Vol.X, 1,2

BOLETIN DE LA
SOCIEDAD MATEMATICA MEXICANA

1953

UNA PROPIEDAD DE LA METRICA DE BUSEMANN PARA LOS SUBESPACIOS EN UN ESPACIO METRICO ARBITRARIO*

Enrique Valle Flores **

1. INTRODUCCION. Hausdorff[1] resolvió el problema de topologizar los subconjuntos no vacíos y acotados en un espacio métrico R, de la siguiente manera. Si M y N son dos tales subconjuntos de R, la distancia (general) entre ellos es[2], en el sentido de Hausdorff

$$(1) \qquad \rho_H(M,N) = \sup_{x \in R} |xM - xN| \quad ,$$

---

*Recibido para el Congreso Científico Mexicano, Septiembre 1951.

** Becario del Instituto Nacional de la Investigación Científica.

(1) Véase [1], § 28, pags. 145-150. Los números entre paréntesis rectangulares se refieren a la Bibliografía, al final del trabajo.

(2) Hausdorff [1] y Alexandroff [2, pag. 112] definen ρ_H mediante la frontera inferior de los números α que satisfacen simultaneamente $S(M,\alpha) \supset N$ y $S(N,\alpha) \supset M$, donde $S(M,\alpha)$ designa al conjunto de los puntos de R que distan de M menos que α. Sin embargo Busemann demuestra en [3, (2.1), pag. 206] la equivalencia de esta definición con la (1).

donde xM designa la distancia, segun la métrica que ya había en R, entre el punto x y el subconjunto M. Entonces ρ_H satisface[3]:

i) $\rho_H (M,N) \geqslant 0$, $\rho_H (M,N) = 0$.

ii) $\rho_H (M,N) = 0$ equivale a $\bar{M} = \bar{N}$.

iii) $\rho_H (M,N) = \rho_H (N,M)$.

iv) $\rho_H (M,N) + \rho_H (N,Q) \geqslant \rho_H (M,Q)$.

El espacio resultante de los subconjuntos acotados y no vacíos de R, se metriza entonces *propiamente*, del modo natural y usual, clasificando tales subconjuntos en clases cuyos miembros disten 0 (según ρ_H). Gracias a ii) este espacio de clases es el *espacio de las clases densas y acotadas*, esto es el espacio de clases de conjuntos acotados y mutuamente densos. Ahora bien la métrica de Hausdorff induce de la manera usual una convergencia *de clases densas* o de conjuntos cerrados y acotados, la llamada convergencia métrica, asi:

(2) $\qquad \mathrm{lm.}\ M_\nu = M$ *equivale*[4] a $\rho_H(M_\nu, M) \to 0$,

y en [2, II, § 5, No.3] se establecen varios hechos importantes sobre la comparación entre las convergencias topológica[5] y la métrica (2), entre tales resultados figura:

[3] Para los hechos citados aqui sobre la métrica hausdorffiana véase [2, II, § 5, No.2, pags. 112-116].

[4] En este caso M es naturalmente cerrado.

[5] Para este concepto véase [2, § 5, No. 1].

(3) *Si la sucesión* $\{M_\nu\}$ *satisface, segun* ρ_H *la condición de Cauchy*[6], *entonces* M_ν *converge topológicamente*[7].

Ahora bien el defecto de la métrica de Hausdorff, consistente en excluir los conjuntos no acotados es remediado por Busemann en [3, 1.2] al introducir la distancia que llamamos *distancia de Busemann*, entre los conjuntos no vacios *arbitrarios* M y N de R, mediante

(4) $$\rho_p\ (M,N) = \sup_{x\in R}.\ \{|xM-xN|\ \exp.(-px)\}\quad ,$$

donde[8] p es cualquier punto (fijo) de R. Para esta métrica que resulta topológicamente independiente de la elección del punto p, valen también los resultados i) a iv), con ρ_H reemplazada por ρ_p. Entonces ella determina en R, como la de Hausdorff, un *espacio de las clases densas de* R (de miembros no necesariamente acotados) e induce naturalmente y como antes, una convergencia en R, que llamamos *convergencia métrica* (según ρ_p) y que también resulta independiente del punto[9] p, por medio de (2) con ρ_H reemplazada por ρ_p.

