Vol.X, 1,2 BOLETIN DE LA SOCIEDAD MATEMATICA MEXICANA 1953

METRICAS SOBRE EL TORO SIN PUNTOS CONJUGADOS*

Por Herbert Busemann

1. La mayor parte de los teoremas, de naturaleza preponderantemente geométrica, sobre espacios de Riemann, prueban ser independientes del caracter riemanniano de la métrica, en el sentido de que reformulando las hipótesis muestran ser casos especiales de teoremas sobre espacios de Finsler. *Entonces aquellos teoremas para los cuales es imposible una extensión simple del caso riemanniano al de Finsler son de significado especial para la comprensión de ambos tipos de espacios.* Un ejemplo patente en esta dirección es el teorema de Beltrami que caracteriza los espacios de Riemann en los que las geodésicas son rectas, como los espacios de curvatura constante, mientras que la caracterización de espacios de Finsler con esta propiedad es uno de los problemas de Hilbert.

M. Morse, G. Hedlund y E. Hopf[1] demuestran que *un toro con métrica riemanniana sin puntos conjugados tiene curvatura nula*, de modo que la métrica es euclidiana.

La presente nota demuestra que este teorema es del tipo *no extendible*: las geodésicas de una métrica de Finsler sobre un toro sin puntos conjugados no necesitan ser rectas y para cualquier métrica sin puntos conjugados siempre existen muchas métricas esencialmente distintas, con las mismas geodésicas. Hay de hecho tanta arbitrariedad en la elección de la métrica, cuando se prescriben las geodésicas, que el problema de determinarlas todas resulta sin interés.

Parece sin embargo, razonable preguntar *¿cuáles sistemas de curvas sobre el toro, puedan ser geodésicas en una métrica sin puntos conjugados?*. La respuesta a esta pregunta (en términos del plano como espacio universal cubriente del toro) es el principal resultado de este trabajo.

2. Elegimos el plano $P - (x,y)$ como espacio universal cubriente del toro, con las translaciones

(1) $T(m,n) : x' = x+m, \quad y' = y+n, \quad m,n$ enteros,

tomadas como transformaciones cubrientes. Un sistema de geodésicas sobre el toro sin puntos conjugados, lleva a un sis-

---

[1] El teorema fué probado, bajo la hipótesis adicional de que no hay puntos conjugados, por M. Morse y G. Hedlund en [3]. En esta forma general se debe á E. Hopf [4].

Los números entre paréntesis rectangulares se refieren a la bibliografía, al final del trabajo.

tema S de curvas en P, con las propiedades siguientes:

I. *Cada curva en* S *es la imagen topológica del eje real* $-t$: $p(t) = (x(t), y(t))$, $-\infty < t < \infty$, *tal que* $x^2(t) + y^2(t) \to \infty$ *cuando* $t \to \infty$.

II. *Cualesquiera dos puntos de* P *están exactamente sobre una curva de* S.

III. *El sistema* S *se transforma en sí mismo bajo las translaciones* $T(m,n)$.

IV. *Si una curva* L *de* S *contiene a* q *y a* $qT(m,n)$, *entonces contiene a todos los puntos* $qT(\nu m,\nu n)$, $\nu = \pm 1, \pm 2, \ldots$

V. *El sistema* S *satisface el axioma del paralelismo: para una curva dada* L *en* S *y un punto dado* p, *que no esté en* L *existe exactamente una curva en* S *que no corta a* L *y que pasa por* p.

El resultado principal es el

TEOREMA 1. *Si una métrica en el plano* P *admite como geodésicas un sistema* S *de curvas con las propiedades* I *y* II *y que sea invariante bajo las translaciones* $T(m,n)$, *entonces* S *satisface* III, IV *y* V.

