Vol.X, 1,2 BOLETIN DE LA SOCIEDAD MATEMATICA MEXICANA 1953

LA ITERACION DE LOS CUADRADOS DE STEENROD EN LA TOPOLOGIA ALGEBRAICA*

Por José Adem.

En este trabajo se demuestra que los cuadrados de Steenrod sobre las clases de cohomología satisfacen ciertas identidades. Estas identidades se aplican para resolver algunos problemas particulares de homotopía. Los detalles completos aparecerán en alguna otra parte.

1. Sea $H^q(K)$ el q-ésimo grupo de cohomología de un complejo K, con los enteros mód 2 como grupo de coeficientes. Los cuadrados de Steenrod[1] denotados por Sq^i $(i = 0, 1, \ldots)$,

---

*Traducción del trabajo publicado por nuestro consocio, bajo el título "The iteration of the Steenrod squares in algebraic topology", en la Revista Estadounidense Proceedings of the National Academy of Sciences, Vol. 38, No.8, pags.720-726, Agosto de 1952

[1] Véase Steenrod, N.E., Ann.Math., Vol. 48 (1947), pags.290-320. Véase también la referencia (11), pag. 977.

son homomorfismos invariantes

$$Sq^i : H^q(K) \to H^{q+i}(K) \quad ,$$

definidos para cualquier complejo K y que satisfacen, entre varias otras, las siguientes propiedades: para cualquier mapeo f de un complejo en otro, se tiene $f^* Sq^i = Sq^i f^*$; Sq^0 = identidad; $Sq^q u = u \smile u$, (mód 2) si $q = \dim u$.

Un cuadrado *iterado* es una composición de dos o más de tales cuadrados, por ejemplo $Sq^i\, Sq^j\, Sq^k$. Las relaciones (mód 2) siguientes para los cuadrados iterados son bien conocidas

$$Sq^1\, Sq^k = \begin{cases} Sq^{k+1} & \text{si } k \text{ es par,} \\ 0 & \text{si } k \text{ es impar.} \end{cases}$$

Un resultado principal de este artículo es un sistema de relaciones adicionales como sigue

TEOREMA 1.1 *Para toda* $s > t$, *los cuadrados satisfacen las relaciones* mód 2

$$Sq^{2t}\, Sq^s = \sum_{j=0}^{t} \binom{s-t+j-1}{2j} Sq^{t+s+j}\, Sq^{t-j} \quad ,$$

donde $\binom{k}{j}$ *es el valor,* mód 2 *del coeficiente binomial, con la convención* $\binom{k}{j} = 0$ *si* $j > k$.

De tales relaciones obtenemos

$$(1.2) \qquad Sq^{2^n(2r+1)} = Sq^{2^n} Sq^{2^{n+1} r} + \sum_{p=0}^{n-1} Sq^{2^n(2r+1)-2^p}\, Sq^{2^p} \quad .$$

Como casos especiales de 1.2 tenemos

$$(1.3)\qquad Sq^{2^n}Sq^{2^m} = Sq^{2^m+2^n} + \sum_{p=0}^{n-1} Sq^{2^m+2^n-2^p}\, Sq^{2^p} \quad (m>n)\ ,$$

$$(1.4)\qquad Sq^{2^n}Sq^{2^n} = \sum_{p=0}^{n-1} Sq^{2^{n+1}-2^p}Sq^{2^p}$$

Una consecuencia directa de 1.2 es el

TEOREMA 1.5 *Los cuadrados del tipo* Sq^{2^p} *en los que* $p = 0, 1, \ldots$ *forman una base para las operaciones de efectuar cuadrados. Con precision, las relaciones 1.2 pueden usarse para escribir cualquier cuadrado como una suma de cuadrados iterados, con exponentes* 2^p*, ejemplo:* $Sq^6 = Sq^2Sq^4+Sq^1Sq^4Sq^1$.

OBSERVACION. Usando un punto de vista distinto, mediante los complejos de Eilenberg-Mac Lane, Serre[2] ha demostrado que los cuadrados iterados del tipo $Sq^{i_1}Sq^{i_2}\ldots Sq^{i_k}$, en los que $i_1 \geq 2i_2, \ldots\ i_{k-1} \geq 2i_k$, constituyen una base para los cuadrados iterados. Puede darse una nueva demostración de este hecho usando las relaciones 1.1. Esta tiene la ventaja de que se obtienen fórmulas explícitas para expresar un cuadrado iterado arbitrario, en términos de esta base.

