ALGUNOS TEOREMAS EN LA TEORIA DE LA CUANTIFICACION ELEMENTAL.

por Gonzalo Zubieta Russi. *

I. - SISTEMAS DE CUANTIFICACION ELEMENTAL.

Este trabajo contiene una serie de teoremas relativos a cálculos funcionales de primer orden. Varios de estos teoremas se encuentran en forma implícita en el interesante artículo de Leon Henkin. [1].

De una manera sistemática se hace uso de las nociones más familiares de la teoría de los conjuntos. Usaré los símbolos '$+$', '$\cdot$', '$\subset$' y '$\in$' para las operaciones de unión e intersección y las relaciones de inclusión y pertenencia, respectivamente.

Un sistema logístico de cuantificación elemental, o cálculo funcional de primer orden, puede construirse con los símbolos lógicos

$$, \quad (\quad) \quad /$$

* Congreso Científico Mexicano, septiembre de 1951.
Becario del Instituto Nacional de la Investigación Científica.

y los símbolos propios del sistema. Estos últimos se clasifican en -- símbolos individuales y símbolos funcionales.

Símbolos individuales. Están formados por las variables y - las constantes individuales del sistema.

Símbolos funcionales. Para cada número natural n ($n = 0, 1, 2, \ldots$) el sistema contiene una clase (que puede ser vacía) de- símbolos funcionales de grado n.

Como se acaba de indicar, no es necesario que haya símbolos funcionales de todos los grados; tampoco es necesario que haya cons-- tantes individuales en el sistema. Pero se exige que, en un sistema - dado, tanto las variables individuales como los símbolos funcionales - en su totalidad formen clases no vacías.

2.- FORMULAS.

Son fórmulas elementales de un cálculo funcional de primer -- orden, los símbolos funcionales de grado 0 del sistema y las expre siones $\Gamma(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, en que Γ es cualquier símbolo funcional- de grado n del sistema y $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ son símbolos individuales- cualesquiera del sistema.

Las fórmulas de un sistema son las fórmulas elementales de - dicho sistema y las expresiones que provienen de ellas al aplicar un -- número finito de veces los siguientes criterios de composición.

1.- Si f y g son fórmulas entonces (f/g) es una ---

fórmula.

2.- Si f es una fórmula y α una variable individual cualquiera, entonces $(\alpha)f$ es fórmula.

La fórmula (f/g) es la no-conjunción de las fórmulas f y g y la designaremos brevemente con el símbolo '$\overline{fg}$'. Una lectura conveniente para esta expresión es "no f ó no g".

La fórmula $(\alpha)f$ es la cuantificación universal de la fórmula f en la variable individual α y se lee "para toda α, f".

Una presencia dada de la variable individual α en la fórmula f está ligada en f, si está en una cuantificación en α que forme parte de f. Una presencia de símbolo individual es libre en una fórmula si no está ligada en ella. En particular, toda presencia de constante individual es libre.

En adelante, X, Y, Z,... serán sistemas de cuantificación elemental, arbitrarios; α, β, γ, ... variables individuales cualesquiera; u, v, w,... constantes individuales; f, g, h,... fórmulas; K, L, M,... clases arbitrarias de fórmulas de un sistema dado; $f\frac{\beta}{\alpha}$, la fórmula g que se obtiene al substituir por el símbolo individual β todas las presencias libres de α en f, siempre que las presencias resultantes de β sean libres en g.

Una proposición es una fórmula en la que no figuran presencias libres de variables individuales.

Usaremos las letras 'p', 'q', 'r', ... para referirnos a proposiciones cualesquiera y 'P', 'Q', 'R', ... para referirnos exclusivamente a clases de proposiciones.

La negación $\bar{f}$, la implicación $f \rightarrow g$ y la cuantificación existencial $(E\alpha)f$ se definen de la manera siguiente:

$$\bar{f} \quad \text{Def.} \quad ff$$

$$f \rightarrow g \quad \text{Def.} \quad f\bar{g}$$

$$(E\alpha)f \quad \text{Def.} \quad \overline{(\alpha)\bar{f}}$$

3.- VALUACION DE UN SISTEMA.