Recíprocamente dado en P *un sistema* S *de curvas que satisfagan* I *a* V, *entonces existe una métrica invariante bajo las* $T(m,n)$, *para la cual las curvas dadas de* S *son geodésicas.*

La necesidad de las condiciones IV y V se demostrará en primer lugar usando con libertad los resultados y conceptos de [1]. Cada geodésica es congruente con una recta euclidiana [1, pág. 79, Teorema 1]. Sea U el cuadrado unitario $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$. Para cualquier $T = T(m,n)$ para la que m y n no se anulan simultáneamente, existe un punto a

en U para el cual

$$aa^T = \min_{p \in P} pp^T$$

donde ab denota la distancia entre a y b para la métrica dada. Si q es cualquier punto de P, entonces existe una $T' = T(m',n')$ tal que $q_0 = qT' \in U$. Entonces

$$aaT \leqslant q_0q_0T = q_0T'q_0TT' = q_0T'q_0T'T = qqT \quad ;$$

asi pues

$$aaT = \min_{p \in P} ppT \; ;$$

(I) *Para cualquier* $T(m,n) \neq 1$ *los puntos* $qT(\nu m, \nu n) = qT^{\nu}$ *caen sobre una geodésica si y solamente si* $qqT = \min_{p \in P} ppT$; [véase 2, Teorema (6.)]

Se sigue que los puntos aT^{ν} están en una geodésica L que, en vista de II se transforma en sí misma bajo todas las T^{ν} y entonces los puntos qT están en L y $qqT = aaT$. Además para $T' = T(m',n')$ arbitraria y $a' = aT'$

$$a'a'T = aT'aT'T = aT'aTT' = aaT;$$

así es que los puntos $a'T^{\nu}$ están entonces sobre la geodésica L' que por supuesto es la línea LT'.

Ya que L y L' no pueden cortarse en más de un punto resulta que o son idénticas o no se cortan. Si q es un punto del plano que no está sobre ninguna $LT(m',n')$ entonces m' y n' pueden escogerse de modo que q está entre L y $LT(m',n')$. Si $S'(a,b)$ denota el segmento de geodésica que va de a á b con extremos a y b, entonces $\bigcup_{\nu=-\infty}^{\infty} S'(qT^{\nu},qT^{\nu+1})$ es en vista de [1, pag. 119 (C)] una curva que junto con L y L' limitan una región convexa. Entonces los puntos qT^{ν} están sobre una geodésica y de (1) resulta que $qqT = aaT$. Esto prueba IV.

Las consecuencias de este resultado son suficientemente interesantes en el caso del toro para establecerlas explícitamente.

TEOREMA 2. *En una metrización de un toro sin puntos conjugados todas las geodésicas mono-gonos*, son geodésicas cerradas. Existe exactamente una geodésica cerrada en una clase libre homotópica, a través de un punto dado y todas las geodésicas de cada clase tienen la misma longitud.*

3. Es considerablemente más difícil demostrar V. Por brevedad llamemos racional una línea que contenga dos puntos q y $qT(m,n)$, $(m,n) \neq (0,0)$ y entonces contenga también los puntos $qT(\nu m,\nu n)$. Es fácil establecer el axioma de paralelismo para las líneas racionales haciendo ver: si L contiene los puntos pT^{ν}, $p \neq 1$ y q no está en L entonces la linea L' que contenga los puntos qT^{ν} es la única que pasa por q y no corta L.

Si no sucediera así, la asíntota H (véase [1, Cap.III, 4]) por q a una de las orientaciones, digamos L^{+}, de L

---

*Traducción de "one-gons", para indicar polígonos de un solo lado.

sería distinta de L'. Supongamos que el círculo límite A con L^+ como rayo central (loc.cit.) corte a L en $\bar{p}$. Entonces AT^{-1} es el círculo límite con L^+ como rayo central y por qT^{-1} y $\bar{p}T^{-1}$ ([1, pag. 200 (d)]). Se ha probado justamente que $\bar{p}\bar{p}T^{-1} = qqT^{-1}$. Por otra parte H corta a AT^{-1} en un punto f que es el pié único de q sobre AT^{-1} ([1, pág. 102, Teorema 5]) y $qf = \bar{p}\bar{p}T^{-1}$. Pero entonces $qqT^{-1}=qf$ contradice la unicidad del pié.

