CALCULOS FUNCIONALES DE PRIMER ORDEN CON IDENTIDAD.

Por Gonzalo Zubieta R.

En el libro de Hilbert y Bernays [1], págs. 187-190, se considera un cálculo funcional de primer orden en el que se introduce el símbolo '=' de la identidad y ciertas expresiones llamadas términos. En el presente artículo, partiendo de un sistema similar, X, con un sistema de axiomas en X, se demuestra que, dado un conjunto P de proposiciones de X, toda consecuencia lógica de P es demostrable a partir de las proposiciones de P (y de los axiomas); tal es el contenido del teorema 4.

Los símbolos primitivos del sistema X son:

$$= \quad / \quad (\quad) \quad ,$$

y los que a continuación se especifican:

1. Símbolos individuales, (los clasificamos en variables

y constantes).

2. Para cada número $n=1,2,\ldots$ una clase (que puede - ser vacía) de símbolos de operación de grado n.

3. Para cada número $n=0,1,2,\ldots$ una clase (que puede ser vacía) de símbolos funcionales de grado n.

Suponemos que la totalidad de símbolos es numerable y que la clase de las variables individuales es infinita y la de las constantes individuales, no vacía.

Son términos del sistema X: (1) los símbolos individuales, y (2) las expresiones de la forma $\Gamma(\varphi_1,\ldots,\varphi_n)$ donde Γ es un símbolo de operación de grado n y $\varphi_1,\ldots,\varphi_n$ son términos. Solamente las sucesiones finitas que estén de acuerdo con las condiciones (1) y (2) serán consideradas como términos.

Son fórmulas elementales del sistema X: (1) los símbolos funcionales de grado 0; (2) las expresiones $\Phi(\varphi_1,\ldots,\varphi_n)$, donde Φ es un símbolo funcional de grado n y $\varphi_1,\ldots,\varphi_n$ son términos; (3) las expresiones $(\varphi=\psi)$, donde φ y ψ son términos.

Las fórmulas del sistema X son las elementales y las que resultan de ellas al aplicar un número finito de veces los siguientes criterios de construcción:

1. Si f y g son fórmulas, entonces (f/g) es una fórmula.

2. Si f es fórmula y α una variable individual, en-

tonces $(\alpha)f$ es una fórmula.

Puede observarse que una fórmula es una sucesión finita de símbolos y que la totalidad de las fórmulas es numerable.

Una presencia de la variable individual α en la fórmula f *está ligada* en f, si está en una parte bien formada (subfórmula) de f de la forma $(\alpha)g$. *Una presencia de término* en la fórmula f *está ligada* en f, si contiene al menos una presencia de variable ligada en f. *Una presencia de término* en f *es libre* en f si no está ligada en f.

En calidad de abreviaturas escribimos: 'fg' en lugar de '(f/g)'; '$\overline{f}$' en lugar de 'ff'; '$f\to g$' y '$(E\alpha)f$', respectivamente, en lugar de '$f\overline{g}$' y '$\overline{(\alpha)\overline{f}}$'; '$f\leftrightarrow g$' en lugar de '$\overline{(f\to g)(g\to f)}$'.

Llamaremos *proposiciones* a las fórmulas que no contienen presencias libres de variables individuales. Para referirnos a ellas emplearemos las letras: 'p', 'q', 'r', ...

Una *valuación del sistema* X se obtiene asignando un valor de verdad (V ó F) a cada proposición de X, según las convenciones que siguen:

Q1. La proposición pq toma el valor F si, y sólo si, las proposiciones p y q toman ambas el valor V en la valuación.

Q2. Una proposición $(\alpha)f$ toma el valor V si, y sólo si, todas las proposiciones $f\frac{u}{\alpha}$, que se obtienen al substituir por una constante u del sistema las presencias libres de α en f, toman el valor V.

Una <u>valuación-(I)</u> del sistema X es una valuación de X, en la que, además,

I1. Toda proposición de la forma $(\varphi = \varphi)$ toma el valor V.

I2. Si una proposición de la forma $(\varphi = \psi)$ toma el valor V y si p contiene presencias del término φ en algunas partes donde q contiene presencias del término ψ, siendo p,q iguales en lo restante, entonces p y q toman el mismo valor de verdad.

Puede comprobarse que una valuación del sistema X queda determinada al asignar valores de verdad a las proposiciones elementales.

Decimos que una valuación dada <u>verifica</u> a una clase P de proposiciones, cuando todo elemento de P toma el valor V en la valuación.

<u>Una extensión del sistema</u> X será cualquier sistema Y que se obtenga al agregar a X nuevas constantes individuales.