2. Sea u una clase de cohomología de un complejo K, con coeficientes en un grupo G. Podemos escribir usando 1.2, la siguiente expresión para el autoproducto de u.

Si $q = \dim u = 2^n(2r+1)$, $r > 0$, entonces

$$(2.1)\qquad u \smile u = Sq^{2^n}Sq^{q-2^n}u + \sum_{p=0}^{n-1} Sq^{q-2^p}Sq^{2^p}u\ , \quad (\text{mód } 2)$$

[2] Véase Serre, J.P., C.R.Acad. Paris, Vol. 243 (1952), pags. 1243-1245.

Si $q+1 = \dim u = 2^n(2r+1)+1$, $r>0$, $n>0$, entonces

$$(2.2) \qquad u \smile u = \delta^* \left[Sq^{2^n} Sq^{q-2^n} u + \sum_{p=0}^{n-1} Sq^{q-2^p} Sq^{2^p} u\right] ,$$

en donde δ^* es el homomorfismo cofrontera de la sucesión de coeficientes $0 \to G \to G \to G/2G \to 0$[3]. En el segundo caso suponemos que no existen elementos en G de orden 2.

Estas fórmulas imponen restricciones fuertes sobre los autoproductos en el anillo de cohomología de un complejo. Por ejemplo 2.2 implica: *No puede existir un complejo* K *con una clase -7 entera* u, *tal que* $u \smile u \neq 0$ *y* $H^{11}(K; \text{mód } 2) = 0$.

3. Llamaremos a una variedad M, de dimensión par, *del tipo* a, cuando sea conexa, orientable y su número medio de Betti sea 1. Esto es $\dim M = 2k$ y $R_0 = R_k = R_{2k} = 1$. Como es bien sabido no puede existir una variedad que sea de tipo a y de dimensión $2(p+1)$. Esto es una consecuencia directa de la dualidad de Poincaré y de la anticonmutatividad del producto $\smile$. Pueden darse las siguientes restricciones ulteriores sobre la estructura homológica de las variedades, usando la dualidad de Poincaré y la fórmula 2.1.

TEOREMA 3.1 *Sea* $\dim M = 2k = 2^{n+1}(2r+1)$, $r > 0$. *Entonces no existe una variedad* M *del tipo* a *tal que* $H^{2^n}(M; \text{mód } 2) = 0$ *y* $H^{k-2^p}(M; \text{mód } 2) = 0$ *para* $p = 1,\dots,n-1$.

Una consecuencia directa de 3.1 es el siguiente

COROLARIO 3.2 *En caso de que exista una variedad sin torsión, de dimensión* $2k$ *y con* $1+x^k+x^{2k}$ *como polinomio de Poincaré, entonces* k *es una potencia de 2.*

---

[3] Véase Steenrod, N.E., Topology of Fibre Bundles, Princeton Univ. Press. 1951, pags. 191-193.

OBSERVACION: El Teorema 3.1 resuelve parcialmente un problema, considerado por Hirsch[4] y por Bassi[5] sobre la existencia de una variedad de dimensión 12, con $1 + x^6 + x^{12}$ como polinomio de Poincaré. Se sigue de 3.1 que tal variedad M no existe con $H^2(M; \text{mód } 2) = 0$.

4. Dado un mapeo $f: S^{p+q-1} \to S^q$ (de una esfera-$(p+q-1)$ en una esfera-q), sea K el complejo que se obtiene adjuntando a S^q mediante f, una célula-$(p+q)$. Si $Sq^p: H^q(K) \to H^{p+q}(K)$ es distinto de cero, este mapeo es esencial. Ya que los grupos de cohomología intermedios de K son nulos, se sigue de 1.5 que Sq^p será cero si p no es potencia de dos.