Por medio de una transformación del toro (o del plano) sobre sí mismo llegamos a que las lineas euclidianas x = const. y y = const. representan geodésicas. Cualquier otra geodésica tiene entonces una representación de la forma

$$y = f(x), \quad -\infty < x < \infty ,$$

con $f(x)$ estríctamente creciente o decreciente y $|f(x)| \to \infty$ para $x \to \infty$. Ello debido a II y a la validéz del axioma de paralelismo para las lineas x = const. y y = conts. Se demostrará que para cualquier línea tal, su "pendiente"

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} , \tag{2}$$

existe y es distinta de 0 e ∞.

Considérese primero el caso en el que L es línea racional por el origen z y el punto $(m,n) = zT(m,n)$, $m \neq 0$, $n \neq 0$. Entonces $f(\nu m) = \nu F(m)$ y si $\nu m \leq x < (\nu+1)m$, entonces debido a que $f(x)$ es monotóna

$$|f(x) - f(\nu m)| < |f[(\nu+1)m] - f(\nu m)| = |f(m)| \quad ;$$

así es que con $|\theta_1| < 1$,

$$\frac{f(m)}{m} = \lim_{\nu\to\pm\infty} \frac{f(\nu m)}{\nu m} = \lim_{\nu\to\pm\infty} \frac{f(\nu m) + \theta_1 f(m)}{\nu m + \theta_2 m} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} .$$

Una línea racional L_k obtenida de L mediante la traslación $T(0,k)$ tiene la ecuación $y = f(x)+k$; así es que L_k tiene la misma pendiente que L. Si L' es cualquier línea paralela a L, con ecuación $y = f'(x)$, entonces, para una k, conveniente L', yace entre L y L_k de modo que L' también posee esta pendiente.

Supongamos ahora que $y = f(x)$ representa una línea arbitraria. Si no tiene pendiente, entonces existirán m y n distintas de 0 tales que

$$\liminf \frac{f(x)}{x} < \frac{m}{n} < \limsup \frac{f(x)}{x} .$$

Entonces la línea racional que contiene a los puntos $(0,f(x))$ $T(\nu m,\nu n)$ cortaría a L más de una vez, sin coincidir con L.

La definición (2) de la pendiente implica

(3) *Líneas con pendiente distintas se cortan,*

(4) *Siempre existe una línea por un punto dado* $p = (x_0,y_0)$ *y con pendiente dada* $\mu \neq 0,\infty$.

Si $\mu = n/m$ entonces la línea que contiene a los puntos $pT(\nu m,\nu n)$ satisface (4). Si μ es irracional, escójanse una sucesión creciente de números racionales ρ_ν , $\nu = 1,2,\ldots,$ que tienda a μ y también un número racional $\rho_0 > \mu$. Sea L_1

la línea racional por p y de pendiente ρ_i. Entonces L_{i+1} está entre L_i y L_0 y por consiguiente L_i tiende a una línea límite por p. Si L_i, L están respectivamente representadas por $y = f_i(x)$, $y = f(x)$, entonces $f_0(x) > f(x) > f_i(x)$ para $x > x_0$ e $i > 1$; luego la pendiente de L es cuando más ρ_0 y cuando menos μ. Puesto que $\rho_0 > \mu$ fué arbitrario L tiene pendiente μ.