Cuando hablamos de una extensión del sistema X nos referimos a un sistema Y cuyos símbolos se obtienen de los de X agregando nuevas constantes individuales. Si X contiene por lo menos una constante individual, se conviene en considerar a X entre sus propias extensiones. De manera que toda extensión de un sistema contiene al menos una constante individual.

Sea X un sistema que contiene al menos una constante individual. Una <u>valuación</u> del sistema X se obtiene asignando a cada proposición de X un valor de verdad (V ó F) conforme a las condiciones siguientes:

1.-Si p y q toman ambas el valor V entonces la no-conjunción pq toma el valor F, y recíprocamente.

2.- $(\alpha)f$ toma el valor V si, y sólo si, $f\frac{u}{\alpha}$ toma el valor V para toda constante u de X.

Se demuestra fácilmente que una valuación de X puede definirse asignando, en forma arbitraria, valores de verdad a las proposiciones elementales de X y extendiendo luego la asignación a las otras proposiciones de acuerdo con las condiciones 1 y 2 anteriores.

La clase de todas las proposiciones de X que toman el valor V en una valuación dada de X, recibirá el nombre de clase completa en X. (se trata de una adaptación del concepto de "clase de verdad" introducido por Quine [2].).

Una clase completa en X puede también definirse como una clase P de proposiciones de X, tal que:

1.- Si $p, q \in P$ entonces $pq \notin P$, y recíprocamente.

2.- $(\alpha)f \in P$ si, y sólo si, $f\frac{u}{\alpha} \in P$ para toda constante u de X.

Se dice que una valuación de X verifica a una clase arbitraria P de proposiciones de X, si toda proposición de P toma el valor V en dicha valuación.

Sea P una clase de proposiciones de X. Decimos que P es verificable si existe una extensión Y de X y una valuación de Y que verifica a P. En otros términos, P es verificable si existe una extensión Y de X y una clase Q, completa en Y, tal que $P \subset Q$.

4. - CLASES CERRADAS. FORMALIZACION.

Las deducciones formales en un sistema se harán siguiendo las reglas de inferencia R1 y R2.

R1. De f y $f \to g$ inferir g.

R2. De $f \to g$ inferir $f \to (\alpha)g$ cuando f no contenga presencias libres de α.

Sea K una clase de fórmulas del sistema X y f una fórmula cualquiera del mismo sistema. Decimos que f es <u>demostrable</u> a partir de K si existen fórmulas $f_1, f_2, \ldots, f_n, f$ de las que algunas son extraídas directamente de K y las otras se deducen de una o dos anteriores mediante una de las reglas R1 y R2. La sucesión $f_1, f_2, \ldots, f_n, f$ constituye una <u>demostración</u> de f a partir de K.

Usaremos el símbolo 'K'' para hablar de la clase formada de todas las fórmulas demostrables a partir de K.

Una clase de fórmulas K es <u>cerrada</u> si con cada par de fórmulas f y $f \to g$ contiene a g, y con cada fórmula $f \to g$ contiene a $f \to (\alpha)g$, siempre que α no figure libremente en f.

Es fácil comprobar que la clase K', de las fórmulas demostrables a partir de K, está caracterizada por las propiedades siguientes:

D1. K' es cerrada y $K \subset K'$.

D2. Para toda clase de fórmulas L, si L es cerrada-y $K \subset L$ entonces $K' \subset L$.

Luego K' *es la clase cerrada mínima que contiene a* K.

Los teoremas de esta sección y de las siguientes serán numerados con cifras romanas.

I. Si K es cerrada entonces $K = K'$.

II. $K' = K''$.

III. Si $K \subset L$ entonces $K' \subset L'$.

IV. Si $K_0 \subset K_1 \subset K_2 \subset \ldots$ y $L = K_0 + K_1 + K_2 + \ldots$ entonces toda fórmula f de L' está en alguna K_i'.