Hopf[6] ha construído mapeos esenciales $f: S^{2n-1} \to S^n$ para toda n par. Asignó a cualquier mapeo tal un entero llamado el invariante de Hopf $H(f)$ (un invariante de la clase de homotopía que es cero para mapeos no esenciales). Exhibió mapeos f para cada par n y para cualquier $H(f)$ par. Para $n = 1,2,4,8$, demostró que cualquier entero podía ser una $H(f)$. Recientemente G.Whitehead[7] probó que $H(f)$ es par para cualquier f cuando $n = 4k+2$ $(k \geqslant 1)$. En el problema de decidir para cuáles n existe un mapeo con invariante de Hopf 1, excluiremos muchos valores de n con el argumento que sigue. El valor, mód 2 de $H(f)$ es 0 ó 1 según que $Sq^n: H^n(K) \to H^{2n}(K)$ sea 0 o no lo sea. El resultado del precedente párrafo demuestra así el

---

(4) Véase Hirsch, G. Colloque International de Topologie Algébrique, Paris, 1949, pags. 35-42.

(5) Véase Bassi, A., Mem. della Cl. di Scienza, R. Accad. d'Italia, Vol.6 (1935), pags. 669-714.

(6) Hopf, H. Math.Ann., Vol.104 (1931), pags. 637-665 y Fund. Math. Vol. 25 (1935), pags. 427-440.

(7) Whitehead, G.W. Ann.Math., Vol.51 (1950), pags. 192-237.

TEOREMA 4.1 *El invariante de Hopf* $H(f)$ *de un mapeo* $f: S^{2n-1} \to S^n$ *debe ser par si* n *no es una potencia de 2.*

Sigue en pié el problema de decidir si para cada potencia de 2 existe un mapeo con 1 como invariante de Hopf.

Es bien conocido que (4.1) tiene varias implicaciones; sólo mencionaremos las siguientes.

COROLARIO 4.2 *Una representación de* S^m *como manojo esferoidal (sphere bundle) sobre* S^n *es posible solamente si* $m = 2n-1$ *y* n *es potencia de 2.*

Este corolario vale para un grupo arbitrario del manojo. Para el grupo de rotaciones R_n como grupo del manojo, fué probado recientemente[8] por N.E.Steenrod y J.H.C.Whitehead.

COROLARIO 4.3 *Un mapeo* $f: S^n \times S^n \to S^n$ *del tipo* $(1,1)$ *puede existir solamente si* $n+1$ *es potencia de 2.*

Hopf[9] y Behrend[10] estudiaron el asunto de la existencia de álgebras reales con división (esto es, multiplicación bilineal con unidad bilateral y sin divisores de cero) en el espacio euclidiano-n. Mostraron que no existen cuando n no es potencia de 2. El resultado precedente nos permite demostrar este resultado eliminando la condición de bilinealidad.

5. Al extender el proceso de adjuntar células a esferas y mediante las fórmulas 1.3 y 1.4, demostramos el siguiente teorema general acerca de la composición de suspensiones de mapeos cuyo invariante de Hopf sea 1.

TEOREMA 5.1 *Sean* $f: S^{2m-1} \to S^m$ *y* $g: S^{2n-1} \to S^n$ dos

---

[8] Véase Steenrod, N.E. y Whitehead, J.H.C., Proc.Nat.Acad.Sc. U.S.A. Vol. 37 (1951) pags. 58-63.

[9] Hopf, H., Comm.Math.Helv. Vol. 13 (1941) pags. 219-239.

[10] Behrend, F. Compos. Math. Vol. 7 (1939), pags. 1-19.

mapeos cuyo invariante de Hopf valga 1. Supóngase $m \geqslant n$. *Sea* g' *la suspensión* $(2m-1-n)$*-ésima de* g. *Entonces la composición* fg' *siempre es esencial; además*

(1) si $m = n$, *la suspensión* p*-ésima de este mapeo compuesto, es esencial para toda* p.

(2) si $m > n$, *la suspensión* p*-ésima de este mapeo compuesto, es esencial para toda* $p < n$. *Todos los elementos esenciales construídos de este modo no son divisibles entre 2.*

Si en lo de arriba tomamos $f = g$ como el mapeo $S^3 \to S^2$ de invariante de Hopf 1, obtenemos una nueva prueba de que $\pi_{n+2}(S^n) \neq 0$ para $n \geqslant 2$. Análogamente si $f = g$ es el mapeo $S^7 \to S^4$ (o bien $S^{15} \to S^8$) de invariante de Hopf 1, encontramos que $\pi_{n+6}(S^n) \neq 0$ para $n \geqslant 4$ (respectivamente, que $\pi_{n+14}(S^n) \neq 0$ para $n \geqslant 8$).

