos G en el caso i [1]. G está generado por $A, B, C, b_1, b_2, \ldots, b_{m+n+r-2}$, en donde cada generador corresponde a la región indicada con el mismo símbolo en i - figura 11. Las relaciones son:

$$
\begin{array}{llllll}
AB^{-1} & = b_1 & CB^{-1} & = b_m A^{-1} & B & = Cb_{m+n-1}^{-1} \\
Ab_1^{-1} & = b_2 & Cb_m^{-1} & = b_{m+1} A^{-1} & b_{m+n-1} & = Cb_{m+n}^{-1} \\
 & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
Ab_{m-1}^{-1} & = b_{m+n+r-2} & Cb_{m+n-2}^{-1} & = b_{m+n+r-2}A^{-1} & b_{m+n+r-3} & = Cb_{m+n+r-2}^{-1}
\end{array}
$$

Se pueden eliminar los generadores $b_1, \ldots, b_{m+n+r-2}$ obteniendo como presentación de G los generadores A, B y C y las relaciones:

$$A^{\frac{m+1}{2}} B^{-1} A^{-\frac{m-1}{2}} = (CA^{-1})^{\frac{n-1}{2}} CB^{-1}A \, (C^{-1}A)^{\frac{n-1}{2}} B =$$

$$= C^{-\frac{r-1}{2}} B^{-1} C^{\frac{r+1}{2}}$$

o las equivalentes:

$$A^{\frac{m+1}{2}} B^{-1} A^{-\frac{m-1}{2}} B = (CA^{-1})^{\frac{n-1}{2}} CB^{-1}A \, (C^{-1}A)^{\frac{n-1}{2}} B =$$

$$= C^{-\frac{r-1}{2}} B^{-1} C^{\frac{r+1}{2}} B \, .$$

[1] Para un método de cálculo de G se puede ver, por ejemplo (2).

En el caso ii, G está dado por generadores A, B y C y relaciones:

$$A^{\frac{m+1}{2}} B^{-1} A^{-\frac{m-1}{2}} B = (CA^{-1})^{\frac{n-1}{2}} AB^{-1}C\,(A^{-1}C)^{\frac{n-1}{2}} B =$$

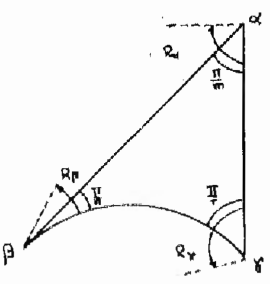
$$= C^{-\frac{r-1}{2}} B^{-1} C^{\frac{r+1}{2}} B$$

y en el caso iii, tenemos A, B y C como generadores y como relaciones:

$$A^{\frac{m+1}{2}} B^{-1} A^{-\frac{m-1}{2}} B = (CA^{-1})^{\frac{n-1}{2}} CB^{-1}A\,(C^{-1}A)^{\frac{n-1}{2}} B =$$

$$= C^{\frac{r+1}{2}} B^{-1} C^{-\frac{r-1}{2}} B \ .$$

Ahora consideramos en el plano hiperbólico, un triángulo $\alpha\beta\gamma$ con ángulos $\frac{\pi}{m}$, $\frac{\pi}{n}$ y $\frac{\pi}{r}$. (Si $m = n = r = 3$, la representación se hace en el plano euclidiano). Denotemos por R_α una rotación negativa, alrededor de α, de un ángulo $\frac{2\pi}{m}$, por R_γ una rotación positiva, alrededor de γ, de un ángulo $\frac{2\pi}{r}$ y por $R_{\alpha\gamma}$ la reflexión sobre $\alpha\gamma$. Sea G' el grupo de movimientos del plano generado por R_α, R_γ y $R_{\alpha\gamma}$, es claro que G' no es abeliano. La correspondencia



$A \longrightarrow R_\alpha$, $B \longrightarrow R_{\alpha\gamma}$ y $C \longrightarrow R_\gamma$, de los generadores de G con los de G', constituye un homomorfismo de G sobre G' (en los tres casos i, ii e iii). Basta hacer ver que las relaciones que definen a G valen en G'. Tenemos:

$$B^{-1} A^{-1} B \longrightarrow R_{\alpha\gamma} R_\alpha^{-1} R_{\alpha\gamma} = R_\alpha$$

