BOLETIN
DE LA
SOCIEDAD MATEMATICA MEXICANA

VOLUMEN X NUMEROS 1 y 2

CONTENIDO

MARZO Y JUNIO, 1953

MEXICO

Vol.X, 1,2 BOLETIN DE LA SOCIEDAD MATEMATICA MEXICANA 1953

LA ITERACION DE LOS CUADRADOS DE STEENROD EN LA TOPOLOGIA ALGEBRAICA*

Por José Adem.

En este trabajo se demuestra que los cuadrados de Steenrod sobre las clases de cohomología satisfacen ciertas identidades. Estas identidades se aplican para resolver algunos problemas particulares de homotopía. Los detalles completos aparecerán en alguna otra parte.

1. Sea $H^q(K)$ el q-ésimo grupo de cohomología de un complejo K, con los enteros mód 2 como grupo de coeficientes. Los cuadrados de Steenrod[1] denotados por Sq^i $(i = 0, 1, \ldots)$,

---

*Traducción del trabajo publicado por nuestro consocio, bajo el título "The iteration of the Steenrod squares in algebraic topology", en la Revista Estadounidense Proceedings of the National Academy of Sciences, Vol. 38, No.8, pags.720-726, Agosto de 1952

(1) Véase Steenrod, N.E., Ann.Math., Vol. 48 (1947), pags.290-320. Véase también la referencia (11), pag. 977.

son homomorfismos invariantes

$$Sq^i : H^q(K) \to H^{q+i}(K) \quad ,$$

definidos para cualquier complejo K y que satisfacen, entre varias otras, las siguientes propiedades: para cualquier mapeo f de un complejo en otro, se tiene $f^*Sq^i = Sq^if^*$; Sq^0 = identidad; $Sq^qu = u \smile u$, (mód 2) si $q = \dim u$.

Un cuadrado *iterado* es una composición de dos o más de tales cuadrados, por ejemplo $Sq^i\,Sq^j\,Sq^k$. Las relaciones (mód 2) siguientes para los cuadrados iterados son bien conocidas

$$Sq^1\,Sq^k = \begin{cases} Sq^{k+1} & \text{si } k \text{ es par,} \\ 0 & \text{si } k \text{ es impar.} \end{cases}$$

Un resultado principal de este artículo es un sistema de relaciones adicionales como sigue

TEOREMA 1.1 *Para toda* $s > t$, *los cuadrados satisfacen las relaciones* mód 2

$$Sq^{2t}\,Sq^s = \sum_{j=0}^{t} \binom{s-t+j-1}{2j} Sq^{t+s+j}\,Sq^{t-j} \quad ,$$

donde $\binom{k}{j}$ *es el valor,* mód 2 *del coeficiente binomial, con la convención* $\binom{k}{j} = 0$ *si* $j > k$.

De tales relaciones obtenemos

$$(1.2) \qquad Sq^{2^n(2r+1)} = Sq^{2^n}Sq^{2^{n+1}r} + \sum_{p=0}^{n-1} Sq^{2^n(2r+1)-2^p}\,Sq^{2^p} \quad ;$$

Como casos especiales de 1.2 tenemos

$$(1.3)\qquad Sq^{2^n}Sq^{2^m} = Sq^{2^m+2^n} + \sum_{p=0}^{n-1} Sq^{2^m+2^n-2^p}\,Sq^{2^p} \qquad (m>n)\ ,$$

$$(1.4)\qquad Sq^{2^n}Sq^{2^n} = \sum_{p=0}^{n-1} Sq^{2^{n+1}-2^p}Sq^{2^p}$$

Una consecuencia directa de 1.2 es el

TEOREMA 1.5 *Los cuadrados del tipo* Sq^{2^p} *en los que* $p = 0, 1, \ldots$ *forman una base para las operaciones de efectuar cuadrados. Con precision, las relaciones 1.2 pueden usarse para escribir cualquier cuadrado como una suma de cuadrados iterados, con exponentes* 2^p, *ejemplo:* $Sq^6 = Sq^2Sq^4+Sq^1Sq^4Sq^1$.

OBSERVACION. Usando un punto de vista distinto, mediante los complejos de Eilenberg-Mac Lane, Serre[2] ha demostrado que los cuadrados iterados del tipo $Sq^{i_1}Sq^{i_2}\ldots Sq^{i_k}$, en los que $i_1 \geq 2i_2, \ldots i_{k-1} \geq 2i_k$, constituyen una base para los cuadrados iterados. Puede darse una nueva demostración de este hecho usando las relaciones 1.1. Esta tiene la ventaja de que se obtienen fórmulas explícitas para expresar un cuadrado iterado arbitrario, en términos de esta base.

2. Sea u una clase de cohomología de un complejo K, con coeficientes en un grupo G. Podemos escribir usando 1.2, la siguiente expresión para el autoproducto de u.

Si $q = \dim u = 2^n(2r+1)$, $r > 0$, entonces

$$(2.1)\qquad u\smile u = Sq^{2^n}Sq^{q-2^n}u + \sum_{p=0}^{n-1} Sq^{q-2^p}Sq^{2^p}u\ ,\quad (\text{mód } 2)$$

[2] Véase Serre, J.P., C.R.Acad. Paris, Vol. 243 (1952), pags. 1243-1245.

Si $q+1 = \dim u = 2^n(2r+1)+1$, $r>0$, $n>0$, entonces

$$(2.2) \qquad u \smile u = \delta^* \left[Sq^{2^n} Sq^{q-2^n} u + \sum_{p=0}^{n-1} Sq^{q-2^p} Sq^{2^p} u\right] ,$$

en donde δ^* es el homomorfismo cofrontera de la sucesión de coeficientes $0 \to G \to G \to G/2G \to 0$[3]. En el segundo caso suponemos que no existen elementos en G de orden 2.

Estas fórmulas imponen restricciones fuertes sobre los autoproductos en el anillo de cohomología de un complejo. Por ejemplo 2.2 implica: *No puede existir un complejo* K *con una clase* -7 *entera* u, *tal que* $u \smile u \neq 0$ *y* $H^{11}(K; \text{mód } 2) = 0$.

3. Llamaremos a una variedad M, de dimensión par, *del tipo* α, cuando sea conexa, orientable y su número medio de Betti sea 1. Esto es $\dim M = 2k$ y $R_0 = R_k = R_{2k} = 1$. Como es bien sabido no puede existir una variedad que sea de tipo α y de dimensión $2(p+1)$. Esto es una consecuencia directa de la dualidad de Poincaré y de la anticonmutatividad del producto $\smile$. Pueden darse las siguientes restricciones ulteriores sobre la estructura homológica de las variedades, usando la dualidad de Poincaré y la fórmula 2.1.

TEOREMA 3.1 *Sea* $\dim M = 2k = 2^{n+1}(2r+1)$, $r > 0$. *Entonces no existe una variedad* M *del tipo* α *tal que* $H^{2^n}(M; \text{mód } 2) = 0$ *y* $H^{k-2^p}(M; \text{mód } 2) = 0$ *para* $p = 1,\dots,n-1$.

Una consecuencia directa de 3.1 es el siguiente

COROLARIO 3.2 *En caso de que exista una variedad sin torsión, de dimensión* $2k$ *y con* $1+x^k+x^{2k}$ *como polinomio de Poincaré, entonces* k *es una potencia de* 2.

---

[3] Véase Steenrod, N.E., Topology of Fibre Bundles, Princeton Univ. Press. 1951, pags. 191-193.

OBSERVACION: El Teorema 3.1 resuelve parcialmente un problema, considerado por Hirsch[4] y por Bassi[5] sobre la existencia de una variedad de dimensión 12, con $1 + x^6 + x^{12}$ como polinomio de Poincaré. Se sigue de 3.1 que tal variedad M no existe con $H^2(M; \text{mód } 2) = 0$.

4. Dado un mapeo $f: S^{p+q-1} \to S^q$ (de una esfera-$(p+q-1)$ en una esfera-q), sea K el complejo que se obtiene adjuntando a S^q mediante f, una célula-$(p+q)$. Si $Sq^p: H^q(K) \to H^{p+q}(K)$ es distinto de cero, este mapeo es esencial. Ya que los grupos de cohomología intermedios de K son nulos, se sigue de 1.5 que Sq^p será cero si p no es potencia de dos.

Hopf[6] ha construído mapeos esenciales $f: S^{2n-1} \to S^n$ para toda n par. Asignó a cualquier mapeo tal un entero llamado el invariante de Hopf $H(f)$ (un invariante de la clase de homotopía que es cero para mapeos no esenciales). Exhibió mapeos f para cada par n y para cualquier $H(f)$ par. Para $n = 1,2,4,8$, demostró que cualquier entero podía ser una $H(f)$. Recientemente G.Whitehead[7] probó que $H(f)$ es par para cualquier f cuando $n = 4k+2$ $(k \geqslant 1)$. En el problema de decidir para cuáles n existe un mapeo con invariante de Hopf 1, excluiremos muchos valores de n con el argumento que sigue. El valor, mód 2 de $H(f)$ es 0 ó 1 según que $Sq^n: H^n(K) \to H^{2n}(K)$ sea 0 o no lo sea. El resultado del precedente párrafo demuestra así el

(4) Véase Hirsch, G. Colloque International de Topologie Algébrique, Paris, 1949, pags. 35-42.

(5) Véase Bassi, A., Mem. della Cl. di Scienza, R. Accad. d'Italia, Vol.6 (1935), pags. 669-714.

(6) Hopf, H. Math.Ann., Vol.104 (1931), pags. 637-665 y Fund. Math. Vol. 25 (1935), pags. 427-440.

(7) Whitehead, G.W. Ann.Math., Vol.51 (1950), pags. 192-237.

TEOREMA 4.1 *El invariante de Hopf* $H(f)$ *de un mapeo* $f:S^{2n-1} \to S^n$ *debe ser par si* n *no es una potencia de 2.*

Sigue en pié el problema de decidir si para cada potencia de 2 existe un mapeo con 1 como invariante de Hopf.

Es bien conocido que (4.1) tiene varias implicaciones; sólo mencionaremos las siguientes.

COROLARIO 4.2 *Una representación de* S^m *como manojo esferoidal (sphere bundle) sobre* S^n *es posible solamente si* $m = 2n-1$ *y* n *es potencia de 2.*

Este corolario vale para un grupo arbitrario del manojo. Para el grupo de rotaciones R_n como grupo del manojo, fué probado recientemente[8] por N.E.Steenrod y J.H.C.Whitehead.

COROLARIO 4.3 *Un mapeo* $f:S^n \times S^n \to S^n$ *del tipo* $(1,1)$ *puede existir solamente si* $n+1$ *es potencia de 2.*

Hopf[9] y Behrend[10] estudiaron el asunto de la existencia de álgebras reales con división (esto es, multiplicación bilineal con unidad bilateral y sin divisores de cero) en el espacio euclidiano-n. Mostraron que no existen cuando n no es potencia de 2. El resultado precedente nos permite demostrar este resultado eliminando la condición de bilinealidad.

5. Al extender el proceso de adjuntar células a esferas y mediante las fórmulas 1.3 y 1.4, demostramos el siguiente teorema general acerca de la composición de suspensiones de mapeos cuyo invariante de Hopf sea 1.

TEOREMA 5.1 *Sean* $f:S^{2m-1} \to S^m$ *y* $g:S^{2n-1} \to S^n$ dos

---

[8] Véase Steenrod, N.E. y Whitehead, J.H.C., Proc.Nat.Acad.Sc. U.S.A. Vol. 37 (1951) pags. 58-63.

[9] Hopf, H., Comm.Math.Helv. Vol. 13 (1941) pags. 219-239.

[10] Behrend, F. Compos. Math. Vol. 7 (1939), pags. 1-19.

mapeos cuyo invariante de Hopf valga 1. Supóngase $m \geqslant n$. *Sea* g' *la suspensión* $(2m-1-n)$*-ésima de* g. *Entonces la composición* fg' *siempre es esencial; además*

(1) si $m = n$, *la suspensión* p*-ésima de este mapeo compuesto, es esencial para toda* p.