Las proposiciones (3) y (4) muestran que el axioma de paralelismo se sigue de

(5) *Por un punto dado* p, *cuando más hay una línea con pendiente dada.*

Para μ racional, esto sigue del hecho de que el axioma de paralelismo vale para líneas racionales. Porque si $\mu = n/m$ y si la línea L que pasa por los puntos $pT(\nu m, \nu n)$ tiene por ecuación $y = f(x)$, entonces cualquier otra línea L' por $p = (x_0, y_0)$ tiene por ecuación, digamos $y = f'(x)$, con $f'(x) > f(x)$ para $x > x_0$. En vista de que L es paralela a $LT(0,1)$, quien tiene por ecuación $y = f(x) + 1$, L' deberá cortar a $LT(0,1)$ para alguna $x' > x_0$.

Entonces para una $\nu > 0$ conveniente, el punto $pT(\nu m, \nu n)$ está sobre $LT(0,1)$ y entre L' y L. La línea L'' por p y por $pT(\nu m, \nu n+1)$ tiene pendiente $\frac{\nu n+1}{\nu m} > \mu$ y la pendiente de L' no puede ser menor que la pendiente de L''.

Sea ahora μ irracional y para una demostración indirecta, supóngase que por p y con pendiente μ, hay dos líneas distintas L, K. Podemos suponer que p es el origen y que esas líneas tienen ecuaciones de la forma

$$L:\ y = f(x);\quad K:\ y = g(x) \quad \text{con} \quad g(x) > f(x) \quad \text{para} \quad x > 0\ .$$

Entonces para n entero > 0

(6) $$0 < g(n) - f(n) < 1$$

ya que de otro modo el segmento S_n que conecta $(n, f(n))$ con $(n, g(n))$ contendría un punto de la forma (n, m) con m entero y entonces la línea racional L^* por p y (n, m) caería entre L y K. Por la primera parte de esta demostración, la pendiente de L sería menor que n/m. en tanto que la de K sería mayor que n/m. Puesto que la distancia es invariante bajo las $T(m,n)$, se sigue de [1, p.103, Teorema 6] que existe $\delta > 0$ tal que

$$g(n) - f(n) > \delta \quad \text{para} \quad n \geqslant 1 .$$

Para una κ dada, entera $\geqslant 3$ determínese el entèro m por

(7) $$m_\kappa \delta > \kappa + 1 > (m_\kappa - 1) \delta .$$

Entonces $\bigcup_{i=1}^{m_\kappa} S_i$ contiene $\kappa + 1$ puntos que representan o el mismo punto del toro o sus ordenadas difieren en enteros. Distinguimos dos casos.

a) Para alguna κ hay cuatro puntos de los cuales ninguna terna está en la misma geodésica. Un argumento familiar en las funciones elípticas muestra que la cerradura convexa de esos 4 puntos, en términos de S, contendría un "paralelogramo de periodos" Q cuyos lados están formados por segmentos de curvas en S. Ya que el dominio acotado por $y=f(x)$, $y=g(x)$ es convexo para $x > 0$, entonces Q estaría en este dominio; por otro lado Q contendría un punto equivalente a p y de la forma (m,n) lo cual ya se hizo ver que es imposible.

b) Cuando menos κ de los $\kappa+1$ puntos están en una geodésica H^{κ}. Entonces H^{κ} es racional y tiene pendiente racional ρ_{κ}. Puesto que ningún par de los κ puntos están en la misma S_1, las abscisas n_i^{κ} de los κ puntos son distintas. Sea $n_i^{\kappa} < n_{i+1}^{\kappa}$. Entonces $n_{\kappa}^{\kappa} - n_1^{\kappa} > \kappa - 1$ y en vista de (7) $n_1^{\kappa}/n_{\kappa}^{\kappa} \leqslant 1 - (\kappa-1)/m_{\kappa} < 1-\delta/4$. Ya que

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{f(x_1)}{x_1} + \frac{(x_2/x_1)\ [f(x_1)/x_1 - f(x_2)/x_2]}{1 - x_2/x_1}$$

se sigue que para $x_1 \to \infty$ y $0 < x_2/x_1 \leqslant \theta < 1$

$$\lim_{x_1\to\infty} \frac{f(x_1)}{x_1} = \lim_{x_1\to\infty} \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$$

donde x_2 puede estar acotada o no estarlo.