$CA^{-1} \longrightarrow R_{\alpha\gamma} R_\beta R_{\alpha\gamma}$, en donde R_β es una rotación positiva, alrededor de β , de un ángulo $\frac{2\pi}{r}$.

$$\begin{aligned} C^{-1} A &\longrightarrow R_\beta \\ CB^{-1}A &\longrightarrow R_{\alpha\gamma} R_\beta \\ AB^{-1}C &\longrightarrow R_{\alpha\gamma} R_\beta \\ B^{-1}CB &\longrightarrow R_\gamma^{-1} \end{aligned} .$$

Se tiene: $A^{\frac{m+1}{2}} B^{-1} A^{\frac{m-1}{2}} B = A^{\frac{m+1}{2}} (B^{-1}A^{-1}B)^{\frac{m-1}{2}} \longrightarrow R_\alpha^{\frac{m+1}{2}} R_\alpha^{\frac{m-1}{2}} =$
$= R_\alpha^m = 1.$

$(CA^{-1})^{\frac{n-1}{2}} CB^{-1}A(C^{-1}A)^{\frac{n-1}{2}} B \longrightarrow R_{\alpha\gamma} R_\beta^{\frac{n-1}{2}} R_{\alpha\gamma} R_{\alpha\gamma} R_\beta R_\beta^{\frac{n-1}{2}} R_{\alpha\gamma} =$

$= R_{\alpha\gamma} R_\beta^n R_{\alpha\gamma} = 1$.

$C^{-\frac{r-1}{2}} B^{-1} C^{\frac{r+1}{2}} B = C^{-\frac{r-1}{2}} (B^{-1}CB)^{\frac{r+1}{2}} \longrightarrow R_\gamma^{-\frac{r-1}{2}} R_\gamma^{-\frac{r+1}{2}} = R_\gamma^{-r} = 1$.

Análogamente se tiene:

$$(AC^{-1})^{\frac{n-1}{2}} AB^{-1}C (A^{-1}C)^{\frac{n-1}{2}} B \longrightarrow 1 \quad y \quad C^{\frac{r+1}{2}} B^{-1} C^{-\frac{r-1}{2}} B \longrightarrow 1,$$

con esto ha quedado demostrado el teorema.

Ahora consideremos un nudo S una de cuyas proyecciones s' está dada en la figura 12.1 y una superficie F' extendida en S. S es la clase del círculo, para ver esto se muestra en la figura 12.2 un primer paso de la deformación de s en un círculo, la deformación restante es obvia. Es

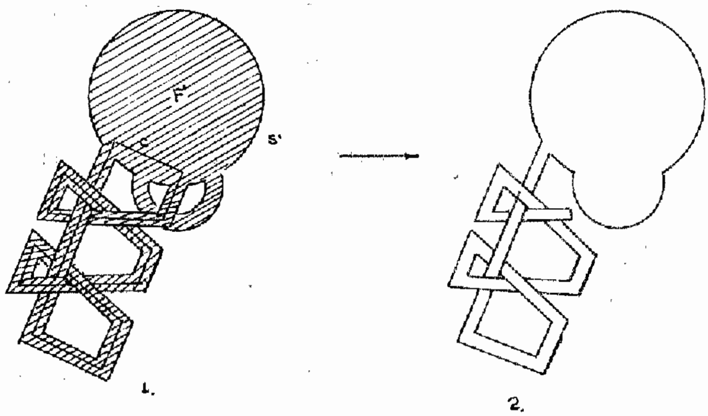


Fig. 12

claro que F' es de género 1. Ahora bien si F' se pudiera obtener de una proyección de S, en virtud del teorema que acabamos de demostrar, la curva simple cerrada c (que se muestra en la figura 12.1) sería un representante de un nudo toral [1], pero es sabido[2] que una curva simple cerrada que tie ne la propiedad de pertenecer a la misma clase que una curva

---

[1]Se llama nudo toral, a un nudo (distinto del círculo) que tie ne un representante contenido en un toro no anudado.

[2]Ver (2)

obtenida reflejando R^3 sobre un plano, no es representante de un nudo total y c se escogió teniendo dicha propiedad.

BIBLIOGRAFIA.

(1) Alexander, J.W. Topological Invariants of Knots and Links , Trans. Amer. Math. Soc. vol. 30 (1928).

(2) Reidemeister, K.: Knotentheorie. Chelsea Publishing Co. New York, 1948.