(2) si $m > n$, *la suspensión* p*-ésima de este mapeo compuesto, es esencial para toda* $p < n$. *Todos los elementos esenciales construídos de este modo no son divisibles entre 2.*

Si en lo de arriba tomamos $f = g$ como el mapeo $S^3 \to S^2$ de invariante de Hopf 1, obtenemos una nueva prueba de que $\pi_{n+2}(S^n) \neq 0$ para $n \geqslant 2$. Análogamente si $f = g$ es el mapeo $S^7 \to S^4$ (o bien $S^{15} \to S^8$) de invariante de Hopf 1, encontramos que $\pi_{n+6}(S^n) \neq 0$ para $n \geqslant 4$ (respectivamente, que $\pi_{n+14}(S^n) \neq 0$ para $n \geqslant 8$).

6. Indicaremos como nuestras relaciones sobre cuadrados iterados pueden usarse para construir algunas operaciones cohomológicas de *segunda especie*. Sean respectivamente Z y Z_2 el grupo de los enteros y el de los enteros mód 2 y supóngase $Sq^2 : H^q(K;Z) \to H^{q+2}(K;Z_2)$ definido con el apareamiento natural. Defínase $N^q(K) \subset H^q(K;Z)$ como el nucleo de Sq^2. Construiremos una operación de segunda especie.

$$(6.1) \qquad \Phi : N^q(K) \to H^{q+3}(K;Z_2)/Sq^2H^{q+1}(K,Z) \quad .$$

Primero considérese $u \in H^q(K;Z)$ con $q \geqslant 2$ y sea u_1 un representante de u. Con $n = 1$ en 1.4 tenemos la relación $Sq^2Sq^2u + Sq^3Sq^1u = 0$. La demostración de nuestras relaciones sobre cuadrados iterados se hace mediante una construcción de cocadenas. Para esta relación particular construimos mapeos de cocadena

$$E_j: \qquad C^p(K^4) \to C^{p-j}(K),$$

donde $K^4 = K \times K \times K \times K$, de modo que mód 2

$$(u_1 \smile_i u_1) \smile_{i+2} (u_1 \smile_i u_1) + (u_1 \smile_{i+1} u_1) \smile_i (u_1 \smile_{i+1} u_1) = \delta E_{3i+3}\,(u_1^4)$$

donde $\smile_k$ es el k-producto cup(1) y además $i=q-2$. Si u es una clase con coeficientes enteros, entonces $Sq^1u=0$ y por consiguiente $Sq^2Sq^2u=0$. En este caso una expresión cocadenal mód 2 para esta última relación se dá mediante

(6.2) $\qquad (u_1 \smile_i u_1) \smile_{i+2} (u_1 \smile_i u_1) =$

$$\delta[E_{3i+3}(u_1^4) + \eta(u_1) \smile_{i-1} \eta(u_1) + \eta(u_1) \smile_i \delta\eta(u_1)],$$

en donde

$$\eta(u_1) = \tfrac{1}{2}[u_1 \smile_{i+2} u_1 + u_1].$$

Supóngase ahora que $Sq^2u=0$, esto es que $u \in N^q(K)$; entonces para alguna cocadena b tenemos $u_1 \smile_i u_1 = \delta b$ y se sigue mód 2 que

(6.3) $\qquad (u_1 \smile_i u_1) \smile_{i+2} (u_1 \smile_i u_1) = \delta[b \smile_{i+1} b + b \smile_{i+2} \delta b].$

Tenemos entonces que en 6.2 y en 6.3 la misma expresión es una cofrontera por dos razones diferentes. Se sigue de un principio general, ya usado por Steenrod al definir operaciones -

funcionales, que ambas operaciones juntas dan lugar a una nueva operación cohomológica. Poniendo

$$\omega_1 = b \smile_{i+1} b + b \smile_{i+2} \delta b + E_{3i+3}(u_1^4) + \eta(u_1) \smile_{i-1} \eta(u_1) + \eta(u_1) \smile_i \delta\eta(u_1)$$

se sigue de 6.2 y 6.3 que ω_1 es un cociclo mód 2 y definimos nuestra operación de 6.1 por

$$\Phi u = \{\omega_1\} + Sq^2 H^{q+1}(K;\ Z).$$

puede probarse que la operación Φ esta bien definida y es independiente de toda la arbitrariedad que pueda ocurrir en nuestra construcción. Algunas de sus propiedades son: (1) $f^*\Phi = \Phi f^*$, para cualquier mapeo de un complejo en otro, es entonces una operacíón invariante; (2) la definición de Φ se extiende al caso relativo y allí conmuta Φ con el operador cofrontera; (3) Φ es un homomorfismo; (4) Φ es una operación efectivamente calculable. El hecho de que esta operación puede no ser trivial se muestra en lo que sigue.

De aquerdo con el modelo introducido por Steenrod[11] junto con la operación Φ y el mapeo f podemos definir la operación funcional Φ_f.

TEOREMA 6.4 *Sea* $f: S^{n+2} \to S^n$ *un mapeo de una esfera-*$(n+2)$ *en una esfera-*n*, con* $n \geq 2$*. La operación funcional*

$$\Phi_f : H^n(S^n; Z_2) \to H^{n+2}(S^{n+2}; Z_2),$$

no es trivial cuando y solamente cuando el mapeo f *es esencial.*

---

[11] Steenrod, N.E. Ann. Math. Vol 50 (1949) pags. 954-988

En el anterior teorema una expresión cocadena puede dar se para Φ_f y que suministre un método efectivo para decidir la clase de homotopía de un mapeo simplicial dado $f:S^{n+2} \to S^n$

Sea K el complejo celular construido adjuntando una célula E^{n+3} a S^n, mediante el mapeo $f:S^{n+2} \to S^n$. Se sigue de 6.4 que $\Phi:H^n(K;Z_2) \to H^{n+3}(K;Z_2)$, mapeará el generador de $H^n(K;Z_2)$ sobre el generador de $H^{n+3}(K;Z_2)$ si y solamente si el mapeo dado f es esencial.

La principal aplicación de la nueva operación es el cálculo de la *tercera obstrucción.*

TEOREMA 6.5 *Sea* $f:K^n \to S^n$ *un mapeo del esqueleto-n de un complejo* K *en una esfera-n. Sea* s^n *un generador de* $H^n(S^n)$. *Supongamos que la primera y segunda obstrucción para la extensión de este mapeo se anule, esto es,* $\delta f^*s^n = 0$ *y* $Sq^2f^*s^n = 0$. *Entonces la tercera obstrucción se da mediante*

$$\Phi f^*sn \in H^{n+3}(K;\pi_{n+2}(S^n))/Sq^2H^{n+1}(K;\pi_{n+1}(S^n)) \quad .$$

En este último teorema los apareamientos para los diferentes grupos de coeficientes son los naturales. Siguiendo el modelo general dado por Steenrod[1], los mapeos de un complejo-(n+2) en una esfera-n pueden clasificarse. En particular podemos calcular los grupos de cohomotopía $\pi^n(K^{n+2})$ salvo hasta grupo extensiones.

La construcción de nuestra operación Φ corresponde a la relación $Sq^2Sq^2 = Sq^3Sq^1$. Usando otras relaciones sobre cuadrados iterados podemos generalizar la operación Φ de un modo obvio. En especial, con las relaciones 1.3 y 1.4 pueden construir se nuevas operaciones y con ellas pueden calcularse los mapeos esenciales obtenidos en 5.1.

7. Indicaremos aqui el método usado demostrando nuestras relaciones sobre cuadrados iterados.

El procedimiento ideado por Steenrod[12] para la construcción de las operaciones cuadráticas es mediante homomorfismos de las cadenas de K en las de $K\times K$ que son vecinas a la diagonal. El usa el grupo cíclico de orden dos, que opera en $K\times K$ permutando los factores. Al tratar los cuadrados iterados debemos considerar homomorfismos semejantes de K a $K^4 = K \times K \times K \times K$.

Una ruda descripción de nuestro procedimiento es paralelizar la construcción de los cuadrados; reemplazando K^2 por K^4 y tomando como grupo que opera en K^4 un grupo de orden 4, contenido en el grupo dihédrico de orden ocho. Obtenemos en esta forma un nuevo conjunto de operaciones invariantes $\begin{bmatrix} i \\ k \end{bmatrix}$ doblemente indicadas, cada una de las cuales es un homomorfismo

$$\begin{bmatrix} i \\ k \end{bmatrix} : H^q(K) \to H^{4q-i}(K) .$$

Se muestra en seguida que $\begin{bmatrix} i \\ k \end{bmatrix}$ coincide con una suma de cuadrados iterados $\Sigma\, Sq^r Sq^s$. Ello se logra por un calculo explícito.

Para probar que $\begin{bmatrix} i \\ k \end{bmatrix}$ contiene una simetría, que se expresa mediante la relación $\begin{bmatrix} i \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i \\ i-k \end{bmatrix}$, se usa un automorfismo de todo el grupo dihédrico. Así para cada i,k obtenemos que una suma de cuadrados iterados es igual a la otra. Estas son las identidades básicas.

---

[12] Steenrod, N.E., Ann.Math. Vol. 56(1952) pags. 47-67.

NOTA. Las investigaciones resumidas en el presente trabajo fueron auspiciadas en varias ocasiones por las instituciones siguientes: Instituto de Matemáticas de la Universidad Nacional de México, el Instituto Nacional de la Investigación Científica, La Higgings Foundation, Universidad de Princeton y las Rockefeller y Guggenheim Foundations del vecino país del Norte.

Vol.X, 1,2 BOLETIN DE LA SOCIEDAD MATEMATICA MEXICANA 1953

METRICAS SOBRE EL TORO SIN PUNTOS CONJUGADOS*

Por Herbert Busemann

1. La mayor parte de los teoremas, de naturaleza preponderantemente geométrica, sobre espacios de Riemann, prueban ser independientes del caracter riemanniano de la métrica, en el sentido de que reformulando las hipótesis muestran ser casos especiales de teoremas sobre espacios de Finsler. *Entonces aquellos teoremas para los cuales es imposible una extensión simple del caso riemanniano al de Finsler son de significado especial para la comprensión de ambos tipos de espacios.* Un ejemplo patente en esta dirección es el teorema de Beltrami que caracteriza los espacios de Riemann en los que las geodésicas son rectas, como los espacios de curvatura constante, mientras que la caracterización de espacios de Finsler con esta propiedad es uno de los problemas de Hilbert.

M. Morse, G. Hedlund y E. Hopf[1] demuestran que *un toro con métrica riemanniana sin puntos conjugados tiene curvatura nula*, de modo que la métrica es euclidiana.

La presente nota demuestra que este teorema es del tipo *no extendible*: las geodésicas de una métrica de Finsler sobre un toro sin puntos conjugados no necesitan ser rectas y para cualquier métrica sin puntos conjugados siempre existen muchas métricas esencialmente distintas, con las mismas geodésicas. Hay de hecho tanta arbitrariedad en la elección de la métrica, cuando se prescriben las geodésicas, que el problema de determinarlas todas resulta sin interés.

Parece sin embargo, razonable preguntar *¿cuáles sistemas de curvas sobre el toro, pueden ser geodésicas en una métrica sin puntos conjugados?*. La respuesta a esta pregunta (en términos del plano como espacio universal cubriente del toro) es el principal resultado de este trabajo.

2. Elegimos el plano $P - (x,y)$ como espacio universal cubriente del toro, con las translaciones

$$(1) \qquad T(m,n) : x' = x+m, \quad y' = y+n, \qquad m,n \text{ enteros},$$

tomadas como transformaciones cubrientes. Un sistema de geodésicas sobre el toro sin puntos conjugados, lleva a un sis-

---

[1] El teorema fué probado, bajo la hipótesis adicional de que no hay puntos conjugados, por M. Morse y G. Hedlund en [3]. En esta forma general se debe a E. Hopf [4].

Los números entre paréntesis rectangulares se refieren a la bibliografía, al final del trabajo.

tema S de curvas en P, con las propiedades siguientes:

I. *Cada curva en* S *es la imagen topológica del eje real* -t: $p(t) = (x(t), y(t))$, $-\infty < t < \infty$, *tal que* $x^2(t) + y^2(t) \to \infty$ *cuando* $t \to \infty$.

II. *Cualesquiera dos puntos de* P *están exactamente sobre una curva de* S.

III. *El sistema* S *se transforma en sí mismo bajo las translaciones* $T(m,n)$.

IV. *Si una curva* L *de* S *contiene a* q *y a* $qT(m,n)$, *entonces contiene a todos los puntos* $qT(\nu m,\nu n)$, $\nu = \pm 1, \pm 2, \ldots$

V. *El sistema* S *satisface el axioma del paralelismo: para una curva dada* L *en* S *y un punto dado* p, *que no esté en* L *existe exactamente una curva en* S *que no corta a* L *y que pasa por* p.