Decimos que una clase P de proposiciones de X es <u>verificable</u> si existe una valuación de X o de alguna de sus extensiones, en la cual toda proposición de P toma el valor V.

FORMALIZACION.

Con el símbolo '$f\frac{\varphi}{\alpha}$' nos referiremos en lo sucesivo a una fórmula g que se obtiene al substituir por el término φ cada una de las presencias libres de la variable α en la fórmula f, suponiendo que las presencias resultantes de φ son libres en g.

Son <u>tautologías</u> aquellas fórmulas cuya validez puede comprobarse por medio de las tablas de verdad.

<u>Axiomas de cuantificación</u>: las tautologías y fórmulas de la forma $(\alpha)f \rightarrow f\,\frac{\varphi}{\alpha}$.

<u>Axiomas de la identidad</u>: las fórmulas $\varphi = \varphi$ y $(\varphi = \psi) \rightarrow (f \leftrightarrow g)$, donde f contiene presencias libres del término φ en algunas partes donde g contiene presencias libres del término ψ, siendo iguales f y g en lo restante.

<u>Reglas de inferencia</u>.

R1. De f y $f \rightarrow g$ inferir g.

R2. De $f \rightarrow g$ inferir $f \rightarrow (\alpha)g$, siempre que f no contenga presencias libres de la variable α.

Una clase de fórmulas es <u>cerrada</u> si con cada par de fórmulas $f \rightarrow g$ y f contiene también a g, y con cada fórmula $f \rightarrow g$ contiene a $f \rightarrow (\alpha)g$ cuando α no tiene presencias libres en f.

La fórmula f es <u>consecuencia formal</u> de la clase de fórmulas K (en símbolos, $K \vdash f$) si f se puede deducir de K aplicando las reglas R1 y R2. Con más precisión, decimos que $K \vdash f$, si f está en K', <u>clase cerrada mínima</u> que contiene a K. Es fácil demostrar la existencia de esta clase K': es la intersección de todas las clases cerradas que contienen a K.

En lo que sigue, U será la clase de los axiomas de cuantificación, I la de los axiomas de la identidad, y P una clase arbitraria de proposiciones de X; $K+L$ será la unión de las clases K y L, $K+f$ la clase que resulta de K al agregarle la fórmula f; el símbolo '$K \subset L$' se usará para indicar que los elementos de K son elementos de L.

<u>Teorema 1</u>. Sea K una clase de fórmulas que contiene a U y p una proposición arbitraria. Si $(K+p) \vdash f$ entonces $K \vdash (p \rightarrow f)$.

Demostración.- Sea L la clase de las fórmulas f tales que $K \vdash (p \rightarrow f)$. L es cerrada y contiene a las fórmulas de $K+p$. Luego $(K+p)' \subset L$, como se quería demostrar.

<u>Teorema 2</u>. Si $(U+P)'$ no comprende a todas las fórmulas de X, entonces P es verificable.

Este toerema se debe al Prof. Henkin. La demostración publicada por él [2] puede adaptarse convenientemente al caso del sistema X.

<u>Teorema 3</u>. Si la proposición q toma el valor V en toda valuación que verifique a la clase P, entonces $(U+P) \vdash q$.

Demostración.- La clase $P+\bar{q}$ es no verificable, por la hipótesis. Por el teorema 2, $(U+P+\bar{q})'$ contiene a todas las fórmulas de X. En particular, $(U+P+\bar{q}) \vdash q$. Por el toerema 1, $(U+P) \vdash (\bar{q} \rightarrow q)$; luego $(U+P) \vdash q$.

<u>Teorema 4</u>. Si q toma el valor V en toda valuación-(I)

que verifique a P, entonces $(U+I+P)\vdash q$.

Demostración.- Sea J la clase de las cerraduras de fórmulas de I. Toda valuación que verifica a $J+P$ es una valuación-(I) que verifica a P. Luego, por la hipótesis del teorema, q toma el valor V en toda valuación que verifique a $J+P$. Por el teorema 3, $(U+J+P)\vdash q$. Finalmente, como $J\subset I'$, se tiene $(U+I+P)\vdash q$.

Nota.- Una cerradura de la fórmula f se obtiene anteponiéndole a f, por cada variable α libre en f, el cuantificador (α). Las cerraduras de fórmulas son proposiciones.

REFERENCIAS.

[1] D. Hilbert y P. Bernays.- Grundlagen der Mathematik 1. (Berlín, 1934)

[2] Leon Henkin.- The completeness of the first-order functional calculus. The Journal of Symbolic Logic, Vol.14 (1949).

Instituto de Matemáticas
de la U.N.A.M.