(3) Seifert, H.: Über das Geschlecht von Knoten. Math. Annalen. Vol. 110 (1934).

Instituto de Matemáticas

de la U.N.A.M.

CALCULOS FUNCIONALES DE PRIMER ORDEN CON IDENTIDAD.

Por Gonzalo Zubieta R.

En el libro de Hilbert y Bernays [1], págs. 187-190, se considera un cálculo funcional de primer orden en el que se introduce el símbolo '=' de la identidad y ciertas expresiones llamadas términos. En el presente artículo, partiendo de un sistema similar, X , con un sistema de axiomas en X, se demuestra que, dado un conjunto P de proposiciones de X , toda consecuencia lógica de P es demostrable a partir de las proposiciones de P (y de los axiomas); tal es el contenido del teorema 4.

Los símbolos primitivos del sistema X son:

$$= \quad / \quad (\quad) \quad ,$$

y los que a continuación se especifican:

1. Símbolos individuales, (los clasificamos en variables

y constantes).

2. Para cada número $n=1,2,\ldots$ una clase (que puede ser vacía) de símbolos de operación de grado n.

3. Para cada número $n=0,1,2,\ldots$ una clase (que puede ser vacía) de símbolos funcionales de grado n.

Suponemos que la totalidad de símbolos es numerable y que la clase de las variables individuales es infinita y la de las constantes individuales, no vacía.

Son términos del sistema X: (1) los símbolos individuales, y (2) las expresiones de la forma $\Gamma(\varphi_1,\ldots,\varphi_n)$ donde Γ es un símbolo de operación de grado n y $\varphi_1,\ldots,\varphi_n$ son términos. Solamente las sucesiones finitas que estén de acuerdo con las condiciones (1) y (2) serán consideradas como términos.

Son fórmulas elementales del sistema X: (1) los símbolos funcionales de grado 0; (2) las expresiones $\Phi(\varphi_1,\ldots,\varphi_n)$, donde Φ es un símbolo funcional de grado n y $\varphi_1,\ldots,\varphi_n$ son términos; (3) las expresiones $(\varphi=\psi)$, donde φ y ψ son términos.

Las fórmulas del sistema X son las elementales y las que resultan de ellas al aplicar un número finito de veces los siguientes criterios de construcción:

1. Si f y g son fórmulas, entonces (f/g) es una fórmula.

2. Si f es fórmula y α una variable individual, en-

tonces $(\alpha)f$ es una fórmula.

Puede observarse que una fórmula es una sucesión finita de símbolos y que la totalidad de las fórmulas es numerable.

Una presencia de la variable individual α en la fórmula f *está ligada* en f, si está en una parte bien formada (subfórmula) de f de la forma $(\alpha)g$. *Una presencia de término* en la fórmula f *está ligada* en f, si contiene al menos una presencia de variable ligada en f. *Una presencia de término* en f *es libre* en f si no está ligada en f.

En calidad de abreviaturas escribimos: 'fg' en lugar de '(f/g)'; '$\overline{f}$' en lugar de 'ff'; '$f \rightarrow g$' y '$(E\alpha)f$', respectivamente, en lugar de '$f\overline{g}$' y '$\overline{(\alpha)\overline{f}}$'; '$f \leftrightarrow g$' en lugar de '$\overline{(f \rightarrow g)(g \rightarrow f)}$'.

Llamaremos *proposiciones* a las fórmulas que no contienen presencias libres de variables individuales. Para referirnos a ellas emplearemos las letras: 'p', 'q', 'r', ...

Una *valuación del sistema* X se obtiene asignando un valor de verdad (V ó F) a cada proposición de X, según las convenciones que siguen:

Q1. La proposición pq toma el valor F si, y sólo si, las proposiciones p y q toman ambas el valor V en la valuación.

Q2. Una proposición $(\alpha)f$ toma el valor V si, y sólo si, todas las proposiciones $f\frac{u}{\alpha}$, que se obtienen al substituir por una constante u del sistema las presencias libres de α en f, toman el valor V.

Una *valuación-(I)* del sistema X es una valuación de X, en la que, además,

I1. Toda proposición de la forma $(\varphi = \varphi)$ toma el valor V.