El resultado principal es el

TEOREMA 1. *Si una métrica en el plano* P *admite como geodésicas un sistema* S *de curvas con las propiedades* I *y* II *y que sea invariante bajo las translaciones* $T(m,n)$, *entonces* S *satisface* III, IV *y* V.

Recíprocamente dado en P *un sistema* S *de curvas que satisfagan* I *a* V, *entonces existe una métrica invariante bajo las* $T(m,n)$, *para la cual las curvas dadas de* S *son geodésicas.*

La necesidad de las condiciones IV y V se demostrará en primer lugar usando con libertad los resultados y conceptos de [1]. Cada geodésica es congruente con una recta euclidiana [1, pág. 79, Teorema 1]. Sea U el cuadrado unitario $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$. Para cualquier $T = T(m,n)$ para la que m y n no se anulan simultáneamente, existe un punto a

en U para el cual

$$aaT = \min_{p\in P} ppT$$

donde ab denota la distancia entre a y b para la métrica dada. Si q es cualquier punto de P, entonces existe una $T' = T(m',n')$ tal que $q_0 = qT' \in U$. Entonces

$$aaT \leqslant q_0q_0T = q_0T'q_0TT' = q_0T'q_0T'T = qqT \quad ;$$

asi pues

$$aaT = \min_{p\in P} ppT \ ;$$

(I) *Para cualquier* $T(m,n) \neq 1$ *los puntos* $qT(\nu m,\nu n) = qT^{\nu}$ *caen sobre una geodésica si y solamente si* $qqT = \min_{p\in P} ppT$; [véase 2, Teorema (6.)]

Se sigue que los puntos aT^{ν} están en una geodésica L que, en vista de II se transforma en sí misma bajo todas las T^{ν} y entonces los puntos qT están en L y $qqT = aaT$. Además para $T' = T(m',n')$ arbitraria y $a' = aT'$

$$a'a'T = aT'aT'T = aT'aTT' = aaT;$$

así es que los puntos $a'T^{\nu}$ están entonces sobre la geodésica L' que por supuesto es la línea LT'.

Ya que L y L' no pueden cortarse en más de un punto resulta que o son idénticas o no se cortan. Si q es un punto del plano que no está sobre ninguna $LT(m',n')$ entonces m' y n' pueden escogerse de modo que q está entre L y $LT(m',n')$. Si $S'(a,b)$ denota el segmento de geodésica que va de a á b con extremos a y b, entonces $\bigcup_{\nu=-\infty}^{\infty} S'(qT^{\nu},qT^{\nu+1})$ es en vista de [1, pag. 119 (C)] una curva que junto con L y L' limitan una región convexa. Entonces los puntos qT^{ν} están sobre una geodésica y de (1) resulta que $qqT = aaT$. Esto prueba IV.

Las consecuencias de este resultado son suficientemente interesantes en el caso del toro para establecerlas explícitamente.

TEOREMA 2. *En una metrización de un toro sin puntos conjugados todas las geodésicas mono-gonos*, son geodésicas cerradas. Existe exactamente una geodésica cerrada en una clase libre homotópica, a través de un punto dado y todas las geodésicas de cada clase tienen la misma longitud.*

3. Es considerablemente más difícil demostrar V. Por brevedad llamemos racional una línea que contenga dos puntos q y $qT(m,n)$, $(m,n) \neq (0,0)$ y entonces contenga también los puntos $qT(\nu m,\nu n)$. Es fácil establecer el axioma de paralelismo para las líneas racionales haciendo ver: si L contiene los puntos pT^{ν}, $p \neq 1$ y q no está en L entonces la linea L' que contenga los puntos qT^{ν} es la única que pasa por q y no corta L.

Si no sucediera así, la asíntota H (véase [1, Cap.III, 4]) por q a una de las orientaciones, digamos L^{+}, de L

---

*Traducción de "one-gons", para indicar polígonos de un solo lado.

sería distinta de L'. Supongamos que el círculo límite A con L^+ como rayo central (loc.cit.) corte a L en $\bar{p}$. Entonces AT^{-1} es el círculo límite con L^+ como rayo central y por qT^{-1} y $\bar{p}T^{-1}$ ([1, pag. 200 (d)]). Se ha probado justamente que $\bar{p}\bar{p}T^{-1} = qqT^{-1}$. Por otra parte H corta a AT^{-1} en un punto f que es el pié único de q sobre AT^{-1} ([1, pág. 102, Teorema 5]) y $qf = \bar{p}\bar{p}T^{-1}$. Pero entonces $qqT^{-1}=qf$ contradice la unicidad del pié.

Por medio de una transformación del toro (o del plano) sobre sí mismo llegamos a que las lineas euclidianas x = const. y y = const. representan geodésicas. Cualquier otra geodésica tiene entonces una representación de la forma

$$y = f(x), \quad -\infty < x < \infty ,$$

con $f(x)$ estríctamente creciente o decreciente y $|f(x)| \to \infty$ para $x \to \infty$. Ello debido a II y a la validéz del axioma de paralelismo para las lineas x = const. y y = conts. Se demostrará que para cualquier línea tal, su "pendiente"

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} , \tag{2}$$

existe y es distinta de 0 e ∞.

Considérese primero el caso en el que L es línea racional por el origen z y el punto $(m,n) = zT(m,n)$, $m \neq 0$, $n \neq 0$. Entonces $f(\nu m) = \nu F(m)$ y si $\nu m \leq x < (\nu+1)m$, entonces debido a que $f(x)$ es monotóna

$$|f(x) - f(\nu m)| < |f[(\nu+1)m] - f(\nu m)| = |f(m)| \quad ;$$

así es que con $|\theta_1| < 1$,

$$\frac{f(m)}{m} = \lim_{\nu\to\pm\infty} \frac{f(\nu m)}{\nu m} = \lim_{\nu\to\pm\infty} \frac{f(\nu m) + \theta_1 f(m)}{\nu m + \theta_2 m} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} .$$

Una línea racional L_k obtenida de L mediante la traslación $T(0,k)$ tiene la ecuación $y = f(x)+k$; así es que L_k tiene la misma pendiente que L. Si L' es cualquier línea paralela a L, con ecuación $y = f'(x)$, entonces, para una k, conveniente L', yace entre L y L_k de modo que L' también posee esta pendiente.

Supongamos ahora que $y = f(x)$ representa una línea arbitraria. Si no tiene pendiente, entonces existirán m y n distintas de 0 tales que

$$\liminf \frac{f(x)}{x} < \frac{m}{n} < \limsup \frac{f(x)}{x} .$$

Entonces la línea racional que contiene a los puntos $(0,f(x))\, T(\nu m, \nu n)$ cortaría a L más de una vez, sin coincidir con L.

La definición (2) de la pendiente implica

(3) *Líneas con pendiente distintas se cortan,*

(4) *Siempre existe una línea por un punto dado* $p = (x_0, y_0)$ *y con pendiente dada* $\mu \neq 0, \infty$.

Si $\mu = n/m$ entonces la línea que contiene a los puntos $pT(\nu m, \nu n)$ satisface (4). Si μ es irracional, escójanse una sucesión creciente de números racionales ρ_ν, $\nu = 1,2,\ldots$, que tienda a μ y también un número racional $\rho_0 > \mu$. Sea L_1

la línea racional por p y de pendiente ρ_i. Entonces L_{i+1} está entre L_i y L_0 y por consiguiente L_i tiende a una línea límite por p. Si L_i, L están respectivamente representadas por $y = f_i(x)$, $y = f(x)$, entonces $f_0(x) > f(x) > f_i(x)$ para $x > x_0$ e $i > 1$; luego la pendiente de L es cuando más ρ_0 y cuando menos μ. Puesto que $\rho_0 > \mu$ fué arbitrario L tiene pendiente μ.

Las proposiciones (3) y (4) muestran que el axioma de paralelismo se sigue de

(5) *Por un punto dado* p, *cuando más hay una línea con pendiente dada.*

Para μ racional, esto sigue del hecho de que el axioma de paralelismo vale para líneas racionales. Porque si $\mu = n/m$ y si la línea L que pasa por los puntos $pT(\nu m, \nu n)$ tiene por ecuación $y = f(x)$, entonces cualquier otra línea L' por $p = (x_0, y_0)$ tiene por ecuación, digamos $y = f'(x)$, con $f'(x) > f(x)$ para $x > x_0$. En vista de que L es paralela a $LT(0,1)$, quien tiene por ecuación $y = f(x) + 1$, L' deberá cortar a $LT(0,1)$ para alguna $x' > x_0$.

Entonces para una $\nu > 0$ conveniente, el punto $pT(\nu m, \nu n)$ está sobre $LT(0,1)$ y entre L' y L. La línea L'' por p y por $pT(\nu m, \nu n+1)$ tiene pendiente $\frac{\nu n+1}{\nu m} > \mu$ y la pendiente de L' no puede ser menor que la pendiente de L''.

Sea ahora μ irracional y para una demostración indirecta, supóngase que por p y con pendiente μ, hay dos líneas distintas L, K. Podemos suponer que p es el origen y que esas líneas tienen ecuaciones de la forma

$$L:\ y = f(x);\quad K:\ y = g(x)\quad \text{con}\quad g(x) > f(x)\quad \text{para}\quad x > 0\,.$$

Entonces para n entero > 0

$$(6) \qquad 0 < g(n) - f(n) < 1$$

ya que de otro modo el segmento S_n que conecta $(n,f(n))$ con $(n,g(n))$ contendría un punto de la forma (n,m) con m entero y entonces la línea racional L^* por p y (n,m) caería entre L y K. Por la primera parte de esta demostración, la pendiente de L sería menor que n/m. en tanto que la de K sería mayor que n/m. Puesto que la distancia es invariante bajo las $T(m,n)$, se sigue de [1, p.103, Teorema 6] que existe $\delta > 0$ tal que

$$g(n) - f(n) > \delta \quad \text{para} \quad n \geqslant 1 .$$

Para una κ dada, entera $\geqslant 3$ determínese el entèro m por

$$(7) \qquad m_\kappa \, \delta > \kappa + 1 > (m_\kappa - 1) \, \delta .$$

Entonces $\bigcup_{i=1}^{m_\kappa} S_i$ contiene $\kappa + 1$ puntos que representan o el mismo punto del toro o sus ordenadas difieren en enteros. Distinguimos dos casos.

a) Para alguna κ hay cuatro puntos de los cuales ninguna terna está en la misma geodésica. Un argumento familiar en las funciones elípticas muestra que la cerradura convexa de esos 4 puntos, en términos de S, contendría un "paralelogramo de periodos" Q cuyos lados están formados por segmentos de curvas en S. Ya que el dominio acotado por $y=f(x)$, $y=g(x)$ es convexo para $x > 0$, entonces Q estaría en este dominio; por otro lado Q contendría un punto equivalente a p y de la forma (m,n) lo cual ya se hizo ver que es imposible.

b) Cuando menos κ de los $\kappa+1$ puntos están en una geodésica H^κ. Entonces H^κ es racional y tiene pendiente racional ρ_κ. Puesto que ningún par de los κ puntos están en la misma S_1, las abscisas n_i^κ de los κ puntos son distintas. Sea $n_i^\kappa < n_{i+1}^\kappa$. Entonces $n_\kappa^\kappa - n_1^\kappa > \kappa - 1$ y en vista de (7) $n_1^\kappa/n_\kappa^\kappa \leq 1 - (\kappa-1)/m_\kappa < 1-\delta/4$. Ya que

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{f(x_1)}{x_1} + \frac{(x_2/x_1)\ [f(x_1)/x_1 - f(x_2)/x_2]}{1 - x_2/x_1}$$

se sigue que para $x_1 \to \infty$ y $0 < x_2/x_1 \leq \theta < 1$

$$\lim_{x_1\to\infty} \frac{f(x_1)}{x_1} = \lim_{x_1\to\infty} \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$$

donde x_2 puede estar acotada o no estarlo.