6. Indicaremos como nuestras relaciones sobre cuadrados iterados pueden usarse para construir algunas operaciones cohomológicas de *segunda especie.* Sean respectivamente Z y Z_2 el grupo de los enteros y el de los enteros mód 2 y supóngase $Sq^2 : H^q(K;Z) \to H^{q+2}(K;Z_2)$ definido con el apareamiento natural. Defínase $N^q(K) \subset H^q(K;Z)$ como el nucleo de Sq^2. Construiremos una operación de segunda especie.

$$(6.1) \qquad \Phi : N^q(K) \to H^{q+3}(K;Z_2)/Sq^2H^{q+1}(K,Z) \quad .$$

Primero considérese $u \in H^q(K;Z)$ con $q \geqslant 2$ y sea u_1 un representante de u. Con $n = 1$ en 1.4 tenemos la relación $Sq^2Sq^2u + Sq^3Sq^1u = 0$. La demostración de nuestras relaciones sobre cuadrados iterados se hace mediante una construcción de cocadenas. Para esta relación particular construimos mapeos de cocadena

$$E_j: \qquad C^p(K^4) \to C^{p-j}(K),$$

donde $K^4 = K \times K \times K \times K$, de modo que mód 2

$$(u_i \smile_i u_i) \smile_{i+2} (u_i \smile_i u_i) + (u_i \smile_{i+1} u_i) \smile_i (u_i \smile_{i+1} u_i) = \delta E_{3i+3}\,(u_i^4)$$

donde $\smile_k$ es el k-producto cup[1] y además $i=q-2$. Si u es una clase con coeficientes enteros, entonces $Sq^1u=0$ y por consiguiente $Sq^2Sq^2u=0$. En este caso una expresión cocadenal mód 2 para esta última relación se dá mediante

(6.2) $\quad (u_i \smile_i u_i) \smile_{i+2} (u_i \smile_i u_i) =$

$$\delta[E_{3i+3}(u_i^4) + \eta(u_i) \smile_{i-1} \eta(u_i) + \eta(u_i) \smile_i \delta\eta(u_i)],$$

en donde

$$\eta(u_i) = \tfrac{1}{2}[u_i \smile_{i+2} u_i + u_i].$$

Supóngase ahora que $Sq^2u=0$, esto es que $u \in N^q(K)$; entonces para alguna cocadena b tenemos $u_i \smile_i u_i = \delta b$ y se sigue mód 2 que

(6.3) $\quad (u_i \smile_i u_i) \smile_{i+2} (u_i \smile_i u_i) = \delta[b \smile_{i+1} b + b \smile_{i+2} \delta b].$

Tenemos entonces que en 6.2 y en 6.3 la misma expresión es una cofrontera por dos razones diferentes. Se sigue de un principio general, ya usado por Steenrod al definir operaciones -

funcionales, que ambas operaciones juntas dan lugar a una nueva operación cohomológica. Poniendo

$$\omega_1 = b \smile_{i+1} b + b \smile_{i+2} \delta b + E_{3i+3}(u_1^4) + \eta(u_1) \smile_{i-1} \eta(u_1) + \eta(u_1) \smile_i \delta\eta(u_1)$$

se sigue de 6.2 y 6.3 que ω_1 es un cociclo mód 2 y definimos nuestra operación de 6.1 por

$$\Phi u = \{\omega_1\} + Sq^2 H^{q+1}(K;\ Z).$$

puede probarse que la operación Φ esta bien definida y es independiente de toda la arbitrariedad que pueda ocurrir en nuestra construcción. Algunas de sus propiedades son: (1) $f^*\Phi = \Phi f^*$, para cualquier mapeo de un complejo en otro, es entonces una operación invariante; (2) la definición de Φ se extiende al caso relativo y allí conmuta Φ con el operador cofrontera; (3) Φ es un homomorfismo; (4) Φ es una operación efectivamente calculable. El hecho de que esta operación puede no ser trivial se muestra en lo que sigue.

De aquerdo con el modelo introducido por Steenrod(11) junto con la operación Φ y el mapeo f podemos definir la operación funcional Φ_f.