I2. Si una proposición de la forma $(\varphi = \psi)$ toma el valor V y si p contiene presencias del término φ en algunas partes donde q contiene presencias del término ψ, siendo p,q iguales en lo restante, entonces p y q toman el mismo valor de verdad.

Puede comprobarse que una valuación del sistema X queda determinada al asignar valores de verdad a las proposiciones elementales.

Decimos que una valuación dada *verifica* a una clase P de proposiciones, cuando todo elemento de P toma el valor V en la valuación.

Una extensión del sistema X será cualquier sistema Y que se obtenga al agregar a X nuevas constantes individuales.

Decimos que una clase P de proposiciones de X es *verificable* si existe una valuación de X o de alguna de sus extensiones, en la cual toda proposición de P toma el valor V.

FORMALIZACION.

Con el símbolo '$f\frac{\varphi}{\alpha}$' nos referiremos en lo sucesivo a una fórmula g que se obtiene al substituir por el término φ cada una de las presencias libres de la variable α en la fórmula f, suponiendo que las presencias resultantes de φ son libres en g.

Son <u>tautologías</u> aquellas fórmulas cuya validez puede comprobarse por medio de las tablas de verdad.

<u>Axiomas de cuantificación</u>: las tautologías y fórmulas de la forma $(\alpha)f \rightarrow f\frac{\varphi}{\alpha}$.

<u>Axiomas de la identidad</u>: las fórmulas $\varphi = \varphi$ y $(\varphi = \psi) \rightarrow (f \leftrightarrow g)$, donde f contiene presencias libres del término φ en algunas partes donde g contiene presencias libres del término ψ, siendo iguales f y g en lo restante.

<u>Reglas de inferencia</u>.

R1. De f y $f \rightarrow g$ inferir g.

R2. De $f \rightarrow g$ inferir $f \rightarrow (\alpha)g$, siempre que f no contenga presencias libres de la variable α.

Una clase de fórmulas es <u>cerrada</u> si con cada par de fórmulas $f \rightarrow g$ y f contiene también a g, y con cada fórmula $f \rightarrow g$ contiene a $f \rightarrow (\alpha)g$ cuando α no tiene presencias libres en f.

La fórmula f es <u>consecuencia formal</u> de la clase de fórmulas K (en símbolos, $K \vdash f$) si f se puede deducir de K aplicando las reglas R1 y R2. Con más precisión, decimos que $K \vdash f$, si f está en <u>K'</u>, <u>clase cerrada mínima</u> que contiene a K. Es fácil demostrar la existencia de esta clase K': es la intersección de todas las clases cerradas que contienen a K.

En lo que sigue, U será la clase de los axiomas de cuantificación, I la de los axiomas de la identidad, y P una clase arbitraria de proposiciones de X; $K+L$ será la unión de las clases K y L, $K+f$ la clase que resulta de K al agregarle la fórmula f; el símbolo '$K \subset L$' se usará para indicar que los elementos de K son elementos de L.

<u>Teorema 1</u>. Sea K una clase de fórmulas que contiene a U y p una proposición arbitraria. Si $(K+p) \vdash f$ entonces $K \vdash (p \rightarrow f)$.

Demostración.- Sea L la clase de las fórmulas f tales que $K \vdash (p \rightarrow f)$. L es cerrada y contiene a las fórmulas de $K+p$. Luego $(K+p)' \subset L$, como se quería demostrar.

<u>Teorema 2</u>. Si $(U+P)'$ no comprende a todas las fórmulas de X, entonces P es verificable.

Este toerema se debe al Prof. Henkin. La demostración publicada por él [2] puede adaptarse convenientemente al caso del sistema X.

<u>Teorema 3</u>. Si la proposición q toma el valor V en toda valuación que verifique a la clase P, entonces $(U+P) \vdash q$.

Demostración.- La clase $P+\bar{q}$ es no verificable, por la hipótesis. Por el teorema 2, $(U+P+\bar{q})'$ contiene a todas las fórmulas de X. En particular, $(U+P+\bar{q}) \vdash q$. Por el toerema 1, $(U+P) \vdash (\bar{q} \rightarrow q)$; luego $(U+P) \vdash q$.

<u>Teorema 4</u>. Si q toma el valor V en toda valuación-(I)

que verifique a P, entonces $(U+I+P) \vdash q$.