Los teoremas I, II, III, son consecuencias inmediatas de D1 y D2.

Demostración de IV. - Sea M la clase de las fórmulas f tales que f está en alguna K_i'. M es cerrada y $L \subset M$, luego $L' \subset M$, que es la afirmación de IV.

Los *axiomas* del sistema X son las tautologías de X (fórmulas de X cuya validez se comprueba con las tablas de verdad) y las fórmulas de X de la forma $(\alpha) f \rightarrow f \frac{\beta}{\alpha}$ siendo β un símbolo individual, constante o variable.

ESQUEMAS DE TAUTOLOGIAS

(1) $f \rightarrow f$

(2) $f \rightarrow (g \rightarrow f)$

(3) $f \rightarrow (g \rightarrow h) \rightarrow (f \rightarrow g) \rightarrow (f \rightarrow h)$

(6) $f \rightarrow (\bar{f} \rightarrow g)$

(7) $(f \rightarrow \bar{f}) \rightarrow \bar{f}$

(8) $f \rightarrow \bar{\bar{f}}$

(4) $f \rightarrow (g \rightarrow h) \rightarrow . \overline{fg} \rightarrow h$ (9) $f \rightarrow . g \rightarrow \overline{fg}$

(5) $\overline{fg} \rightarrow h \rightarrow . f \rightarrow (g \rightarrow h)$ (10) $\overline{fg} \rightarrow f$; $fg \rightarrow g$

Sea U la clase de los axiomas de X y K una clase de fórmulas de X.

V. Si $f \in (K+U)'$ entonces $(\alpha)f \in (K+U)'$.

Demostración. - Por (2) y R1, $(p \rightarrow p) \rightarrow f \in (K+U)'$. Aplicando R2 y R1 con (1) obtenemos $(\alpha)f \in (K+U)'$.

Sea p una proposición de X.

VI. Si $f \in (K+U+p)'$ entonces $p \rightarrow f \in (K+U)'$.

Demostración. - Sea L la clase de las fórmulas f tales que $p \rightarrow f \in (K+U)'$. L es cerrada y $K+U+p \subset L$, luego $(K+U+p)' \subset L$.

En los teoremas VII y VIII siguientes, se supone que el sistema X contiene una infinidad de variables individuales; además el símbolo 'X' se usa también para designar la clase de las fórmulas de X.

VII. Si K es una clase de fórmulas de X, Y una extensión de X y W la clase de los axiomas de Y, entonces

$$(K+U)' = (K+W)' \cdot X .$$

Demostración. - La inclusión en un sentido es inmediata. Para demostrar que $(K+W)' \cdot X \subset (K+U)'$, consideremos una fórmula f de $(K+W)' \cdot X$ y una demostración $f_1, \ldots, f_n, f$ a partir de $K+W$. Si cada una de las constantes que figuran en las fórmulas ----

$f_1, \ldots, f_n, f$ y que no pertenecen a X la substituimos por una variable que no figure en la demostración, de manera que constantes diferentes sean reemplazadas por variables diferentes, obtenemos una demostración de f a partir de $K+U$.

VIII. Si $f\frac{u}{\alpha} \in (K+U)'$ y u no figura en las fórmulas de $K+f$, entonces $f \in (K+U)'$

Demostración. - Sea $f_1, f_2, \ldots, f_n, f\frac{u}{\alpha}$ una demostración a partir de $K+U$ y β una variable que no figura en ella. Si substituimos por β cada presencia de u obtenemos una demostración de $f\frac{\beta}{\alpha}$ a partir de $K+U$ $\therefore$ $f\frac{\beta}{\alpha} \in (K+U)'$. Por V, $(\beta) f\frac{\beta}{\alpha} \in (K+U)'$, luego $f \in (K+U)'$.

5. - CLASES CONSISTENTES.

Una clase K de fórmulas de X se llama inconsistente en X si $(K+U)'$ contiene una formula f de X y su negación $\overline{f}$. Mediante la tautología (6), se demuestra que la inconsistencia de K en X equivale a la relación $(K+U)' = X$. Las clases que no son inconsistentes se llaman consistentes.