Entonces en el caso presente obtenemos de $n_1^\kappa/n_\kappa^\kappa < 1-\delta/4$,

$$\lim_{\kappa\to\infty} \frac{f(n_\kappa^\kappa) - f(n_1^\kappa)}{n_\kappa^\kappa - n_1^\kappa} = \lim_{\kappa\to\infty} \frac{g(n_\kappa^\kappa) - g(n_1^\kappa)}{n_\kappa^\kappa - n_1^\kappa} = \mu$$

y por consiguiente de (6) tambien será

$$(8) \qquad \lim_{x_1\to\infty} \frac{f(n_\kappa^\kappa) - g(n_1^\kappa)}{n_\kappa^\kappa - n_1^\kappa} = \lim_{x_1\to\infty} \frac{g(n_\kappa^\kappa) - f(n_1^\kappa)}{n_\kappa^\kappa - n_1^\kappa} = \mu$$

Por otra parte

$$(\kappa-1) \min_j (n_j^\kappa - n_{j-1}^\kappa) \leq n_\kappa - n_1 \leq m_\kappa - 1$$

y por (7)

$$\min_j (n_j^\kappa - n_{j-1}^\kappa) \leqslant (m_\kappa - 1)/(\kappa - 1) < 2/\delta \quad .$$

Entonces el denominador de la pendiente ρ_κ de H^κ (si reducido) no puede sobrepasar $2/\delta$. Puesto que μ es irracional existe una $\epsilon > 0$; independiente de κ, tal que $|\rho_\kappa - \mu| > \epsilon$. Pero si $y = L(x)$ representa H^κ, puesto que los κ puntos caen entre L y K,

$$\frac{g(n_\kappa^\kappa) - f(n_1^\kappa)}{n_\kappa^\kappa - n_1^\kappa} > \frac{h(n_\kappa^\kappa) - h(n_1^\kappa)}{n_\kappa^\kappa - n_1^\kappa} = \delta > \frac{f(n_\kappa^\kappa) - g(n_1^\kappa)}{n_\kappa^\kappa - n_1^\kappa}$$

lo que junto con (8) contradice $|\rho_\kappa - /\mu| > \epsilon$. Esto completa la demostración de V.

4. Regresamos ahora a la *segunda parte del Teorema 1*. Las condiciones I y II garantizan por si sólas que las curvas tienen en S todas propiedades usuales de continuidad e intersección (comparar [1, Cap. III, § 3]. Podemos por consiguiente nuevamente suponer que las curvas x = const, y = const representan curvas de S y por el axioma de paralelismo todas las otras curvas tienen nuevamente representaciones de la forma $y = f(x)$ con $f(x)$ estrictamente monótonas y $|f(x)| \to \infty$ para $x \to \infty$.

Tómese cualquier par m, n con $m > 0$ y denótese por L_p la curva en S que contenga los puntos $pT(\nu m, \nu n)$. Para p, q cualesquiera, las curvas L_p y L_q o son paralelas o son idénticas. Digamos que $y = f_p(x)$ representa a L_p (pues to que se admite $n = 0$, $f_p(x)$ puede ser constante). El que $T(m,n)$ transforme a L_p en sí misma, implica $f_p(x+m) =$ $= f_p(x) + n$; entonces $f_p(x) - f_q(x)$ es periódica de período m y es independiente de x_0 el área

$$d_{m,n}(p,q) = \int_{x_0}^{x_0+m} |f_p(x)-f_q(x)|\, dx$$

del "paralelogramo" Q limitado por L_p, L_q, $x = x_0, x = x_0 + m$. Una translación arbitraria $T' = T(m',n')$ transforma Q en un paralelogramo que tiene la misma relación con pT' y qT' que Q la tiene con p y q. Pero T' deja invariante el área; entonces

(9) $$d_{m,n}(p,q) = d_{m,n}(pT', qT') \quad ;$$

obviamente $d_m(p,q) = d_{m,n}(p,q)$ y

(10) $$d_{m,n}(p,q) = 0 \qquad \textit{si y solamente si } L_p = L_q \,.$$

La arbitrariedad de x_0 lleva a

(11) $d_{m,n}(p,q) + d_{m,n}(p,r) = d_{m,n}(p,r)$ *si y solamente si la línea* L_q *cae dentro de la banda cerrada limitada por* L_p y L_r

(12) $d_{m,n}(p,q) + d_{m,n}(p,r) > d_{m,n}(p,r)$ *si* L_q *no cae en esta banda.*

Sea δ la diferencia entre las ordenadas de p y q y determínese el entero κ por $\kappa-1 < |\delta| < k$. Entonces $T(0,\pm\kappa)$ transforma a L_p en una linea L_r para la cual L_q cae entre L_p y L_r (si L_r es distinta de L_p). Entonces

$$(13) \qquad d_{m,n}(p,q) < d_{m,n}(p,r) = \kappa d_{m,n}(p,pT(0,1)) \leq (|\delta|+1)\lambda_{m,n} \quad ,$$

donde $\lambda_{m,n}$ solo depende de m y n. Una distancia que satisface nuestras exigencias será

$$(14) \qquad pq = \Sigma' d_{m,n}(p,q)\ \lambda^{-1}_{m,n} 2^{-m-|n|} \quad ,$$

donde el acento indica que la suma se extiende a todos los pares m,n con $m > 0$ y toda n pero tales que $n/m \neq n'/m'$ para distintos pares m,n y m',n'.

Si se dan p y q y su diferencia de ordenadas es δ entonces por (13) es $d_m(p,q)\ \lambda^{-1}_{m,n} < |\delta| + 1$ para todas m,n siendo pq siempre finita. (9) muestra que pq es invariante bajo todas las $T(m',n')$ y (11), (12) implican que pq satisface la desigualdad del triángulo. $pp = 0$ por (10) y $pq = qp > 0$ para $p \neq q$ se sigue de $d_{m,n}(q,p) = d_{m,n}(q,p)$ y de (10) ya que para m y n convenientes, las lineas L_p y L_q (en la notación) serán distintas.

Entonces pq *satisface los axiomas para un espacio métrico*. Para que las curvas de S sean las geodésicas necesita hacerse ver: para tres puntos distintos p,q,r

(15) $\quad pq + qr = pr$ *si* q *está en el segmento* σ *de la curva de* S *que pasa por* p *y* r

(16) $pq + qr > pr$ *si* q *no está sobre* σ.

Si q está en σ entonces para m,n cualesquiera, la linea L_q o bien contiene a p,r o bien está entre L_p y L_r. Entonces se sigue de (10) y (11) que vale (15).

Si finalmente q no está en σ, sea L la curva de S por dos puntos arbitrarios q' y q'' interiores (respecto a S) respectivamente a los segmentos de q a p y de p a r. Entonces L separa σ de q. Si L contiene a los puntos $q'T(\nu m,\nu n)$ para m,n convenientes y $m > 0$, entonces (16) se sigue de (12). Si L no tiene esta propiedad (o es una linea $x = \text{const}$ o no es racional) entonces el axioma de paralelismo implica la existencia de $m > 0$ y n tales que la línea L' que contiene $q'T(\nu m,\nu n)$ está tan cercana a L que también separa a σ y entonces a q de p y r. Nuevamente (16) se sigue de (12).

El que la distancia pq sea equivalente a la distancia euclidiana se deriva fácilmente ya sea de la definición analítica de pq o de las propiedades geométricas de S. La compacidad finita de pq se sigue de su invariancia bajo $T(m',n')$.

5. Unos cuantos ejemplos concluyen este trabajo. La construcción de la distancia pq en la sección precedente parece remitir a una métrica Minkowskiana si las curvas en S son las líneas euclidianas $ax + by + c = 0$. Esto es empero accidental porque pudieron usarse otras funciones $d_{m,n}(p,q)$ en vez del área. Por ejemplo si $p_1 = (x_1,y_1)$ entonces

$$p_1p_2 = [(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2]^{\frac{1}{2}} + |7y_1 + \operatorname{sen} 2\pi y_1 - 7y_2 - \operatorname{sen} 2\pi y_2|$$

remite a una métrica en la cual las líneas euclidianas son las geodésicas porque $7y + \operatorname{sen} 2\pi y$ crece monótonamente. Además esta métrica es invariante bajo las $T(m,n)$. En vez de $7y + \text{sen}\ 2\pi y$ pudieron usarse muchas otras funciones; pudo añadirse un término en las x_1, formado semejantemente; pudo haberse substituido la distancia euclidiana que aparece en la definición de p_1p_2 por una distancia minkowskiana arbitraria. En fin pudo modificarse la distancia euclidiana de modos menos obvios. Esto aclara un punto tratado en la introducción: *hay tanto a elegir que el problema de determinar todas las métricas que pertenecen a un sistema dado de curvas carece de interés.*

Uno puede preguntar si las condiciones I, II y III implican o no IV o V. El ejemplo 1 en [1, p. 105] muestra que no es así.

Finalmente damos un ejemplo que confirma lo afirmado en la introducción de que las *curvas de un sistema* S *que satisfaga las condiciones* I *a* V *no necesitan ser rectas.* Esto significa lo que sigue: no existe en general una transformación topológica de P sobre otro plano P′ bajo la cual el sistema S se transforme en el de las líneas euclidianas de P′. Una condición obviamente necesaria (y de hecho también suficiente) para que tal transformación existiera es que el *Teorema de Desargues* valiera para las curvas de S. Sistemas que satisfagan I, II y V pero no el Teorema de Desargues son bien conocidos, pero un sistema tal que satisfaga III y IV no ha llegado a oidos del autor.

Para construir tal sistema S primero definimos ciertas funciones $f_t(x)$ en el intervalo $0 \leqslant x \leqslant 1$. Póngase

$$f_1(x) = x \qquad \text{y para } n \text{ entero} > 1$$

$$f_n(x) = \begin{cases} a_n x & \text{para } 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2} \\ b_n(x - \frac{1}{2}) + \frac{1}{2} a_n & \text{para } \frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1 \end{cases}$$

donde

$$a_n = 2n-1-2c_n, \quad b_n = 1+2c_n, \quad c_n = \sum_{\nu=1}^{n} 10^{-\nu}$$

entonces $f_n(1) = n$ y $f'_{n+1}(x) - f'_n(x) > 0$ para $x \neq \frac{1}{2}$ de modo que $f_{n+1}(x) - f_n(x)$ es creciente. Además póngase

$$f_t(x) = (n+1-t)\, f_n(x) + (t-n)\, f_{n+1}(x) \quad \text{si} \quad n<t<n+1 .$$

Entonces es fácil ver que $f_{t_2}(x) - f_{t_1}(x)$ crece para $1 < t_1 < t_2$ y que $f\,(1) = t$.

Ahora defínase $g_t^b(x)$ para toda x, toda t y toda b, mediante

$$g_t^b(x) = f_t(x-m) + mt + b \qquad \text{para} \quad m \leqslant x < m+1$$

Puesto que

$$(g_{t_2}^{b_2}(x) - g_{t_1}^{b_1}(x))' = f'_{t_2}(x-m) - f'_{t_1}(x-m) \quad ,$$

la diferencia $g_{t_2}^{b_2}(x) - g_{t_1}^{b_1}(x)$ crece para $t_2 > t_1$. Entonces las curvas $y = g_{t_1}^{b_1}(x)$, $y = g_{t_2}^{b_2}(x)$ se cortan mas una vez. Además $y = g_t^b(x)$ tiene pendiente en el sentido de (2).

El sistema S se define entonces como constante de todas las curvas $y = g_t^b(x)$, todas las líneas $y = mx + b$ con $b < 1$ y las líneas $x = \text{const}$. Debido a que $(g_t^b(x))' \geqslant 1$, cada línea en S corta a cada $y = g_t^b(x)$ justamente una vez.

Por cualquier punto del plano para justamente una línea con pendiente dada (2). Entonces el axioma del paralelismo vale. Fácilmente se verifica que dos puntos distintos del plano están exactamente (y no sólo cuando mas) en una curva de S.

Para demostrar que el sistema S posee la propiedad IV, basta probar lo que sigue: si $g_t^b(x') = y'$ y $g_t^b(x'+m) = y'+n$, donde m y n son enteros, entonces $g_t^b(x'+\nu m) = y'+\nu n$. Determínese el entero κ por $\kappa \leq x' < \kappa + 1$. Entonces si se pone $f_t(x'-\kappa) + b = W$, será $y' = g_t^b(x') = W+\kappa t$, $g_t^b(x+m) = W + (\kappa+m)t = W+\kappa t+n$ y por consiguiente $t = n/m$. Además

$$g_t^b(x'+\nu m) = W + (\kappa+\nu m)t = y'+\nu mt = y'+\nu n \quad .$$

Que el teorema de Desargues no vale en este sistema se ve como en los otros ejemplos bien conocidos de sistemas no desarguesianos.