Demostración.- Sea J la clase de las cerraduras de fórmulas de I. Toda valuación que verifica a $J+P$ es una valuación-(I) que verifica a P. Luego, por la hipótesis del teorema, q toma el valor V en toda valuación que verifique a $J+P$. Por el teorema 3, $(U+J+P) \vdash q$. Finalmente, como $J \subset I'$, se tiene $(U+I+P) \vdash q$.

Nota.- Una cerradura de la fórmula f se obtiene anteponiéndole a f, por cada variable α libre en f, el cuantificador (α). Las cerraduras de fórmulas son proposiciones.

REFERENCIAS.

[1] D. Hilbert y P. Bernays.- Grundlagen der Mathematik 1. (Berlín, 1934)

[2] Leon Henkin.- The completeness of the first-order functional calculus. The Journal of Symbolic Logic, Vol.14 (1949).

Instituto de Matemáticas
de la U.N.A.M.

CONGRESO CIENTIFICO MEXICANO

Del 24 al 30 de septiembre del presente año se efectuará en esta ciudad el CONGRESO CIENTIFICO MEXICANO organizado por la Universidad Nacional, como uno de los actos con que se celebrará el IV-Centenario de la fundación de la misma Universidad.

La Sociedad Matemática Mexicana, cumpliendo con el propósito que la anima de mantener e impulsar el interés por la investigación científica en nuestro país, en la rama de matemáticas se adhiere al Congreso Científico Mexicano. Por tal motivo, esta Sociedad invita muy atentamente a sus socios, y a todos los matemáticos del país, a concurrir a las sesiones del Congreso mencionado y, de ser posible, presentar allí trabajos de investigación original.

El plazo para entregar los originales de los trabajos que se han de presentar termina el 31 del presente mes de agosto. Por eso, rogamos a los interesados que antes de esa fecha envíen sus escritos a la Comisión Organizadora del Congreso Científico Mexicano, Reforma No. 336, 5o. Piso, México, D.F.

A continuación se transcribe la Convocatoria que dió a conocer la Comisión organizadora.

C O N V O C A T O R I A

La Universidad Nacional Autónoma de México convoca a las personas que se dedican al cultivo de las ciencias en el país, para que participen en el Congreso Científico Mexicano, organizado como uno de los actos con que se celebrará el IV Centenario de la fundación de la Universidad.

El Congreso se realizará de acuerdo con las siguientes bases:

1a. El Congreso tiene por objeto presentar al público los resultados alcanzados en el cultivo de las ciencias en México, por medio de la lectura y discusión de trabajos originales de investigación y por la exposición de la contribución mexicana a las ciencias durante la primera mitad del presente siglo.

2a. El Congreso se efectuará en la ciudad de México, del 24 al 30 de septiembre del presente año, de acuerdo con el calendario respectivo.

3a. El Congreso comprenderá cinco divisiones:

I. División de Ciencias Físicas y Matemáticas.
II. División de Ciencias Biológicas y Médicas
III. División de Ciencias Sociales
IV. División de Teoría de la Ciencia y Psicología
V. División de Filosofía.

Estas Divisiones estarán subdivididas en las ramas, las secciones y las subsecciones que se mencionan en el temario.

4a. Los miembros del Congreso tendrán libertad plena para presentar estudios y proposiciones dentro o fuera del temario; los temas que éste señala han sido sugeridos a la Comisión Organizadora por investigadores que presentarán estudios al Congreso.

5a. Podrán participar en el Congreso, ya sea por sí o en representación de instituciones oficiales o privadas, todas las personas que en México se dediquen al cultivo de las ciencias.

6a. Para tener el carácter de miembro del Congreso será necesario inscribirse oportunamente, pagar una cuota de $ 50.00 y sujetarse a las bases de esta Convocatoria y a los Reglamentos del Congreso.

El período de inscripciones quedará abierto desde la fecha de publicación de esta Convocatoria.

7a. Los estudios que se presenten al Congreso podrán ser tan extensos como se quiera; pero en todo caso se acompañarán de un resumen que no exceda de cinco cuartillas. Esta última extensión es la máxima para las proposiciones fundadas que se hagan al Congreso.

Los estudios o las proposiciones deberán enviarse escritos a máquina, a renglón abierto con copia y en papel tamaño carta. Las personas que deseen presentar algún estudio o proposición al Congreso se servirán manifestarlo así a la Comisión Organizadora del mismo, indicando el título de su trabajo y la Sección en la que deseen presentarlo, a más tardar el día treinta de julio próximo, fecha definitiva.