IX. Si $P \subset X$ y P es verificable entonces P es consistente en X.

Demostración. - Consideremos una extensión Y de X y una valuación de Y que verifique a P. Puede verse fácilmente que toda proposición de $(P+U)'$ toma el valor V en esta valuación. Luego $(P+U)'$ no contiene a las proposiciones de X que toman el valor $F: (P+U)' \neq X$,

X. Si $K \subset L$ y L es consistente en X, entonces K es consistente en X.

Demostración. - $(K+U)' \subset (L+U)'$ y puesto que esta última clase, por hipótesis no comprende a todas las fórmulas de X, se sigue la consistencia de K.

XI. Si $K_0 \subset K_1 \subset K_2 \subset \ldots$ son consistentes en X y $L = K_0 + K_1 + K_2 + \ldots$ entonces L es consistente en X.

Demostración. - En primer lugar $L + U = (K_0 + U) + (K_1 + U) + (K_2 + U) + \ldots$. Si $(L+U)'$ contuviese una fórmula f y su negación $\bar{f}$, estas figurarían, en vista de III y IV, en alguna $(K_i + U)'$, contra la hipótesis de que K_i es consistente.

Los teoremas XII y XIII siguientes son válidos en el supuesto de que el sistema X contiene una infinidad de variables individuales.

XII. Si K es consistente en X, y Y es una extensión de X, entonces K es consistente en Y.

Demostración. - Si K fuera inconsistente en Y se tendría $(K+W)' = Y$ y, por VII, $(K+U)' = X$, contra la hipótesis.

XIII. Si P es consistente en X, $(E\alpha)f \in P$ y u no figura en las proposiciones de P, entonces $P + f\frac{u}{\alpha}$ es consistente en X.

Demostración. - Si $P + f\frac{u}{\alpha}$ no es consistente en X, en--

tonces $(P + U + f\frac{u}{\alpha})'$ comprende a todas las fórmulas de X, en particular $\overline{f}\frac{u}{\alpha} \in (P + U + f\frac{u}{\alpha})'$. Por VI, $f\frac{u}{\alpha} \rightarrow \overline{f}\frac{u}{\alpha} \in (P + U)'$. Por (7) y R1, $\overline{f}\frac{u}{\alpha} \in (P + U)'$. Por VIII, $\overline{f} \in (P + U)'$ y, por V, $(\alpha)\overline{f} \in (P + U)'$. Finalmente, por (8) y la definición de $(E\alpha)f$, tenemos $\overline{(E\alpha)f} \in (P + U)'$, contrario a la hipótesis de que P es consistente en X.

6.- CLASES CONSISTENTES MAXIMAS.

Una clase P de proposiciones de X se llama <u>consistente máxima</u> en X si P es consistente en X y, para cualquier proposición q de X que no esté en P, P+q resulta inconsistente en X.

XIV. P es completa en X si, y sólo si, (1) P es consistente máxima en X y (2) P contiene, con cada proposición de la forma $(E\alpha)f$, una proposición de la forma $f\frac{u}{\alpha}$ siendo u una constante de X.

Demostración.- Si P es completa en X entonces P es consistente en X, por ser verificable, y es máxima, ya que si q no está en P su negación $\overline{q}$ está en P y de aquí que P+q sea inconsistente. Además se cumple la cláusula (2) de XIV. Por otra parte, si P es consistente máxima y $q \in (P + U)'$ entonces $q \in P$, de aquí que P sea cerrada respecto a R1 y que contenga a los axiomas de X que sean proposiciones. Utilizando las-tautologías (9) y (10) se demuestra que P cumple con la condición 1. de la sección 3. También se demuestra que si $(\alpha)f \in P$ entonces toda $f\frac{u}{\alpha}$, con u en X, está en P. La recíproca de esta última afirmación se obtiene como consecuencia de la cláusula (2) de XIV.

