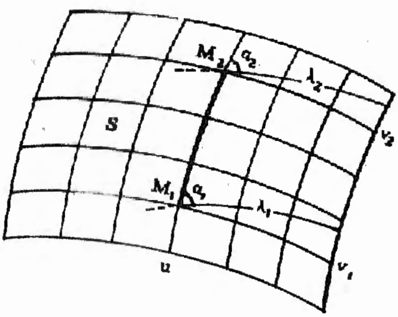
ALGUNOS TEOREMAS RELACIONADOS CON LA VARIACION DE LA LONGITUD DE UNA CURVA VARIABLE QUE SE DESLIZA SOBRE UNA SUPERFICIE CURVA

Por Alfonso Nápoles Gándara

1. Se considera una curva variable que se desliza sobre una superficie curva y se obtiene una relación general que liga el cambio de la longitud de la curva con la curvatura geodésica de la misma.

Se supone, desde luego, que tanto la superficie como las curvas y las funciones que se consideran satisfacen las condiciones de regularidad usuales en la geometria diferencial clásica



Sea $C = M_1 M_2$ la curva variable contenida en la superficie (S), y sean λ_1 y λ_2 las trayectorias respectivas de los extremos M_1, M_2 de la misma curva.

Supóngase que los arcos M_1M_2 no se corten entre sí, por lo menos en la inmediata vecindad de la posición particular que se considere del arco variable M_1M_2.

Las posiciones sucesivas del arco M_1M_2 sobre la superficie (S) definen una familia de curvas. A éstas las tomo como curvas paramétricas u = constante, y a sus trayectorias ortogonales las tomo como curvas paramétricas v = constante.

Con estos parámetros (u, v) el elemento lineal en (S) y la curvatura geodésica de M_1M_2 quedan expresados respectivamente por

$$ds^2 = E(u, v)\, du^2 + G(u, v)\, dv^2$$

$$k_g = \frac{1}{\sqrt{EG}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u}$$

2. RESULTADOS. Designando con (u, v_1) y (u, v_2) las coordenadas de M_1 y M_2 respectivamente, se tiene

<u>Teorema 1</u>. <u>Caso general</u>.

$$\frac{dC}{du} = \int_{\substack{v_1 \\ M_1M_2}}^{v_2} \frac{k_g}{|\nabla u|}\, ds + \left[\frac{\cot \alpha}{|\nabla u|}\right]_{v_1}^{v_2} \qquad (1.1)$$

En donde C es la longitud de la curva deslizante M_1M_2, y α_1, α_2 el ángulo de esta misma curva con las trayectorias λ_1 y λ_2 en los puntos M_1 y M_2 respectivamente. El último término expresa el incremento, de v_1 a v_2, de la función indicada.

Caso particular.

Si en la vecindad de una cierta posición particular de M_1M_2, las otras posiciones de la misma curva deslizante son paralelas geodésicas de M_1M_2, resulta $(E = 1 \quad |\nabla u| = 1)$

$$\frac{dC}{du} = \int_{M_1M_2} k_g \, ds + \Big[\cot \alpha\Big]_{v_1}^{v_2} \tag{1.2}$$

Teorema 2.

Si las curvas M_1M_2 son curvas cerradas lisas (M), esto es, sin puntos angulosos, se tiene

$$\frac{dC}{du} = \oint_{(M)} \frac{k_g}{|\nabla u|} \, ds \tag{2.1}$$

Caso particular.

Si las curvas M_1M_2 son curvas cerradas lisas (M), y si, además, en la vecindad de un cierto contorno M_0 las otras curvas M son paralelas geodésicas de M_0, entonces, para este contorno M_0 se tiene

$$\frac{dC}{du} = \oint_{(M_0)} k_g \, ds \tag{2.2}$$

3. JUSTIFICACION DEL TEOREMA 1. Que

$$v_1 = v_1(u) \quad y \quad v_2 = v_2(u)$$

sean las ecuaciones en (S) de las trayectorias λ_1 y λ_2 respectivamente, y que

$$\alpha_1(u, v_1) \quad y \quad \alpha_2(u, v_2)$$

sean los ángulos del arco M_1M_2 con las mismas trayectorias en los puntos M_1 y

M_2 respectivamente.

Para un deslizamiento elemental du del arco M_1M_2 sobre (S), se tiene:

$$\cot \alpha_1 = \frac{\sqrt{G(u, v_1)}}{\sqrt{E(u, v_1)}} \frac{dv_1}{du} \quad y \quad \cot \alpha_2 = \frac{\sqrt{G(u, v_2)}}{\sqrt{E(u, v_2)}} \frac{dv_2}{du}$$

Ahora bien, la longitud C del arco M_1M_2 es:

$$C = \int_{v_1(u)}^{v_2(u)} \sqrt{G}\, dv$$

$$\therefore \quad \frac{dC}{du} = \int_{(C)\, v_1(u)}^{v_2(u)} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} dv + \sqrt{G(u, v_2)} \frac{dv_2}{du} - \sqrt{G(u, v_1)} \frac{dv_1}{du}$$

y, teniendo en cuenta la expresión de la curvatura geodésica, resulta

$$\frac{dC}{du} = \int_{M_1M_2} \sqrt{E}\, k_g\, ds + \left[\sqrt{E} \cot \alpha\right]_{v_1}^{v_2}$$

o sea

$$\frac{dC}{du} = \int_{M_1M_2} \frac{k_g\, ds}{|\nabla u|} + \left[\frac{\cot \alpha}{|\nabla u|}\right]_{v_1}^{v_2}$$

Queda pues justificado el teorema general.

El teorema 2 se justifica fácilmente aplicando 1.1 y teniendo en cuenta que $v_2 = v_1$.

Instituto de Matemáticas de la U.N.A.
Congreso Científico Mexicano, septiembre de 1951.