Los estudios y las proposiciones, con el material gráfico que en su caso, los ilustre, deberán ser enviados al Secretario General de la Comisión Organizadora del Congreso Científico Mexicano, Paseo de la Reforma 336, quinto piso, México, D. F., a más tardar el día quince de agosto del presente año. En vista de la necesidad de disponer del tiempo bastante para imprimir y distribuir oportunamente los trabajos, el plazo señalado es improrrogable.

8a. El Congreso efectuará dos clases de sesiones plenarias y parciales. Serán sesiones plenarias la de la elección de funcionarios del Congreso; la de inauguración; las correspondientes a cada una de las Divisiones para presentar el informe de la aportación mexicana a las ciencias en los primeros cincuenta años de este siglo; la de revisión, redacción final y aprobación de las proposiciones y de elección de la Comisión Ejecutiva del Congreso; la de clausura.

Las Secciones y Subsecciones celebrarán sesiones parciales para dar lectura y discutir los estudios y para presentar, discutir y aprobar, en su caso, las proposiciones.

9a. La Comisión Ejecutiva del Congreso editará la memoria del mismo, con los estudios y las proposiciones aprobadas, las actas y los informes de la aportación científica de México y enviará un ejemplar de dicha memoria a cada uno de los miembros del Congreso.

NOTA: La Sociedad Matemática Mexicana ha tenido conocimiento de que la fecha señalada en el último párrafo de la base 7a. se - ha prorrogado hasta el 30 de agosto del presente año.

N O T I C I A S   V A R I A S

I

A principios de este año comenzó a funcionar el Instituto Nacional de la Investigación Científica creado por decreto del Congreso de la Unión el 28 de diciembre de 1950, en sustitución de la antigua Comisión Impulsora y Coordinadora de la Investigación Científica.

Entre las finalidades que el decreto mencionado señala para el nuevo Instituto figura la de "sostener las instituciones de investigación en ciencias puras que se consideren de importancia para el desarrollo científico del país". El mismo decreto crea la rama matemática en forma independiente, pues en la antigua CICIC la matematica estaba fusionada con la física. Continuan en el cuerpo directivo de la nueva institución nuestros distinguidos consocios doctor J. Joaquín Izquierdo, Ingeniero Ricardo Monges López y doctor Manuel Sandoval Vallarta. Es presidente del nuevo Instituto el doctor Sandoval Vallarta quien figura como Vocal Matemático y Vocal Físico del mismo.

Felicitamos a nuestros distinguidos consocios por esta distinción y deseamos tanto a ellos como al nuevo Instituto mucho éxito en el desempeño de las labores que les ha encomendado el Gobierno de la República. Esperamos que la investigación matemática encuentre franca y sincera hospitalidad así como decisivo apoyo en el nuevo Instituto Nacional de la Investigación Científica.

II

Se encuentran en México como investigadores visitantes del Instituto de Matemáticas de la Universidad Nacional los matemáticos norteamericanos doctor Solomón Lefschetz y doctor Ralph Fox, ambos de la Universidad de Princeton. El doctor Lefschetz, gran amigo de México y en particular del Instituto de Matemáticas y de nuestra Sociedad Matemática, ha intervenido en algunos seminarios e investigaciones. El doctor Fox hace su primera visita a México y a nuestro Instituto; ha dictado algunas conferencias comunicando las investigaciones de su especialidad. Ambos profesores han brindado amable hospitalidad científica a los matemáticos mexicanos que han ido a Princeton con fines de investigación científica.

Saludamos cordialmente a nuestros distinguidos visitantes deseándoles una fructífera labor matemática en México y una grata estada en nuestro país.

III

El señor Profesor Cesar Lizardi Ramos, miembro de la Sociedad Matemática Mexicana, acaba de realizar una interesante labor mexicanista en los Estados Unidos y en Cuba , dictando alrededor de diez conferencias en varios centros de estudios de distintas regiones del país vecino, desde Nueva York hasta los Angeles, al mismo tiempo que investigando en la rama de su especialidad.

Acaba de recibir el señor Lizardi Ramos dos merecidas distinciones: una medalla de la American International Academy de Nueva York con el grado de Comandante, y un docotrado Honoris Causa de la Universidad Latino Americana de la Habana. El diploma relativo al doctorado fué traído a México por el doctor José Luis Avellanar de dicha Universidad, y entregado al señor profesor Lizardi en sesión solemne de la Sociedad Mexicana de Geografía y Estadística, el 26 de junio de 1951.