Dos triángulos que estén en la relación de Desargues, en el sentido ordinario se colocan de modo tal que todas menos una de las líneas que entran en el teorema tengan pendientes < 1 y sean entonces curvas de S. La restante línea L tiene pendiente > 1. La curva $y = g_t^b(x)$ por dos de los tres puntos de la configuración desarguesiana sobre L no contendrán en general al tercer punto.

El sistema S se transforma en si mismo no solamente bajo las T(m,n) sino también bajo todas las translaciones $x' = x + m$, $y' = y + b$ en las que m sea entero, pero b cualquier número real. Fácilmente se verifica que la métrica construida en la sección 4 es invariante bajo todas esas translaciones. Así

TEOREMA 3. *Existen metrizaciones sobre el toro sin puntos conjugados que tienen por grupo de movimientos uno de un parámetro y para las cuales las geodésicas no sean rectas.*

El sistema S está construido de modo tal que aun exhibe un hecho que sorprende a primera vista. Las curvas $y = g_n^o(x)$ de S tienden a la curva $x = 0$ cuando $n \to \infty$, pero existen $\epsilon > 0$ independiente de n y un disco circular con radio ϵ (cuyo centro depende de n) tal que $g_n^o(x)$ no entra al disco.

University of Southern California
Los Angeles, Calif., 1951.

BIBLIOGRAFIA

[1] H.Buseman. Metric Methods in Finsler Spaces and in the Foundations of Geometry. Annals of Mathematics. Studies. No. 8. Princeton 1942.

[2] H.Buseman. Spaces with Non-Positive Curvature, Acta Math. Vol. 80 (1944), pags. 261 a 310

[3] E.Hopf. Closed Surfaces without conjugates points. Proc. Nac. Acad. Sc., Vol. 34 (1948), pags. 47 a 51.

[4] M.Morse y G.Hedlund. Manifolds without conjugate points. Trans. Am. Math. Soc., Vol. 51 (1942), pags. 362 a 382.

Vol.X, 1,2 BOLETIN DE LA SOCIEDAD MATEMATICA MEXICANA 1953

SOME FORMULAS IN THE THEORY OF SURFACES*

Shiing-shen Chern

Introduction

The object of this paper is to study certain integro-differential invariants of a closed orientable surface differentiably imbedded in the ordinary Euclidean space. Some identities between them will be established. As applications we shall give new proofs of some theorems of Liebmann characterising the sphere as the only closed convex surface with constant mean curvature and constant Gaussian curvature respectively.

1. Fundamental Formulas

To write down the basic formulas in the theory of surfaces we follow the classical treatment of G. Darboux and

*Recibido para el Congreso Científico Mexicano, Septiembre 1951.

E. Cartan by employing the method of moving trihedrals[1]. A right-handed trihedral $Pe_1e_2e_3$ in the Euclidean space E consists of a point P and three mutually perpendicular unit vectors e_1, e_2, e_3, which form a right-handed system. With the choice of a fixed origin 0 in E, P determines and is determined by a position vector which will also be denoted by P. When a family of such trihedrals is given, depending differentiably on certain parameters, we can write

$$(1) \qquad \begin{aligned} dP &= \sum_k \omega_k e_k \ , \\ de_i &= \sum_k \omega_{ik} e_k \ , \end{aligned} \qquad i,k = 1,2,3,$$

where ω_i, ω_{ik} are linear differential forms (in these parameters) satisfying the relations

$$(2) \qquad \omega_{ik} + \omega_{ki} = 0 \ .$$

Since the exterior derivative of an exterior derivative is zero, we have

$$(3) \qquad \begin{aligned} d(dP) &= 0 \ , \\ d(de_i) &= 0 \ . \end{aligned}$$

Applying these relations to (1), we get

---

[1] A modern version of this method can be found in W. Blaschke, Elementare Differentialgeometrie, Berlin 1950.

$$
(4) \qquad \begin{aligned} d\omega_i &= \sum_k \omega_k \wedge \omega_{ki} , \\ d\omega_{ij} &= \sum_k \omega_{ik} \wedge \omega_{kj} , \end{aligned} \qquad i,j,k = 1,2,3,
$$

where the "wedge product" is the product in the sense of exterior multiplication of Grassmann. Equations (4) are call the equations of structure of the group of proper motions in E.

Now suppose a closed orientable surface S be given in E. It determines a family of (right-handed) triehedrals $Pe_1e_2e_3$ such that $P \epsilon S$ and e_3 is the unit vector in the direction of the outward normal of S at P. For this family of trihedrals we have

$$
(5) \qquad \omega_3 = 0 .
$$

The first equation of (4) then gives

$$
\omega_1 \wedge \omega_{13} + \omega_2 \wedge \omega_{23} = 0 .
$$

Since ω_1, ω_2 are linearly independent, this implies the relations

$$
(6) \qquad \begin{aligned} \omega_{13} &= a\omega_1 + b\omega_2 , \\ \omega_{23} &= b\omega_1 + c\omega_2 . \end{aligned}
$$

The coefficients a,b,c in these linear combinations are not invariants of S. But it is easy to construct invariants from them. In particular, the mean curvature H and the Gaussian curvature K are given by the formulas

$$(7) \qquad 2H = a + c \quad , \qquad K = ac - b^2 \quad .$$

The so-called first and second fundamental forms are

$$(8) \qquad I = dP^2 = \omega_1^2 + \omega_2^2 \quad , \qquad II = -dPde_3 = \omega_1 \omega_{13} + \omega_2 \omega_{23} = a\omega_1^2 + 2b\omega_1\omega_2 + c\omega_2^2 \quad .$$

Their ratio II/I is the normal curvature. We also observe that the element of area is given by the exterior quadratic form

$$(9) \qquad d\Sigma = \omega_1 \wedge \omega_2 \quad .$$

2. Some Identities

We consider the scalar products

$$(10) \qquad y_i = Pe_i \quad .$$

Geometrically, y_i is the oriented distance from the origin 0 to the plane Pe_je_k, $i,j,k \neq 1,2,3$. In particular, y_3, which we shall also write as p, is the oriented distance from 0 to the tangent plane $\pi(P)$ to S at P. The purpose of this paper is to study the integrals

$$A_n = \int p^n \, d\Sigma \,,$$

(11) $$B_n = \int p^n \, H d\Sigma \,,$$

$$C_n = \int p^n \, K d\Sigma \quad ,$$

where the integrations are over S. Moreover, let P' be the foot of perpendicular from O to $\pi(P)$, and let d_P be the distance PP' and ρ_P the normal curvature in the direction PP'. We introduce also the integrals

$$D_n = \int p^n \rho_P \, d_P^2 \, d\Sigma \,,$$

(12) $$E_n = \int p^n \, d_P^2 \, K d\Sigma \quad ,$$

where the integrations are again extended over S. The main result of this paper consists in the identities

$$2A_{n-1} + 2B_n - (n-1)\, D_{n-2} = 0 \quad ,$$

(13) $$2B_{n-1} + 2C_n - (n-1)\, E_{n-2} = 0 \,.$$

Before proceeding to the proof let us notice that the integrals introduced in (11) and (12) are independent of the choice of the point O and are therefore invariants of the surface S. At least for small values of n, they have simple geometrical meanings. For instance, A_0 is the area A of S, B_0 is the integral of mean curvature $-M$ first considered by Minkowski in the case of convex surfaces, while C_0 is 2π times the Euler characteristic χ of S, by the Gauss-

Bonnet formula.

To prove the formulas (13) we derive first from (10) and (1):

$$
(14)\quad
\begin{aligned}
dy_1 &= \omega_1 + \omega_{12}\, y_2 + \omega_{13}\, y_3 , \\
dy_2 &= \omega_2 + \omega_{21}\, y_1 + \omega_{23}\, y_3 , \\
dy_3 &= \quad - \omega_{13}\, y_1 - \omega_{23}\, y_2 .
\end{aligned}
$$

From (14) and (4) we then find

$$
\begin{aligned}
d(y_1\, \omega_2 - y_2\, \omega_1) &= 2(1 + pH)\, \omega_1 \wedge \omega_2 , \\
d(y_1 \omega_{23} - y_2 \omega_{13}) &= 2(H + pK)\, \omega_1 \wedge \omega_2 .
\end{aligned}
$$

It follows that

$$
(15)\quad
\begin{aligned}
d\{p^{n-1}(y_1\omega_2 - y_2\omega_1)\} &= \{2p^{n-1}(1+pH) - (n-1)p^{n-2} \\
&\qquad (ay_1^2 + 2by_1y_2 + cy_2^2)\}\, d\Sigma , \\
d\{p^{n-1}(y_1\omega_{23} - y_2\omega_{13})\} &= \{2p^{n-1}(H+pK) - (n-1)p^{n-2} \\
&\qquad (y_1^2 + y_2^2)\, K\}\, d\Sigma .
\end{aligned}
$$

On the other hand, we have

$$
(16)\quad
\begin{aligned}
d_p^2 &= y_1^2 + y_2^2 , \\
d_p^2\, \rho_p &= ay_1^2 + 2by_1y_2 + cy_2^2 .
\end{aligned}
$$

Since the linear differential forms $p^{n-1}(y_1\omega_2-y_2\omega_1)$ and $p^{n-1}(y_1\omega_{23}-y_2\omega_{13})$ remain invariant under a rotation of the vectors e_1, e_2, they are defined on S. Applying Stokes's Theorem to (15), we find therefore that the integrals over S of the right-hand sides of (15) are zero. These give precisely the identities (13).

For $n = 1$ formulas (13) give

$$A_0 + B_1 = 0 ,$$

$$B_0 + C_1 = 0 ,$$

or

$$\int pHd\Sigma + A = 0 \quad ,$$

(17)

$$\int pKd\Sigma - M = 0 \quad .$$

The second formula in (17) is a well-known formula of Minkowski, which he established for convex surfaces. According to our derivation it is valid for a closed surface of arbitrary genus.

The quadratic polynomials in x defined by

$$\Delta_n(x) \equiv \int p^n \begin{vmatrix} a-x & b \\ b & c-x \end{vmatrix} d\Sigma = C_n - 2xB_n + x^2 A_n \quad , \tag{18}$$

seem to deserve some interest. For $n = 0, 1$ we have

$$\Delta_0(x) = 2\pi X + 2xM + x^2 A \quad ,$$

(19)

$$\Delta_1(x) = M + 2xA + x^2 A_1 \quad .$$

If S is convex, A_1 is clearly 3 times the volume V bounded by S. Since $X = 2$, the conditions that the discriminants of $\Delta_0(x)$, $\Delta_1(x)$ are non-negative can be written

$$M^2 - 4\pi A \geqslant 0 ,$$
(20)
$$A^2 - 3MV \geqslant 0 .$$

These are precisely the well-known "isoperimetric inequalities". It seems therefore reasonable to conjecture that

$$B_n^2 - A_n C_n \geqslant 0 ,$$

but a proof appears to be difficult. This conjecture is supported moreover by the fact that the discriminant of the integrand in (18) is

$$p^{2n} (H^2-K) ,$$

which is everywhere $\geqslant 0$.

3. Applications

We shall apply the above results to the cases that H and K are respectively constant. Suppose H be constant. Then

$$B_n = HA_n ,$$

and we have

$$\Delta_n(H) = C_n - H^2 A_n$$

From (17) we get

$$A_0 + HA_1 = 0 , \quad HA_0 + C_1 = 0 .$$

It follows that

$$\int p \begin{vmatrix} a-H & b \\ b & c-H \end{vmatrix} d\Sigma = \Delta_1(H) = C_1 - H^2 A_1 = 0 .$$

Now we have

$$\begin{vmatrix} a-H & b \\ b & c-H \end{vmatrix} = -\tfrac{1}{4}(a-c)^2 - b^2 \leqslant 0 .$$

If, therefore, there is a point O such that $p < 0$ for all points P of S, the integrand in $\Delta_1(H)$ will keep the same sign and the relation $\Delta_1(H) = 0$ is possible only when

$$a = c, \quad b = 0 ,$$

that is, only when every point of S is an umbilic. This leads to the theorem:

A closed surface of constnat mean curvature is a sphere, if there is a point lying on the negative sides of all tangent planes of S. *In particular, a closed convex surface of constant mean curvature is a sphere.*

Consider next the case that K is constant, from which we shall derive the theorem of Liebmann that S is a sphere. In fact, we have

$$C_n = KA_n$$

Since K has to be positive, we choose

$$R = +\sqrt{K} > 0 .$$

From (18) we get, be applying the formulas (17),

$$\Delta_0(R) = 2R^2 (A_0 + RA_1) ,$$

$$\Delta_1(R) = 2R (A_0 + RA_1) .$$

It follows that

$$\Delta_0(R) = R\Delta_1(R) . \tag{21}$$

Since S is convex, 0 can be chosen to be an interior point of S, so that $p < 0$. On the other hand, we know that

$$\begin{vmatrix} a-R & b \\ b & c-R \end{vmatrix} \leqslant 0 ,$$

and that the equality sign holds only when $R = a = c$, $b = 0$. It follows that

$$\Delta_0(R) \leqslant 0 , \quad \Delta_1(R) \geqslant 0 .$$

Hence the equation (21) is possible only when

$$\Delta_0(R) = \Delta_1(R) = 0 ,$$

that is, only when

$$R = a = c , \quad b = 0 .$$

This proves that S is a sphere.

