Vol.X, 1,2 BOLETIN DE LA SOCIEDAD MATEMATICA MEXICANA 1953

# SOBRE LAS TOPOLOGIAS PARA ESPACIOS DE FUNCIONES CONTINUAS*

Rodolfo Morales Martinez **

Sean $X,Y$ espacios topológicos y $Y^X$ el conjunto de todas las funciones continuas $f$ tales que $f(X) \subset Y$.

Si $\{C\}$ con $C \subset X$ es una familia no vacía de subconjuntos no vacíos y $W \subset Y$ es abierto, la familia $\{(C,W)\}$ de conjuntos de funciones $f$ con $f(C) \subset W$ formada con $C \in \{C\}$ y $W$ recorriendo la clase de todos los conjuntos abiertos no vacíos en $Y$ define una sub-base para una topología en $Y^X$. Cuando $\{C\}$ es la familia de todos los conjuntos compactos en $X$ se obtiene la topología-k. En general, una topología en $Y^X$ establecida por una familia $\{C\}$ de subconjuntos de $X$, se llamará una topología-$\{C\}$ y se indicará $Y^X(\{C\})$.

En algunas topologías-$\{C\}$, en particular la topología-k,

---

*Recibido para el Congreso Científico Mexicano, Septiembre 1951.

**Becario del Instituto Nacional de la Investigación Científica.

es sabido que:

a) Si $Y$ es $T_0$, $Y^X$ es $T_0$

b) Si $Y$ es $T_1$, $Y^X$ es $T_1$

c) Si $Y$ es $T_2$, $Y^X$ es $T_2$ .

En el Teorema I doy un procedimiento para obtener una clase amplia de topologías-$\{C\}$ en que son válidas las proposiciones a), b), c).

El resultado principal en este trabajo está contenido en el Teorema II. Arens y Dugundji han encontrado[1] que si $X$ es completamente regular y $Y$ contiene un arco no degenerado, una condición necesaria y suficiente para que una topología-$\{C\}$ basada en conjuntos cerrados sea mas fuerte que cualquier topología admisible en $Y^X$ es que aquella topología sea propia. Tal hecho es cierto sin restricciones en $X, Y$ o $Y^X(\{C\})$.

Haciendo referencia a los subconjuntos compactos en $Y^X$ con la topología-k, establezco en el Teorema III una propiedad para tales conjuntos compactos de funciones. Es sabido que si $F \subset Y^X(k)$ es compacto, entonces $F(x) = \bigcup_{f \in F} f(x)$ es compacto para todo $x \in X$ [2], este resultado se obtiene para todo conjunto compacto $K \subset X$ y a la vez se tiene una generalización, en la topología-k, del teorema elemental: si $K$ es compacto y $f$ es continua entonces $f(K)$ es compacto.

<u>Definición</u>. Una familia de subconjuntos de $X$, $\{C\}$ se llama *regular* si para todo $x \in X$ y toda vecindad $U$ de $x$, existe un $C \in \{C\}$ con $x \in C \subset U$.

En particular si $\{C\}$ es una base para la topología de

[1] Arens, R.F. and Dujundji J. Topologies for functions spaces. Pacific Journal of Mathematics, Vol. 1, No. 1, p. 15, March 1951.

[2] Gale, D. Compact sets of functions and functions rings. Proc. of the American Mathematical Society, Vol. 1, No. 3, p. 304, June 1950.

$X$, $\{C\}$ es una familia regular; el conjunto de los puntos de $X$ es una familia regular.

Teorema I. *Si* $\{C\}$ *es una familia regular, entonces en* $Y^X(\{C\})$ *son ciertas a), b) y c).*

Demostración. Haré ver c). Sean $f, g \in Y^X(\{C\})$ con $f \neq g$. Entonces existe un $x \in X$ tal que $f(x) \neq g(x)$. Como $Y$ es $T_2$ hay dos vecindades $W_1(f(x))$, $W_2(g(x))$ con $W_1 \cap W_2 = \phi$ (conjunto vacío). Por ser $f, g$ continuas existen vecindades de $x$, $U$, $V$ tales que $f(U) \subset W_1$, $f(V) \subset W_2$. Tomo $U \cap V$ y como $\{C\}$ es regular, hay un $C \in \{C\}$ con $x \in C \subset U \cap V$

$$\therefore \quad f \in (C, W_1) \qquad y \qquad g \in (C, W_2) \qquad y$$

estas vecindades $(C, W_1)$ y $(C, W_2)$ son ajenas.

Definición. Una topología $s$ en $Y^X$ es admisible si la función $h : X \times Y^X(s) \to Y$ con la regla $h(x, f) = f(x)$ es una función continua.

Sea $Z$ un tercer espacio topológico. Se definen las funciones $\varphi$ y $\varphi^*$ de la manera siguiente:

$$\varphi : X \times Z \to Y, \qquad \varphi^* : Z \to Y^X(t)$$

Sujetas a la condición $[\varphi^*(z)]\ (x) = \varphi(x, z)$, $x \in X$ [3]. Esto establece una correspondencia biunívoca entre las funciones $\varphi$, $\varphi^*$.