Nuestras felicitaciones a nuestro distinguido consocio por su gran actividad y por estas merecidas distinciones.

IV

Los hermanos José y Julián Adem, investigadores de los Institutos de Matemáticas y de Geofísica respectivamente continúan comisionados por dichos Institutos para estudios e investigaciones matemáticos en los Estados Unidos, el primero en la Universidad de Princeton y el segundo en la Universidad de Brown. Ambos han desempeñado en forma plausible su comisión. El doctor Lefschetz, actualmente en México, se ha expresado encomiásticamente de la labor de José Adem.

Esperamos que nuestros estimados consocios los matemáticos José y Julián Adem continúen con éxito sus trabajos.

NOTAS BIBLIOGRAFICAS

"BASIC MATHEMATICAL ANALYSIS", por H. Glenn Ayrs. First-Edition XVI, 584 pgs. McGraw-Hill Book Company. 1950. 5.00 dls.

"FUNDAMENTALS OF THE CALCULUS", por Donald E. Richmond First Edition. XI, 233 pgs. McGraw-Hill Book Company. 1950 ---- 4.00 dls.

"BUSINESS MATHEMATICS", por Cleon C. Richtmeyer, PH. D. -- and Judson W. Foust, PH. D. Third Edition. XVII, 441 pgs. McGraw-Hill Book Company. 1950. 3.50 dls.

" A MANUAL FOR THE SLIDE RULE", por Paul E. Machovina, -- First Edition. 78 pgs. McGraw-Hill Book Company, Inc. 1950.

"PRACTICAL MATHEMATICS". Part III Geometry with Applications, Claude Irwing Palmer and Samuel Fletcher Bibb. Fifth Edition. --- McGraw Hill Book Company, Inc. 1950. XII, 200 pgs. $ 2.20 dls.

"MATHEMATICAL ENGINEERING ANALYSIS", Rufus Oldenburger. - XIV, 426 pgs. The Macmillan Company 1950.

"THE KERNEL FUNCTION AND CONFORMAL MAPPING", por Stefan Bergman VII, 161 pgs. American Mathematical Society. 1950. 4.00 dls.

"COEFFICIENT REGIONS FOR SCHLICHT FUNCTIONS", por A. C. - Schaeffer and D. C. Spencer. XI, 311 pgs. American Mathematical -- Society.

"MATHEMATICS", por E. T. Bell. XX, 437 pgs. McGraw-Hill Book-Company, Inc. 5.00 dls.

"THEORY OF PROBABILITY", por M. E. Munroe. First Edition. -- VIII, 112 pgs. McGraw-Hill Book Company. 4.50 dls.

"INTRODUCTION TO STATISTICAL ANALYSIS", por Wilfrid J. Dixon y Frank J. Massey, Jr. First Edition. X, 370 pgs. McGraw-Hill Book Company, Inc. 1951. 4.50 dls.

"INFINITE MATRICES AND SEQUENCE SPACES", por Richard G. Cooke, XIII, 347 pgs. Macmillan and Co., Limited. 1950. 42s. net.

"NEGATIVE IONS", por H. S. W. Massey, F.R.S. Second Edition XIV, 136 pgs. Cambridge at the University Press. 1950. 12s. 6d. net.

"CALCULATING INSTRUMENTS AND MACHINES", por Douglas R. - Hartree. IX, 138 pgs. Cambridge University Press. 1950. 2is. net.

"INTRODUCTION TO ALGEBRAIC GEOMETRY", por W. Gordon --- Welchman. X, 349 pgs. Cambridge at the University Press. 1950. -- 25s. net.

"ANALYTIC GEOMETRY", por John W. Cell. Second Edition. XII, 326 pgs. John Wiley & Sons, Inc. 1951. 3.75 dls.

"TRIGONOMETRY", por Cecil Thomas Homes, Ph. D. First Edition. IX, 246 pgs. McGraw-Hill Book Company, Inc. 1951. 3.00 dls.

"FOURIER TRANSFORMS", por Ian N. Sneddon. First Edition, XII, - 524 pgs. McGraw - Hill Book Company, Inc. 1951.