TEOREMA 6.4 *Sea* $f: S^{n+2} \to S^n$ *un mapeo de una esfera-*$(n+2)$ *en una esfera-*n*, con* $n \geq 2$*. La operación funcional*

$$\Phi_f: H^n(S^n; Z_2) \to H^{n+2}(S^{n+2}; Z_2),$$

no es trivial cuando y solamente cuando el mapeo f *es esencial.*

---

(11) Steenrod, N.E. Ann. Math. Vol 50 (1949) pags. 954-988

En el anterior teorema una expresión cocadena puede dar se para Φ_f y que suministre un método efectivo para decidir la clase de homotopía de un mapeo simplicial dado $f:S^{n+2} \to S^n$

Sea K el complejo celular construido adjuntando una célula E^{n+3} a S^n, mediante el mapeo $f:S^{n+2} \to S^n$. Se sigue de 6.4 que $\Phi:H^n(K;Z_2) \to H^{n+3}(K;Z_2)$, mapeará el generador de $H^n(K;Z_2)$ sobre el generador de $H^{n+3}(K;Z_2)$ si y solamente si el mapeo dado f es esencial.

La principal aplicación de la nueva operación es el cálculo de la *tercera obstrucción.*

TEOREMA 6.5 *Sea* $f:K^n \to S^n$ *un mapeo del esqueleto-n de un complejo* K *en una esfera-n. Sea* s^n *un generador de* $H^n(S^n)$. *Supongamos que la primera y segunda obstrucción para la extensión de este mapeo se anule, esto es,* $\delta f^* s^n = 0$ *y* $Sq^2 f^* s^n = 0$. *Entonces la tercera obstrucción se da mediante*

$$\Phi f^* s n \in H^{n+3}(K;\pi_{n+2}(S^n))/Sq^2 H^{n+1}(K;\pi_{n+1}(S^n)) \quad .$$

En este último teorema los apareamientos para los diferentes grupos de coeficientes son los naturales. Siguiendo el modelo general dado por Steenrod(1), los mapeos de un complejo-(n+2) en una esfera-n pueden clasificarse. En particular podemos calcular los grupos de cohomotopía $\pi^n(K^{n+2})$ salvo hasta grupo extensiones.

La construcción de nuestra operación Φ corresponde a la relación $Sq^2Sq^2 = Sq^3Sq^1$. Usando otras relaciones sobre cuadrados iterados podemos generalizar la operación Φ de un modo obvio. En especial, con las relaciones 1.3 y 1.4 pueden construir se nuevas operaciones y con ellas pueden calcularse los mapeos esenciales obtenidos en 5.1.

7. Indicaremos aqui el método usado demostrando nuestras relaciones sobre cuadrados iterados.

El procedimiento ideado por Steenrod[12] para la construcción de las operaciones cuadráticas es mediante homomorfismos de las cadenas de K en las de $K\times K$ que son vecinas a la diagonal. El usa el grupo cíclico de orden dos, que opera en $K\times K$ permutando los factores. Al tratar los cuadrados iterados debemos considerar homomorfismos semejantes de K a $K^4 = K \times K \times K \times K$.

Una ruda descripción de nuestro procedimiento es paralelizar la construcción de los cuadrados; reemplazando K^2 por K^4 y tomando como grupo que opera en K^4 un grupo de orden 4, contenido en el grupo dihédrico de orden ocho. Obtenemos en esta forma un nuevo conjunto de operaciones invariantes $\begin{bmatrix} i \\ k \end{bmatrix}$ doblemente indicadas, cada una de las cuales es un homomorfismo

$$\begin{bmatrix} i \\ k \end{bmatrix} : H^q(K) \to H^{4q-i}(K) .$$

Se muestra en seguida que $\begin{bmatrix} i \\ k \end{bmatrix}$ coincide con una suma de cuadrados iterados $\Sigma\, Sq^r Sq^s$. Ello se logra por un calculo explícito.

Para probar que $\begin{bmatrix} i \\ k \end{bmatrix}$ contiene una simetría, que se expresa mediante la relación $\begin{bmatrix} i \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i \\ i-k \end{bmatrix}$, se usa un automorfismo de todo el grupo dihédrico. Así para cada i,k obtenemos que una suma de cuadrados iterados es igual a la otra. Estas son las identidades básicas.

---

[12] Steenrod, N.E., Ann.Math. Vol. 56(1952) pags. 47-67.

NOTA. Las investigaciones resumidas en el presente trabajo fueron auspiciadas en varias ocasiones por las instituciones siguientes: Instituto de Matemáticas de la Universidad Nacional de México, el Instituto Nacional de la Investigación Científica, La Higgings Foundation, Universidad de Princeton y las Rockefeller y Guggenheim Foundations del vecino país del Norte.