Entonces en el caso presente obtenemos de $n_1^{\kappa}/n_{\kappa}^{\kappa} < 1-\delta/4$,

$$\lim_{\kappa\to\infty} \frac{f(n_{\kappa}^{\kappa}) - f(n_1^{\kappa})}{n_{\kappa}^{\kappa} - n_1^{\kappa}} = \lim_{\kappa\to\infty} \frac{g(n_{\kappa}^{\kappa}) - g(n_1^{\kappa})}{n_{\kappa}^{\kappa} - n_1^{\kappa}} = \mu$$

y por consiguiente de (6) tambien será

$$\text{(8)} \qquad \lim_{x_1\to\infty} \frac{f(n_{\kappa}^{\kappa}) - g(n_1^{\kappa})}{n_{\kappa}^{\kappa} - n_1^{\kappa}} = \lim_{x_1\to\infty} \frac{g(n_{\kappa}^{\kappa}) - f(n_1^{\kappa})}{n_{\kappa}^{\kappa} - n_1^{\kappa}} = \mu$$

Por otra parte

$$(\kappa-1) \min_j (n_j^{\kappa}-n_{j-1}^{\kappa}) \leqslant n_{\kappa}-n_1 \leqslant m_{\kappa}-1$$

y por (7)

$$\min_j (n_j^\kappa - n_{j-1}^\kappa) \leqslant (m_\kappa - 1)/(\kappa - 1) < 2/\delta \quad .$$

Entonces el denominador de la pendiente ρ_κ de H^κ (si reducido) no puede sobrepasar $2/\delta$. Puesto que μ es irracional existe una $\epsilon > 0$; independiente de κ, tal que $|\rho_\kappa - \mu| > \epsilon$. Pero si $y = L(x)$ representa H^κ, puesto que los κ puntos caen entre L y K,

$$\frac{g(n_\kappa^\kappa) - f(n_1^\kappa)}{n_\kappa^\kappa - n_1^\kappa} > \frac{h(n_\kappa^\kappa) - h(n_1^\kappa)}{n_\kappa^\kappa - n_1^\kappa} = \delta > \frac{f(n_\kappa^\kappa) - g(n_1^\kappa)}{n_\kappa^\kappa - n_1^\kappa}$$

lo que junto con (8) contradice $|\rho_\kappa - /\mu| > \epsilon$. Esto completa la demostración de V.

4. Regresamos ahora a la *segunda parte del Teorema 1.* Las condiciones I y II garantizan por si sólas que las curvas tienen en S todas propiedades usuales de continuidad e intersección (comparar [1, Cap. III, § 3]. Podemos por consiguiente nuevamente suponer que las curvas $x = \text{const}$, $y = \text{const}$ representan curvas de S y por el axioma de paralelismo todas las otras curvas tienen nuevamente representaciones de la forma $y = f(x)$ con $f(x)$ estrictamente monótonas y $|f(x)| \to \infty$ para $x \to \infty$.

Tómese cualquier par m, n con $m > 0$ y denótese por L_p la curva en S que contenga los puntos $pT(\nu m, \nu n)$. Para p, q cualesquiera, las curvas L_p y L_q o son paralelas o son idénticas. Digamos que $y = f_p(x)$ representa a L_p (pues to que se admite $n = 0$, $f_p(x)$ puede ser constante). El que $T(m,n)$ transforme a L_p en si misma, implica $f_p(x+m) = f_p(x) + n$; entonces $f_p(x) - f_q(x)$ es periódica de período m y es independiente de x_0 el área

$$d_{m,n}(p,q) = \int_{x_0}^{x_0+m} |f_p(x)-f_q(x)|\, dx$$

del "paralelogramo" Q limitado por L_p, L_q, $x = x_0$, $x = x_0 + m$. Una translación arbitraria $T' = T(m',n')$ transforma Q en un paralelogramo que tiene la misma relación con pT' y qT' que Q la tiene con p y q. Pero T' deja invariante el área; entonces

(9) $$d_{m,n}(p,q) = d_{m,n}(pT',qT') \quad ;$$

obviamente $d_m(p,q) = d_{m,n}(p,q)$ y

(10) $d_{m,n}(p,q) = 0$ *si y solamente si* $L_p = L_q$.