Added. August 14, 1952.

On p. 34 line 14, immediatly after formula (13), read:

"Before proceeding to the proof let us notice that the integrals introduced in (11) and (12) are, for some values of n, independent of the choice of the point O and are therefore invariants of the surface S. This is true for $n = 0, 1$, and the corresponding invariants have simple geometrical meanings. For instance, A_0 is the area A of S, B_0 is the integral of mean curvature $-M$ first considered by Minkowski in the case of convex surfaces, while C_0 is 2π times the Euler characteristic χ of S, by the Gauss-Bonnet formula.

University of Chicago.

Vol.X, 1,2 BOLETIN DE LA SOCIEDAD MATEMATICA MEXICANA 1953

NON-NORMAL TRUTH-TABLES FOR THE PROPOSITIONAL CALCULUS*

by Alonzo Church

Besides the usual two-valued truth-tables for the propositional calculus, it is known that there are many characteristic[1]** systems of truth-tables (characteristic matrices[2]) in which there are more than two truth-values.

In particular, since the two-valued truth-tables constitute a two-element Boolean algebra[3], any sustem of truth-tables having the two-element Boolean algebra as a homomorphic image[3] will be a characteristic system if the designated truth-values are taken to be those which have the unit of the Boolean algebra as their image. In this way characteristic systems of truth-tables may be obtained with any number of truth-values (not less than two)[4]. Characteristic systems of truth-tables of this kind we shall call *normal in the sense of Carnap*, and

*Recibido para el Congreso Científico Mexicano, Septiembre 1951.
**Véanse todas las notas al final del artículo.

all others will be called *non-normal in the sence of Carnap*[5], or *weakly non-normal.*

A characteristic system of truth-tables may also be obtained from an arbitrary Boolean algebra by taking the unit, I, of the algebra as the single designated value[6]. If the Boolean algebra has more than two elements, the resulting characteristic system of truth-tables is weakly non-normal. And we may obtain additional weakly non-normal characteristic systems by means of homomorphisms, as before, taking any system of truth-tables to which the Boolean algebra is homomorphic, and taking the designated truth-values to be those which have the unit of the Boolean algebra as image.

Characteristic systems of truth-tables obtained in this way are necessarily *regular*[7], in the sense that $p \supset q$ never has a designated truth-value when p has a designated truth-value and q a non-designated truth-value.

An example of such a characteristic system of truth-tables is provided in Tables I, at the end of this paper. Indeed, Tables I exhibit a four-element Boolean algebra, with the unit, I, of the Boolean algebra as the designated truth-value. Thus they are the simplest example of a weakly non-normal characteristic system of truth-tables for the propositional calculus (or, as we shall say briefly, of weakly non-normal truth-tables for the propositional calculus).

Tables II and III provide examples of weakly non-normal truth-tables for the propositional calculus which are of a different kind[8], since they are non-regular.

However, all three examples, Tables I, II, and III, are in a certain sense trivial, since they become normal in the sense of Carnap if (without other change) the designated truth-values are taken to be b and 1, instead of 1 alone. In fact, in each case, a simple proof that the tables are characteristics can be obtained by first showing that the tautologies are the same whether b and 1 or 1 alone are taken as the designated truth-values, and then observing that, when b and 1 are taken as designated, the tables are normal in the sense of Carnap.

Thus every example so far found of a characteristic system of truth-tables for the propositional calculus either is a Boolean algebra or reduces to such under a homomorphism. It is morover well known that the propositional calculus is *formally* a Boolean algebra, in the sense that every identically true Boolean equation becomes a theorem of the propositional calculus if the variables in the Boolean equation are replaced by (or reconstrued as) propositional variables, the signs for the Boolean complement, the Boolean product, and the Boolean sum are replaced respectively by the signs of negation, conjunction, and disjunction, the signs, 0 and 1, for the Boolean zero and unit are replaced by (e.g.) $p \sim p$ and $p \vee \sim p$ respectively, and the sign of equality, =, is replaced by the sign of material equivalence, ≡. Likewise every statement of inclusion which is identically true for Boolean algebras becomes a theorem of the propositional calculus if the same replacements are made as just described and at the same time the sign of inclusion, $\subset$, is replaced by the sign of material implication, $\supset$.

For this reason it might be natural to suppose that every characteristic system of truth-tables for the propositional calculus either is a Boolean algebra (of two or more elements) or reduces to such under a homomorphism.

And indeed this does follow if we assume that the truth-table of $\supset$ is regular (in the sense already explained). For since

$$[p \equiv q] \supset [q \equiv p]$$

and

$$[p \equiv q] \supset [[q \equiv r] \supset [p \equiv r]]$$

are theorems of the propositional calculus and therefore tautologies according to the given system of truth-tables, it follows from the regularity of the truth-table of $\supset$ that the truth-table of $\equiv$ is symmetric and transitive. I.e., if, for particular truth-values of p and q, $p \equiv q$ has a designated value, then $q \equiv p$ must have a designated value; and if, for particular truth-values of p, q, and r, both $p \equiv q$ and $q \equiv r$ have designated values, then $p \equiv r$ must have a designated value. The truth-values are thus divided into equivalence-classes, two truth-values x and y belonging to the same equivalence-class if and only if $p \equiv q$ has a designated truth-value for the values x, y of p, q. Moreover the equivalence-class to which the value of an expression P belongs will remain unchanged if the value x of one of the variables, say p, is altered in such a way as to leave unchanged the equivalence-class to which x belongs as follows from the regularity of the truth-table of $\supset$, together with the fact that

$$[p \equiv q] \supset [P \equiv Q]$$

is a theorem of the propositional calculus if Q is obtained from P by substituting q for p. Hence a homomorphism such that two truth-values have the same image if and only if they belong to the same equivalence-class will be a homomorphism of the given system of truth-tables into a Boolean algebra[9].

If, however, regularity fails in the truth-table of $\supset$, there is the possibility of obtaining a characteristic system of truth-tables for the propositional calculus of such a sort that no Boolean algebra is homomorphic to it. Such a characteristic system of truth-tables we shall call *strongly non-normal.*

Tables IV are a rather obvious example of strongly non-normal truth-tables for the propositional calculus, being so constructed that they follow the usual two-valued truth-tables with regard to the values 0 and 1, and that the value of an expression is always h for any system of values of the propositional variables that includes the value h for any system of values of the propositional variables that includes the value h for one of the variables. A large variety of more elaborate variations on this theme are evidently possible.

Perhaps more interesting as an example of strongly non-normal truth-tables for the propositional calculus are Tables V, due to Z.P. Dienes[10].

In order to see that Tables V are characteristic of the propositional calculus, notice first that the usual two-valued truth-tables are followed in the case of the values 0 and 1, and hence that no non-theorem can be a tautology. Now for an expression P, consider a system S of values of its variables that includes the value h for one or more of them. At each occurence of a variable having the value h, replace the h by 0 or 1, taking the various occurrences independently, and abandoning the requirement (as regards these variables) that the same value be assigned to different occurrences of the same variable. If on doing this in all possible ways the value of P is always 0 or always 1, then the value of P is 0 or 1, respectively, for the system S of values of its variables; but otherwise the value of P is h for the system S of values of its variables. I.e., Tables V are so constructed that this will be the case, as may readily be verified. Since h is a designated value, it follows that every tautology in the truth-values 0 and 1 remains a tautology when the additional truth-value h is admitted. Hence every theorem of the propositional calculus is a tautology (in the three truth-values, 0, h, 1).

These examples are brought together here in order to raise the question whether exist other strongly non-normal truth-tables for the propositional calculus, beyond those cited (together with direct products and other obvious elaborations); or more generally, to raise the question of a survey or characterization in some sense of the possible strongly non-normal truth-tables for the propositional calculus.

Another motive is the suggestion, which was made to me by Paco Lagerström ten years or more ago, that use may be made of non-normal truth-tables for the propositional calculus in order to extend to the functional calculi of first and higher orders, and other related systems, the method of proving independence of axioms which is familiar in the case of the propositional calculus.

In question at that time were only Boolean algebras, in the rôle of weakly non-normal truth-tables. And the remark was made in particular by Lagerström[11] that in my *Formulation of the Simple Theory of Types*[12] the independence of the axioms 9^α from axioms 1-8 and $10^{\alpha\beta}$ can be established by means of a complete non-atomic Boolean algebra. For this purpose, axioms 9^α are to be rewritten in the weaker form

$$(\exists t_{\alpha(o\alpha)}) \cdot f_{o\alpha}x_\alpha \supset \cdot (y_\alpha)[f_{o\alpha}y_\alpha \supset x_\alpha = y_\alpha] \supset f_{o\alpha}(t_{\alpha(o\alpha)}f_{o\alpha}),$$

since the question of independence would otherwise be trivial. The range of the variables of type o is to be the Boolean algebra in question; the range of the variables of type ι is to be the natural numbers; and the range of the variables of type $\alpha\beta$ is to be the functions from B to A, where A and B are the ranges of the variables of types α and β respectively. The universal quantifier is to correspond to the infinite Boolean product, so that the value of, say, $(x_\iota)M$ for a given system of values of the free variables is

$$\prod_{i=0}^{\infty} \Phi(i) \ ,$$

where $\Phi(i)$ is the value of M for the value i of x_ι.

In a similar fashion, the independence of the axioms 6^α can be established by means of a four-element Boolean algebra (Tables I). The value of $(x_\alpha)M$ is to be taken as 1 in case the value of M is 1 for all values of x_α, and as 0 in all other cases.

Footnotes.

[1]In any particular system of propositional calculus (we shall here, however, be concerned with only one such system, the classical propositional calculus), an expression of the calculus is called a *tautology* according to a particular system of truth-tables if, for every system of truth-values of its variables, the truth-value of the expression, as obtained from the truth-tables, belongs to the class of *designated* truth-values. And a system of truth-tables is called *characteristic* of a particular system of propositional calculus if the theorems of the propositional calculus are the same as the tautologies according to the truth-tables.

[2]For a system of truth-tables, the term "matrix" is becoming usual, in spite of the awkward conflict between this use of the word "matrix" and the quite different use of the same word which was introduced in *Principia Mathematica*. (The long-established use of this word in algebra is of course still a third use.)

[3]In this paper, whenever a Boolean algebra is spoken of as being a system of truth-tables for the propositional calculus or as being homomorphic to such a system of truth-tables, it is to be understood that negation, conjunction, and disjunction are represented respectively by the Boolean complement, the Boolean product, and the Boolean sum. The Boolean representatives of (material) implication and equivalence are then obtained by rewritting, $P \supset Q$ and $P \equiv Q$ as $\sim P \vee Q$ and $PQ \vee \sim P \sim Q$ respectively.

[4]Some examples of this kind are given, e.g., by K.Schröter in *Zentralblatt für Mathematik und ihre Grenzgebiete*, vol. 37 (1951), p. 4.

[5]This is a minor modification of the terminology of Carnap, who (in his *Formalization of Logic*, Cambridge, Mass., 1943) speaks rather of normal and non-normal true interpretations where any system of truth-tables will provide an interpretation of the propositional calculus, which will be a true interpretation if only every theorem is a tautology.

[6]This was perhaps first pointed out explicitly by B.A.Bernstein (in a different terminology) in *Bulletin of the American Mathematical Society*, vol. 38 (1932), pp. 390 and 592.

[7]We adopt this term from McKinsey and Tarski - see *The Journal of Symbolic Logic*, vol. 13 (1948), p. 11.