Definición. Una topología $t$ es "más fuerte" que la

---

[3] Fox, R.H. On topologies for functions spaces. Bulletin of the American Mathematical Society, Vol.51, p.429 (1945).

topología $s$ (ambas para el mismo conjunto $X$) y se escribe $t < s$ en el sentido de Alexandroff, es decir si la función idéntica $I : X(s) \to X(t)$ es continua[4].

<u>Definición</u>. Una topología $t$ en $Y^X$ es *propia* si y solo si para todo espacio topológico $Z$, la continuidad de $\varphi$ implica la continuidad de $\varphi^*$.

Teorema II. *Una condición necesaria y suficiente para que una topología* $t$ *en* $Y^X$ *sea más fuerte que cualquier topología admisible* $s$ *es que* $t$ *sea propia.*

<u>Demostracion</u>.

1°. es condición suficiente.

Sean $t$ una topología propia y $s$ una topología arbitraria para $Y^X$. Tomo $Z = Y^X(s)$. Entonces la función $\varphi : X \times Z \to Y$ con $\varphi(x,f) = f(x)$ es continua y por consecuencia la función $\varphi^* : Z \to Y^X(t)$ es también continua. Pero $\varphi^*(f(x)) = f(x) \therefore \varphi^* = f$. Entonces $t < s$.

2°. es condición necesaria.

Arens y Dugundji han introducido el concepto de convergencia continua para un conjunto dirigido de funciones $f_\mu \in Y^X$, y demostrado que la condición necesaria y suficiente para que una topologia $t$ sea propia es que para todo conjunto dirigido $f_\mu \in Y^X(t)$ la convergencia continua de $f_\mu \Rightarrow$ la convergencia de $f_\mu$ en $t$. La demostración de la necesidad de la condición propuesta en este teorema se basa en el resultado anterior y ha sido dada, por el primero de los autores citados, esencialmente en[5]. Por tal motivo no repito esta parte.

---

[4] Alexandroff, P. und Hopf H., Topologie, p.62, Springer, Berlin, 1935.

[5] Arens, R.F. A topology for spaces of transformations. Annals of Mathematics, Vol.47, No.3, p.484, July 1946.

Entre las caracterizaciones que bajo diferentes hipótesis se han dado para los conjuntos compactos en $Y^X(k)$, figura la siguiente: $F(x) = \bigcup_{f \in F} f(x)$ es compacto para todo $x \in X$ véanse [6] y [2].

La afirmación anterior se establece en forma más amplia en el siguiente:

Teorema 3. *En la topología-k si* $K \subset X$ *es compacto, entonces* $F(K) = \bigcup_{f \in F} f(K)$ *es compacto en* $Y$, *para todo subconjunto compacto* $F \subset Y^X(k)$.

Demostración. Sean $K \subset X$ un conjunto compacto arbitrario y $\{W\}$ una cubierta abierta arbitraria de $F(K)$. Se extraera de $\{W\}$ una subcubierta finita.

Como $f(K)$ con $f \in F$ es compacto y $f(K) \subset \bigcup_{W \in \{W\}} W$ existe una subcubierta finita $W_{1(f)}, W_{2(f)}, \ldots, W_{n(f)}$ en donde $i(f)$ con $i = 1, 2, \ldots, n$ depende de $f$

Entonces $f(K) \subset \bigcup_{i=1}^{n} W_{i(f)} = W_f$ y $f$ es un punto de la vecindad-k: $(K, W_f)$. Cuando $f$ recorre $F$ queda definida la cubierta de $F$: $\{(K, W_f) \mid f \in F\}$. Entonces, para un numero finito de funciones $f_1, f_2, \ldots, f_m$

$$F \subset \bigcup_{j=1}^{m} (K, W_{f_j}) .$$

La familia $\{W_{1(f_1)}, W_{n(f_1)}, W_{1(f_2)}, \ldots, W_{n(f_2)}, \ldots$ $\ldots W_{1(f_m)}, \ldots, W_{n(f_m)}\}$ es una subfamilia de $\{W\}$ y es también una cubierta de $F(K)$ porque si $y \in F(K)$, existen $f \in F$,

(6) Myers, S.B. Equicontinuos sets of mappings, Annals of Mathematics, Vol.47, No.3, p.498, July 1946.

(2) Gale, D. loc.cit. p.304.

$x \in K$ con $y = f(x)$. Entonces hay un valor de $j$, llamémoslo $r$ tal que $f \in (K, W_{f_r}) \therefore f(x) = y \in W_{f_r} = \bigcup_{i=1}^{n(f_r)} W_{i(f_r)}$ $\therefore y \in W_{s(f_r)} \in \{W\}$ en donde $s$ es algún valor de $i(f_r)$, y $F(K)$ es compacto.

Instituto de Matemáticas de la
Universidad Nacional de México