La arbitrariedad de x_0 lleva a

(11) $d_{m,n}(p,q) + d_{m,n}(p,r) = d_{m,n}(p,r)$ *si y solamente si la línea* L_q *cae dentro de la banda cerrada limitada por* L_p *y* L_r

(12) $d_{m,n}(p,q) + d_{m,n}(p,r) > d_{m,n}(p,r)$ *si* L_q *no cae en esta banda.*

Sea δ la diferencia entre las ordenadas de p y q y determínese el entero κ por $\kappa-1 < |\delta| < k$. Entonces $T(0,\pm\kappa)$ transforma a L_p en una linea L_r para la cual L_q cae entre L_p y L_r (si L_r es distinta de L_p). Entonces

(13) $\quad d_{m,n}(p,q) < d_{m,n}(p,r) = \kappa d_{m,n}(p,pT(0,1)) \leq (|\delta|+1)\lambda_{m,n}$,

donde $\lambda_{m,n}$ solo depende de m y n. Una distancia que satisface nuestras exigencias será

(14) $$pq = \Sigma' d_{m,n}(p,q)\ \lambda^{-1}_{m,n} 2^{-m-|n|} ,$$

donde el acento indica que la suma se extiende a todos los pares m,n con $m > 0$ y toda n pero tales que $n/m \neq n'/m'$ para distintos pares m,n y m',n'.

Si se dan p y q y su diferencia de ordenadas es δ entonces por (13) es $d_m(p,q)\ \lambda^{-1}_{m,n} < |\delta| + 1$ para todas m,n siendo pq siempre finita. (9) muestra que pq es invariante bajo todas las $T(m',n')$ y (11), (12) implican que pq satisface la desigualdad del triángulo. $pp = 0$ por (10) y $pq = qp > 0$ para $p \neq q$ se sigue de $d_{m,n}(q,p) = d_{m,n}(q,p)$ y de (10) ya que para m y n convenientes, las lineas L_p y L_q (en la notación) serán distintas.

Entonces pq *satisface los axiomas para un espacio métrico*. Para que las curvas de S sean las geodésicas necesita hacerse ver: para tres puntos distintos p,q,r

(15) $\quad pq + qr = pr$ *si* q *está en el segmento* σ *de la curva de* S *que pasa por* p *y* r

(16) $\quad pq + qr > pr \qquad$ *si* q *no está sobre* σ.

Si q está en σ entonces para m,n cualesquiera, la linea L_q o bien contiene a p,r o bien está entre L_p y L_r. Entonces se sigue de (10) y (11) que vale (15).

Si finalmente q no está en σ, sea L la curva de S por dos puntos arbitrarios q' y q'' interiores (respecto a S) respectivamente a los segmentos de q a p y de p a r. Entonces L separa σ de q. Si L contiene a los puntos $q'T(\nu m,\nu n)$ para m,n convenientes y $m > 0$, entonces (16) se sigue de (12). Si L no tiene esta propiedad (o es una linea $x = \text{const}$ o no es racional) entonces el axioma de paralelismo implica la existencia de $m > 0$ y n tales que la línea L' que contiene $q'T(\nu m,\nu n)$ está tan cercana a L que también separa a σ y entonces a q de p y r. Nuevamente (16) se sigue de (12).