[8]Tables III are a simplified version of tables given in exercise 19.11 of the forthcoming revised edition of the writer's *Introduction to Mathematical Logic, Part I*. (The latter tables, unlike Tales III, are so arranged that symmetry fails in the truth-table of $\equiv$.)

[9]Here we make use of the fact that a Boolean algebra can be characterized by conditions which have exclusively the form of identically true equations of the algebra, together with the conditions that the complement, sum, and product exist and that there are at least two elements. (Some of Huntington's systems of postulates for Boolean algebras are, for example, substantiall, in this form.) Also use is made of the fact that the propositional calculus is formally a Boolean algebra, in the sense explained above.

[10]In *The Journal of Symbolic Logic*, vol. 14 (1949), pp. 95-97. The remark that these truth-tables are characteristic for the propositional calculus, and that no Boolean algebra is homomorphic to them, was made by Church and Rescher, ibid., vol. 15 (1940), pp. 69-70.

[11]It has never been published.

[12]*The Journal of Symbolic Logic*, vol. 5 (1940), pp. 56-68. See errata, ibid, vol. 6, p. iv.

p	q	$p \supset q$	pq	$p \vee q$	$p \equiv q$	$\sim p$
0	0	1	0	0	1	1
0	a	1	0	a	b	
0	b	1	0	b	a	
0	1	1	0	1	0	
a	0	b	0	a	b	b
a	a	1	a	a	1	
a	b	b	0	1	0	
a	1	1	a	1	a	
b	0	a	0	b	a	a
b	a	a	0	1	0	
b	b	1	b	b	1	
b	1	1	b	1	b	
1	0	0	0	1	0	0
1	a	a	a	1	a	
1	b	b	b	1	b	
1	1	1	1	1	1	

Table I. Designated value 1.

p	q	$p \supset q$	pq	$p \vee q$	$p \equiv q$	$\sim p$
0	0	1	0	0	1	1
0	b	1	0	1	0	
0	1	1	0	1	0	
b	0	0	0	1	0	0
b	b	1	1	1	1	
b	1	1	1	1	1	
1	0	0	0	1	0	0
1	b	1	1	1	1	
1	1	1	1	1	1	

Tables II. Designated value 1.

p	q	$p \supset q$	pq	$p \vee q$	$p \equiv q$	$\sim p$
0	0	1	0	0	1	1
0	a	1	0	0	1	
0	b	1	0	1	0	
0	1	1	0	1	0	
a	0	1	0	0	1	b
a	a	1	a	a	1	
a	b	b	0	1	0	
a	1	1	0	1	0	
b	0	0	0	1	0	a
b	a	a	0	1	0	
b	b	1	b	b	1	
b	1	1	1	1	1	
1	0	0	0	1	0	0
1	a	0	0	1	0	
1	b	1	1	1	1	
1	1	1	1	1	1	

Tables III. Designated value 1.

p	q	$p \supset q$	pq	$p \vee q$	$p \equiv q$	$\sim p$
0	0	1	0	0	1	1
0	h	h	h	h	h	
0	1	1	0	1	0	
h	0	h	h	h	h	h
h	h	h	h	h	h	
h	1	h	h	h	h	
1	0	0	0	1	0	0
1	h	h	h	h	h	
1	1	1	1	1	1	

Tables IV. Designated values h and 1

p	q	$p \supset q$	pq	$p \vee q$	$p \equiv q$	$\sim p$
0	0	1	0	0	1	1
0	h	1	0	h	h	
0	1	1	0	1	0	
h	0	h	0	h	h	h
h	h	h	h	h	h	
h	1	1	h	1	h	
1	0	0	0	1	0	0
1	h	h	h	1	h	
1	1	1	1	1	1	

Tables V. Designated values h and 1.

Vol.X, 1,2 BOLETIN DE LA SOCIEDAD MATEMATICA MEXICANA 1953

A SIMPLIFIED PROOF OF THE REDUCTION OF ALL MODALITIES TO 42 IN S 3.*

Robert Feys

We write N for negation, M for possibility, L for necessity, → for strict implication, = for strict equivalence.

Some very elementary proofs are omitted, others may be found in Parry's fundamental paper (J S L IV, pp. 137-154), the theorems of Parry being mentioned as "P ...".

0. Definitions, and consequences.

00. Df Lp = NMN p

01. Df Op = NM p

02. Df Yp = NMM p

03. Op = LN p

04. Yp = LLN p

05. Yp → Op

06. Yp = OM p

07. Yp = LO p

*Recibido para el Congreso Científico Mexicano, Septiembre 1951.

1. Axiom proper to S 3, and consequences.

10. $(p \to q) \to (Mp \to Mq)$

15. If X is an affirmative modality, then

$$(p \to q) \to (X\,p \to X\,q)$$

16. If X' is a negative modality, then

$$(p \to q) \to (X'\,q \to X'\,p)$$

2. First key-theorem for reductions, and consequences.

20.	$LL\,p \to LLL\,p$	(P 32.2)
21.	$LL\,p = LLL\,p$	(P 32.21)
22.	$MM\,p = MMM\,p$	(P 32.23)
25.	$Y\,p = YM\,p$	From 02, by 22.
26.	$Y\,p = LY\,p$	From 04, by 21.

3. Second key-theorem for reductions, and consequences.

30.	$0\,p \to 000\,p$	(P 32.3)
31.	$Y\,p \to 00Y\,p$	From 30 by 10 and 06.
35.	$0000\,p = 00\,p$	(P 32.31)
36.	$000Y\,p = 0Y\,p$	From 35 by 06.
37.	$Y000\,p = Y0\,p$	From 35 by 07.

4. Third key-theorem for reductions, and consequences.

40. $0\,p \to 0YY\,p$ (P 32.5)

41. $YY\,p = Y0\,p$

(1)	$YY\,p \to 00YY\,p$	31 subst.
(2)	$LYY\,p \to L00YY\,p$	By 15
(3)	$YY\,p \to Y0YY\,p$	By 26 and 07.
(4)	$Y0YY\,p \to Y0\,p$	From 40 by 16.
(5)	$YY\,p \to Y0\,p$	From (3) and (4).

(6)	YO p → YY p	From 05 by 16.
(7)	Th	From (5) and (6).

42.	YOO p = YYO p = YYY p = YOY p	By 41.
43.	YOOO p = YYOO p = YYYO p = YOYO p	42 subst.
44.	YOOY p = YYOY p = YYYY p = YOYY p	42 subst.

5. Lemmas.

51. YOYO p = YO p

(1)	YOOO p = YO p	37.
(2)	Th	By 43.

511. YOYY p = YY p

(1)	YOYOM p = YOM p	51 subst.
(2)	Th	By 06.

52. OYOO p = OY p

(1)	O p → OOO p	30.
(2)	OLOOO p → OLO p	By 16.
(3)	OYOO p → OY p	By 07.
(4)	OY p → OYYY p	40 subst.
(5)	OY p → OYOO p	By 42.
(6)	Th	From (3) and (5).

521. OYOY p = OY p

(1)	OYOOM p = OYM p	52 subst.
(2)	Th	By 06 and 25.

6. The reduction.

61. L being defined (in 00) by means of M and N, we can express any proper modality by means of M and N only.

Two consecutive N may be cancelled and as by 22 any three consecutive M reduce to two, we can express any modality by a sequence of symbols being (at most) alternatively N, and M or MM. We call such sequences *simplified modalities.*

Simplified proper modalities may be divided into 4 types:

Type A: beginning with N, ending with M,

Type B: beginning with M, ending with M,

Type C: beginning with N, ending with N,

Type D: beginning with M, ending with N.

62. Now the reduction for type A modalities, it is clear that these may be written as sequences of 0 and Y only.

621. With ONE symbol 0 or Y we have *two* modalities:

0 p, Y p.

622. With TWO symbols 0 or Y we might have four modalities: 00p, 0Y p, Y0 p, YY p.

But YY p = Y0 p (41)

Hence there remain only *three* distinct modalities (three not-equivalent modalities): 00 p, 0Y p, Y0 p.

623. We might have six distintc modalities with *three* symbols, these beginning with 00, 0Y or Y0.

But Y0Y p = Y00 p 42.

0YY p = 0Y0 p By 41.

Hence *four* modalities only are left: 000 p, 00Y p, 0Y0 p, Y00 p.

624. We might have eight distinct modalities, with FOUR symbols, these beginning with 000, 00Y, 0Y0, Y00. But modalities beginning with 000, 0Y0, Y00 reduce to modalities with two symbols 0 or Y only.

OOOO p = OO p	35.
OYOO p = OY p	52.
YOYO p = YO p	51.
OOOY p = OY p	36.
OYOY p = OY p	521.
YOYY p = YY p	511.

And for modalities beginning with OOY:

OOYY p = OOYO p	By 41.

625. The only possible distinct modalities with FIVE symbols would be these beginning with OOYO, thus OOYOO p and OOYOY p, But:

OOYOO p = OOY p	By 52.
OOYOY p = OOY p	By 521.

626. Hence the distinct modalities of type A are at most ten: O p, Y p, OO p, OY p, YO p, OOO p, OOY p, OYO p, YOO p, OOYO p.

63. Type C modalities are the type A modalities, with N p instead of p. Type B modalities and type D modalities are the negations of type A and type C modalities respectively.

64. We have thus 40 distinct proper modalities, ten of each type, plus the two improper modalities p and N p, 42 modalities in all.

For the proof that these modalities may not be reduced further (that no further strict equivalence is provable between them), see Parry l.c.

Louvain,

September, 1951

Vol.X, 1,2 BOLETIN DE LA SOCIEDAD MATEMATICA MEXICANA 1953

SOBRE LAS TOPOLOGIAS PARA ESPACIOS DE FUNCIONES CONTINUAS*

Rodolfo Morales Martinez **

Sean X, Y espacios topológicos y Y^X el conjunto de todas las funciones continuas f tales que $f(X) \subset Y$.

Si $\{C\}$ con $C \subset X$ es una familia no vacía de subconjuntos no vacíos y $W \subset Y$ es abierto, la familia $\{(C,W)\}$ de conjuntos de funciones f con $f(C) \subset W$ formada con $C \epsilon \{C\}$ y W recorriendo la clase de todos los conjuntos abiertos no vacíos en Y define una sub-base para una topología en Y^X. Cuando $\{C\}$ es la familia de todos los conjuntos compactos en X se obtiene la topología-k. En general, una topología en Y^X establecida por una familia $\{C\}$ de subconjuntos de X, se llamará una topología-$\{C\}$ y se indicará $Y^X(\{C\})$.

En algunas topologías-$\{C\}$, en particular la topología-k,

---

*Recibido para el Congreso Científico Mexicano, Septiembre 1951.
**Becario del Instituto Nacional de la Investigación Científica.

es sabido que:

a) Si Y es T_0, Y^X es T_0

b) Si Y es T_1, Y^X es T_1

c) Si Y es T_2, Y^X es T_2 .

En el Teorema I doy un procedimiento para obtener una clase amplia de topologías-$\{C\}$ en que son válidas las proposiciones a), b), c).

El resultado principal en este trabajo está contenido en el Teorema II. Arens y Dugundji han encontrado[1] que si X es completamente regular y Y contiene un arco no degenerado, una condición necesaria y suficiente para que una topología-$\{C\}$ basada en conjuntos cerrados sea mas fuerte que cualquier topología admisible en Y^X es que aquella topología sea propia. Tal hecho es cierto sin restricciones en X, Y o $Y^X(\{C\})$.

Haciendo referencia a los subconjuntos compactos en Y^X con la topología-k, establezco en el Teorema III una propiedad para tales conjuntos compactos de funciones. Es sabido que si $F \subset Y^X(k)$ es compacto, entonces $F(x) = \bigcup_{f \in F} f(x)$ es compacto para todo $x \in X$ [2], este resultado se obtiene para todo conjunto compacto $K \subset X$ y a la vez se tiene una generalización, en la topología-k, del teorema elemental: si K es compacto y f es continua entonces $f(K)$ es compacto.

<u>Definición</u>. Una familia de subconjuntos de X, $\{C\}$ se llama *regular* si para todo $x \in X$ y toda vecindad U de x, existe un $C \in \{C\}$ con $x \in C \subset U$.

En particular si $\{C\}$ es una base para la topología de

---

(1) Arens, R.F. and Dujundji J. Topologies for functions spaces. Pacific Journal of Mathematics, Vol.1, No.1, p.15, March 1951.