El propio Busemann establece resultados relativos a la comparación entre la convergencia topológica y la nueva convergencia métrica[10], semejantes a los correspondientes en el caso hausdorffiano. El propósito del presente trabajo es completar esa comparación mediante el siguiente hecho, correspondien

(6) Esto es, si para cada $\delta > 0$, existe ν_0 tal que $\mu,\ \nu > \nu_0$ implique $\rho\ (M_\mu,M_\nu) < \delta$.

(7) Esto es, existe el límite topológico lt. M_ν. Véase [2,pag. 112]

(8) La métrica que ya existía en R se designa mediante xy.

(9) Según se desprende de [3, (2.10), pag. 207].

(10) Cf. [3, (2.12) a (2.18) pags. 208-209].

te de (3):

TEOREMA. *Si una sucesión* $\{M_\nu\}$ *de conjuntos arbitrarios y no vacíos satisface, segun* ρ_p, *la condición de Cauchy, entonces* $\{M_\nu\}$ *converge topológicamente.*

2. DEMOSTRACIÓN del teorema[11]. Sea $\epsilon (0 < \epsilon \; 1)$ arbitraria y supongamos que $a \in \overline{\mathrm{lt}}\, M_\nu$ [12]; tomamos $\delta = \epsilon/(1 + \exp(pa + 1) < 1$. Si $\{M_\nu\}$ satisface la condición de Cauchy, entonces existe un rango[8] $\mu > \nu_0$ tal que $S(a,\delta) \cap M_\mu$ no es vacío, esto es existe cierto punto $a_\mu \in M$ que satisface $aa_\mu < \delta$. Si ahora es $\nu > \nu_0$ se tendrá

$$\delta > \rho_p\,(M_\mu, M_\nu) \geqslant a_\mu\, M_\nu \exp\,(-pa_\mu) \quad ;$$

luego $\delta \exp\,(pa_\mu) > a_\mu\, M_\nu$ y en vista de que

$$pa_\mu \leqslant pa + aa_\mu < pa + \delta < pa + 1 \;,$$

resulta $a_\mu M_\nu < \delta \exp\,(pa + 1)$. Así pues existe $a_\nu' \in M_\nu$ tal que $a_\mu a_\nu' < \delta \exp\,(pa + 1)$ y entonces

$$aa_\nu' \leqslant aa_\mu + a_\mu a_\nu' < \delta + \delta \exp\,(pa + 1) = \epsilon \quad .$$

En resumen, para $\nu > \nu_0$ existe a_ν' tal que $a_\nu' \in M_\nu$ y tam-

(11) Esta es la natural modificación de la demostración al teorema (3), que figura en [2].

(12) $\overline{\mathrm{lt}}\, M_\nu$ designa al límite topológico superior y $\underline{\mathrm{lt}}\, M_\nu$ al límite topológico inferior de la sucesión de conjuntos M_ν, en el sentido de [2, II, § 5, No. 1; pag. 111]. En nuestra hipótesis, el primer límite puede ser vacío y no existir entonces ninguna a tal; pero en tal caso también hay convergencia, hacia el conjunto vacío.

bien $aa_\nu' < \epsilon$, esto es para $\nu > \nu_0$, $S(a,\epsilon) \cap M_\nu$ no es vacía luego $a \in \underline{\mathrm{lt}}\, M_\nu$ y $\overline{\mathrm{lt}}\, M_\nu = \underline{\mathrm{lt}}\, M_\nu$, Q.E.D.

BIBLIOGRAFIA.

[1] F.Hausdorff. Mengenlhre, Dritte Auflage. Dover,N.York 1944.

[2] P.Alexandroff und H.Hopf. Topologie, erster band, J.Springer Berlin, 1935.

[3] H.Busemann. Local metric Geometry, Transactions of the American Mathematical Society, Vol. 56 (1944), pgs. 200-274.

Instituto de Matemáticas de la
U. N. A. M.