El que la distancia pq sea equivalente a la distancia euclidiana se deriva fácilmente ya sea de la definición analítica de pq o de las propiedades geométricas de S. La compacidad finita de pq se sigue de su invariancia bajo $T(m',n')$.

5. Unos cuantos ejemplos concluyen este trabajo. La construcción de la distancia pq en la sección precedente parece remitir a una métrica Minkowskiana si las curvas en S son las lineas euclidianas $ax + by + c = 0$. Esto es empero accidental porque pudieron usarse otras funciones $d_{m,n}(p,q)$ en vez del área. Por ejemplo si $p_1 = (x_1,y_1)$ entonces

$$p_1p_2 = [(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2]^{\frac{1}{2}} + |7y_1 + \operatorname{sen} 2\pi y_1 - 7y_2 - \operatorname{sen} 2\pi y_2|$$

remite a una métrica en la cual las lineas euclidianas son las geodésicas porque $7y + \operatorname{sen} 2\pi y$ crece monótonamente. Además esta métrica es invariante bajo las $T(m,n)$. En vez de $7y + \text{sen } 2\pi y$ pudieron usarse muchas otras funciones; pudo añadirse un término en las x_1, formado semejantemente; pudo haberse substituido la distancia euclidiana que aparece en la definición de $p_1 p_2$ por una distancia minkowskiana arbitraria. En fin pudo modificarse la distancia euclidiana de modos menos obvios. Esto aclara un punto tratado en la introducción: *hay tanto a elegir que el problema de determinar todas las métricas que pertenecen a un sistema dado de curvas carece de interés.*

Uno puede preguntar si las condiciones I, II y III implican o no IV o V. El ejemplo 1 en [1, p. 105] muestra que no es así.

Finalmente damos un ejemplo que confirma lo afirmado en la introducción de que las *curvas de un sistema* S *que satisfaga las condiciones* I *a* V *no necesitan ser rectas.* Esto significa lo que sigue: no existe en general una transformación topológica de P sobre otro plano P′ bajo la cual el sistema S se transforme en el de las líneas euclidianas de P′. Una condición obviamente necesaria (y de hecho también suficiente) para que tal transformación existiera es que el *Teorema de Desargues* valiera para las curvas de S. Sistemas que satisfagan I, II y V pero no el Teorema de Desargues son bien conocidos, pero un sistema tal que satisfaga III y IV no ha llegado a oidos del autor.

Para construir tal sistema S primero definimos ciertas funciones $f_t(x)$ en el intervalo $0 \leqslant x \leqslant 1$. Póngase

$$f_1(x) = x \qquad \text{y para } n \text{ entero} > 1$$

$$f_n(x) = \begin{cases} a_n x & \text{para } 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2} \\ b_n(x - \frac{1}{2}) + \frac{1}{2} a_n & \text{para } \frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1 \end{cases}$$

donde

$$a_n = 2n-1-2c_n, \quad b_n = 1+2c_n, \quad c_n = \sum_{\nu=1}^{n} 10^{-\nu}$$

entonces $f_n(1) = n$ y $f'_{n+1}(x) - f'_n(x) > 0$ para $x \neq \frac{1}{2}$ de modo que $f_{n+1}(x) - f_n(x)$ es creciente. Además póngase

$$f_t(x) = (n+1-t)\ f_n(x) + (t-n)\ f_{n+1}(x) \quad \text{si} \quad n<t<n+1 .$$

Entonces es fácil ver que $f_{t_2}(x) - f_{t_1}(x)$ crece para $1 < t_1 < t_2$ y que $f\ (1) = t$.