En la demostración del siguiente teorema (XV) se supone que las fórmulas del sistema X se pueden numerar Para ello basta que la totalidad de símbolos de X sea numerable.

XV. Si P es consistente en X, existe Q, consistente-máxima en X, tal que $P \subset Q$.

<u>Demostración</u>.- Dada una numeración de las fórmulas de X, podemos construir Q de la manera siguiente. Sea p_1 la primera proposición que aparece en la lista; hacemos $Q_1 = P + p_1$ ó $Q_1 = P + p_1$, según que $P + p_1$ sea consistente o no. De cualquier manera Q_1 resulta consistente. Análogamente, con Q_1 y la segunda proposición p_2 de la lista construimos $Q_2 = Q_1 + p_2$ ó $Q_1 + \bar{p}_2$ según que $Q_1 + p_2$ sea consistente o no. Prosiguiendo de esta manera, obtenemos una sucesión $P \subset Q_1 \subset Q_2 \subset \ldots$ de clases consistentes de proposiciones. Sea $Q = P + Q_1 + Q_2 + \ldots$. Q es consistente por XI. Además si una proposición p no figura en Q, su negación debe estar en Q y de aquí que $Q + p$ resulte inconsistente, con lo cual queda demostrado el carácter máximo de Q.

En la demostración de XVI supondremos que la totalidad de fórmulas de X es numerable y que X contiene una infinidad de variables individuales.

XVI. Si P es consistente en X entonces P es verificable.

<u>Demostración</u>. - Construiremos una extensión Y de X y una clase Q, completa en Y, tal que $P \subset Q$. El sistema Y se obtiene agregando a X nuevas constantes individuales u_{ij} $(i, j = 1, 2, 3, \ldots)$ que no figuren en X. Además llamamos X_0 al sistema X, X_1 al que se obtiene de X agregando las constantes u_{1j} $(j = 1, 2, \ldots)$; en general, X_i se obtiene de X_{i-1} agregando las constantes u_{ij} $(j = 1, 2, \ldots)$. Partiendo de una numeración de las fórmulas de Y, construimos según el procedimiento de XV una clase P_0 consistente máxima en X tal que $P \subset P_0$. A esta clase P_0, que también es consistente en X_1, le agregamos con la j-ésima proposición de la forma $(E\alpha)f$, la proposición $f\frac{u_{1j}}{\alpha}$. La clase resultante es consistente, en vista de XIII. A partir de ella obtenemos una clase P_1, consistente máxima en X_1. Prosiguiendo así obtenemos clases $P_0 \subset P_1 \subset P_2 \subset \ldots$ tales que P_i es consistente máxima en X_i y contiene, con cada fórmula de P_{i-1} de la forma $(E\alpha)f$, una fórmula de la forma $f\frac{u}{\alpha}$ siendo u una constante de Y. La clase $Q = P_0 + P_1 + \ldots$ es consistente máxima en Y y contiene, con cada proposición de la forma $(E\alpha)f$ una proposición de la forma $f\frac{u}{\alpha}$, siendo u constante de Y. Por XIV,

Q es completa en Y.

Finalmente, enunciamos un teorema que comprende como caso particular al teorema de Gödel sobre la suficiencia del sistema de axiomas y reglas de inferencia para el cálculo funcional de primer orden.

XVII. Si q toma el valor V en toda valuación (de las extensiones de X) que verifique a P entonces $q \in (P+U)'$.

Demostración. - La clase $P+\overline{q}$ no es verificable y, por XVI, $P+\overline{q}$ es inconsistente, luego $q \in (P+\overline{q}+U)'$. $\overline{q} \rightarrow q \in (P+U)'$ y, finalmente, $q \in (P+U)'$.

Instituto De Matemáticas De La U. N. A. M.

BIBLIOGRAFIA

[1] Leon Henkin, The completeness of the first-order funcional calculus. The Journal of Symbolic Logic, Vol. 14, No. 3, sept. 1949.

[2] W. V. Quine, Mathematical Logic, § 10. Cambridge, Harvard University Press, 1947.