Ahora defínase $g_t^b(x)$ para toda x, toda t y toda b, mediante

$$g_t^b(x) = f_t(x-m) + mt + b \qquad \text{para} \quad m \leqslant x < m+1$$

Puesto que

$$(g_{t_2}^{b_2}(x) - g_{t_1}^{b_1}(x))' = f'_{t_2}(x-m) - f'_{t_1}(x-m) \quad ,$$

la diferencia $g_{t_2}^{b_2}(x) - g_{t_1}^{b_1}(x)$ crece para $t_2 > t_1$. Entonces las curvas $y = g_{t_1}^{b_1}(x)$, $y = g_{t_2}^{b_2}(x)$ se cortan mas una vez. Además $y = g_t^b(x)$ tiene pendiente en el sentido de (2).

El sistema S se define entonces como constante de todas las curvas $y = g_t^b(x)$, todas las líneas $y = mx + b$ con $b < 1$ y las líneas $x = \text{const}$. Debido a que $(g_t^b(x))' \geqslant 1$, cada línea en S corta a cada $y = g_t^b(x)$ justamente una vez.

Por cualquier punto del plano para justamente una línea con pendiente dada (2). Entonces el axioma del paralelismo vale. Fácilmente se verifica que dos puntos distintos del plano están exactamente (y no sólo cuando mas) en una curva de S.

Para demostrar que el sistema S posee la propiedad IV, basta probar lo que sigue: si $g_t^b(x') = y'$ y $g_t^b(x'+m) = y'+n$, donde m y n son enteros, entonces $g_t^b(x'+\nu m) = y'+\nu n$. Determínese el entero κ por $\kappa \leqslant x' < \kappa + 1$. Entonces si se pone $f_t(x'-\kappa) + b = W$, será $y' = g_t^b(x') = W+\kappa t$, $g_t^b(x+m) = W + (\kappa+m)\,t = W+\kappa t+n$ y por consiguiente $t = n/m$. Además

$$g_t^b(x'+\nu m) = W + (\kappa+\nu m)\,t = y'+\nu m t = y'+\nu n \;.$$

Que el teorema de Desargues no vale en este sistema se ve como en los otros ejemplos bien conocidos de sistemas no desarguesianos.

Dos triángulos que estén en la relación de Desargues, en el sentido ordinario se colocan de modo tal que todas menos una de las líneas que entran en el teorema tengan pendientes < 1 y sean entonces curvas de S. La restante línea L tiene pendiente > 1. La curva $y = g_t^b(x)$ por dos de los tres puntos de la configuración desarguesiana sobre L no contendrán en general al tercer punto.

El sistema S se transforma en si mismo no solamente bajo las $T(m,n)$ sino también bajo todas las translaciones $x' = x + m$, $y' = y + b$ en las que m sea entero, pero b cualquier número real. Fácilmente se verifica que la métrica construida en la sección 4 es invariante bajo todas esas translaciones. Así

TEOREMA 3. *Existen metrizaciones sobre el toro sin puntos conjugados que tienen por grupo de movimientos uno de un parámetro y para las cuales las geodésicas no sean rectas.*

El sistema S está construido de modo tal que aun exhibe un hecho que sorprende a primera vista. Las curvas $y = g_n^0(x)$ de S tienden a la curva $x = 0$ cuando $n \to \infty$, pero existen $\epsilon > 0$ independiente de n y un disco circular con radio ϵ (cuyo centro depende de n) tal que $g_n^0(x)$ no entra al disco.

University of Southern California
Los Angeles, Calif., 1951.

BIBLIOGRAFIA

[1] H.Buseman. Metric Methods in Finsler Spaces and in the Foundations of Geometry. Annals of Mathematics. Studies. No. 8. Princeton 1942.

[2] H.Buseman. Spaces with Non-Positive Curvature, Acta Math. Vol. 80 (1944), pags. 261 a 310

[3] E.Hopf. Closed Surfaces without conjugates points. Proc. Nac. Acad. Sc., Vol. 34 (1948), pags. 47 a 51.

[4] M.Morse y G.Hedlund. Manifolds without conjugate points. Trans. Am. Math. Soc., Vol. 51 (1942), pags. 362 a 382.