(2) Gale, D. Compact sets of functions and functions rings. Proc. of the American Mathematical Society, Vol.1, No.3, p.304, June 1950.

X, $\{C\}$ es una familia regular; el conjunto de los puntos de X es una familia regular.

Teorema I. *Si $\{C\}$ es una familia regular, entonces en $Y^X(\{C\})$ son ciertas a), b) y c).*

Demostración. Haré ver c). Sean $f, g \in Y^X(\{C\})$ con $f \neq g$. Entonces existe un $x \in X$ tal que $f(x) \neq g(x)$. Como Y es T_2 hay dos vecindades $W_1(f(x))$, $W_2(g(x))$ con $W_1 \cap W_2 = \phi$ (conjunto vacío). Por ser f, g continuas existen vecindades de x, U, V tales que $f(U) \subset W_1$, $f(V) \subset W_2$. Tomo $U \cap V$ y como $\{C\}$ es regular, hay un $C \in \{C\}$ con $x \in C \subset U \cap V$

$$\therefore \quad f \in (C, W_1) \qquad y \qquad g \in (C, W_2) \qquad y$$

estas vecindades (C, W_1) y (C, W_2) son ajenas.

Definición. Una topología s en Y^X es admisible si la función $h : X \times Y^X(s) \to Y$ con la regla $h(x, f) = f(x)$ es una función continua.

Sea Z un tercer espacio topológico. Se definen las funciones φ y φ^* de la manera siguiente:

$$\varphi : X \times Z \to Y, \qquad \varphi^* : Z \to Y^X(t)$$

Sujetas a la condición $[\varphi^*(z)]\,(x) = \varphi(x, z)$, $x \in X$ [3]. Esto establece una correspondencia biunívoca entre las funciones φ, φ^*.

Definición. Una topología t es "más fuerte" que la

---

[3] Fox, R.H. On topologies for functions spaces. Bulletin of the American Mathematical Society, Vol.51, p.429 (1945).

topología s (ambas para el mismo conjunto X) y se escribe $t < s$ en el sentido de Alexandroff, es decir si la función idéntica $I : X(s) \to X(t)$ es continua[4].

Definición. Una topología t en Y^X es *propia* si y solo si para todo espacio topológico Z, la continuidad de φ implica la continuidad de φ^*.

Teorema II. *Una condición necesaria y suficiente para que una topología t en Y^X sea más fuerte que cualquier topología admisible s es que t sea propia.*

Demostracion.

1º. es condición suficiente.

Sean t una topología propia y s una topología arbitraria para Y^X. Tomo $Z = Y^X(s)$. Entonces la función $\varphi : X \times Z \to Y$ con $\varphi(x,f) = f(x)$ es continua y por consecuencia la función $\varphi^* : Z \to Y^X(t)$ es también continua. Pero $\varphi^*(f(x)) = f(x) \therefore \varphi^* = f$. Entonces $t < s$.

2º. es condición necesaria.

Arens y Dugundji han introducido el concepto de convergencia continua para un conjunto dirigido de funciones $f_\mu \in Y^X$, y demostrado que la condición necesaria y suficiente para que una topologia t sea propia es que para todo conjunto dirigido $f_\mu \in Y^X(t)$ la convergencia continua de $f_\mu \Rightarrow$ la convergencia de f_μ en t. La demostración de la necesidad de la condición propuesta en este teorema se basa en el resultado anterior y ha sido dada, por el primero de los autores citados, esencialmente en[5]. Por tal motivo no repito esta parte.

(4) Alexandroff, P. und Hopf H., Topologie, p.62, Springer, Berlin, 1935.

(5) Arens, R.F. A topology for spaces of transformations. Annals of Mathematics, Vol.47, No.3, p.484, July 1946.

Entre las caracterizaciones que bajo diferentes hipótesis se han dado para los conjuntos compactos en $Y^X(k)$, figura la siguiente: $F(x) = \bigcup_{f \in F} f(x)$ es compacto para todo $x \in X$ véanse[6] y [2].

La afirmación anterior se establece en forma más amplia en el siguiente:

Teorema 3. *En la topología-k si* $K \subset X$ *es compacto, entonces* $F(K) = \bigcup_{f \in F} f(K)$ *es compacto en* Y, *para todo subconjunto compacto* $F \subset Y^X(k)$.

<u>Demostración.</u> Sean $K \subset X$ un conjunto compacto arbitrario y $\{W\}$ una cubierta abierta arbitraria de $F(K)$. Se extraera de $\{W\}$ una subcubierta finita.

Como $f(K)$ con $f \in F$ es compacto y $f(K) \subset \bigcup_{W \in \{W\}} W$ existe una subcubierta finita $W_{1(f)}, W_{2(f)}, \ldots, W_{n(f)}$ en donde $i(f)$ con $i = 1,2,\ldots,n$ depende de f

Entonces $f(K) \subset \bigcup_{i=1}^{n} W_{i(f)} = W_f$ y f es un punto de la vecindad-k: (K, W_f). Cuando f recorre F queda definida la cubierta de F: $\{(K,W_f) \mid f \in F\}$. Entonces, para un numero finito de funciones $f_1, f_2, \ldots, f_m$

$$F \subset \bigcup_{j=1}^{m} (K, W_{f_j}) \; .$$

La familia $\{W_{1(f_1)}, W_{n(f_1)}, W_{1(f_2)}, \ldots, W_{n(f_2)}, \ldots$ $\ldots W_{1(f_m)}, \ldots, W_{n(f_m)}\}$ es una subfamilia de $\{W\}$ y es también una cubierta de $F(K)$ porque si $y \in F(K)$, existen $f \in F$,

(6) Myers, S.B. Equicontinuos sets of mappings, Annals of Mathematics, Vol.47, No.3, p.498, July 1946.

(2) Gale, D. loc.cit. p.304.

$x \in K$ con $y = f(x)$. Entonces hay un valor de j, llamémoslo r tal que $f \in (K, W_{f_r}) \therefore f(x) = y \in W_{f_r} = \bigcup_{i=1}^{n(f_r)} W_{i(f_r)}$ $\therefore y \in W_{s(f_r)} \in \{W\}$ en donde s es algún valor de $i(f_r)$, y $F(K)$ es compacto.

Instituto de Matemáticas de la
Universidad Nacional de México

Vol.X, 1,2 BOLETIN DE LA SOCIEDAD MATEMATICA MEXICANA 1953

TWO THEOREMS ABOUT TRUTH FUNCTIONS*

W. V. Quine

The formulas of the propositional calculus, or the logic of truth functions, are built up of statement letters 'p', 'q', 'r', ... by applying the notations which express the various truth functions: '$\bar{p}$' for negation, 'pq' for conjunction, '$p \vee q$' for alternation, '$p \supset q$' for the conditional, '$p \equiv q$' for the biconditional. These various notations can be reduced by expressing some of them in terms of the others in familiar ways.

A formula is called *valid* if it comes out true under all assignments of truth values to the letters, and *consistent* if it comes out true under some assignments. One formula is said to *imply* another if the conditional formed from the two formulas in that order is valid; or, equivalently, if every assignment of truth values to letters which makes the first formula come out true makes the second come out true. Two

*Recibido para el Congreso Científico Mexicano, Septiembre 1951.

formulas are called *equivalent* if they imply each other.

Statement letters and negations of them are called *literals*. A literal or conjunction of two or more literals is called a *fundamental* formula, provided that it contains no letter twice. It will be convenient simply to disregard order in a conjunction, thus treating the fundamental formulas '$p\bar{q}r$', '$pr\bar{q}$', '$r\bar{q}p$', etc. not merely as equivalents but as one and the same formula. From this point of view the fundamental formulas which contain all and only n given statement letters are just 2^n in number. Given any n statment letters, listed in an arbitrary order $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, the 2^n fundamental formulas containing those letters can be listed exhaustively in a convenient standard order as follows:

$$(1) \quad \ulcorner \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n \urcorner, \quad \ulcorner \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-1}\bar{\alpha}_n \urcorner, \quad \ulcorner \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-2}\bar{\alpha}_{n-1}\alpha_n \urcorner,$$

$$\ulcorner \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-2}\bar{\alpha}_{n-1}\bar{\alpha}_n \urcorner, \quad \ulcorner \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{n-3}\bar{\alpha}_{n-2}\alpha_{n-1}\alpha_n \urcorner, \ldots, \ulcorner \bar{\alpha}_1\bar{\alpha}_2\ldots\bar{\alpha}_n \urcorner.$$

A fundamental formula ϕ will be said to *subsume* a fundamental formula ψ (of same or less length) if ψ is identical (disregarding permutations, as usual) with part or all of ϕ; hence if all the literals which are conjoined to form ψ are among the literals which are conjoined to form ϕ. Clearly if ϕ subsumes ψ then ϕ implies ψ.

Fundamental formulas and alternations of distinct fundamental formulas (distinct in the above sense which ignores permutations in conjunctions) are called *normal* formulas. There is a familiar routine for transforming any consistent formula into an equivalent which is normal[1]. The fundamental

[1] See e.g. my *Methods of Logic* (New York, 1950), pp.53-58.

formulas where of a normal formula is an alternation will be called its *clauses*. (A normal formula which is not an alternation, but rather simply a fundamental formula, counts as its own clause.) It is not required that all the clauses of a normal formula contain the same letters, nor that they all be of the same length.

Order in an alternation, as in a conjunction, will be disregarded. Thus normal formulas will be treated not merely as equivalents but as one and the same formula when they have the same clauses.

There is a quick *implication criterion* for any two normal formulas Φ and Ψ such that Ψ lacks negation signs: viz., Φ implies Ψ if and only if each clause of Φ subsumes a clause of Ψ. That such subsumption is sufficient in order that Φ imply Ψ is seen as follows. Suppose each clause of Φ subsumes, and therefore implies, a clause of Ψ; then, since each clause of Ψ implies Ψ, each clause of Φ implies Ψ; and accordingly Φ implies Ψ. That the subsumption condition is also necessary is seen as follows. Suppose some clause $\ulcorner \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m\bar{\beta}_1\bar{\beta}_2\ldots\bar{\beta}_n \urcorner$ ($m \geqslant 0$, $n \geqslant 0$) of Φ subsumes no clause of Ψ. This is the same as supposing (since Ψ lacks negation signs) that every clause ψ_i of Ψ contains a letter γ_i other than $\alpha_1,\ldots,\alpha_m$. If we assign truth to $\alpha_1,\ldots,\alpha_m$ and falsity to all other letters, then $\ulcorner \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m\bar{\beta}_1\bar{\beta}_2\ldots\bar{\beta}_n \urcorner$ comes out true. (Note that the β's repeat no α's, by the definition of "fundamental formula".) Therefore Φ comes out true. On the other hand ψ_i for each i comes out false under the described assignment of truth values, on account of γ_i (for remember that Ψ lacks negations signs);

so Ψ comes out false. Therefore Φ does not imply Ψ.

By the *length* of a normal formula let us understand simply the number of occurrences of letters and alternation signs. A formula can have several shortest normal equivalents, all equally short. For example, the normal formulas '$p\bar{q} \vee \bar{p}q \vee pr$' and '$p\bar{q} \vee \bar{p}q \vee qr$' are equivalent and equally short, and they have no shorter normal equivalent.

An obvious expedient for shortening normal formulas is that of simply deleting clauses which subsume other clauses (thus exploiting the familiar equivalence of '$pq \vee p$' to 'p'). Now it can be proved that this expedient always eventuates in a *shortest* normal equivalent if the normal formula with which we begin lacks negation. Such is the content of the following theorem, which is one of the two from which this paper gets its title.

Theorem 1. *If a formula is normal and lacks negation and none of its clauses subsumes any other of its clauses, then it has no shorter normal equivalent.*

Proof. Suppose (i) that Ψ is a normal formula lacking negation, (ii) that no clause of Ψ subsumes another clause of Ψ, and (iii) that Φ is normal and equivalent to Ψ; to prove that Φ is no shorter than Ψ. By (i) and (iii) and the above implication criterion, each clause of Φ subsumes a clause of Ψ. Let the thus subsumed clauses of Ψ be $\psi_1, \ldots, \psi_n$. Since to subsume is to imply, each clause of Φ implies one of $\psi_1, \ldots, \psi_n$; hence Φ implies $\ulcorner \psi_1 \vee \ldots \vee \psi_n \urcorner$. By (iii), then, Ψ implies $\ulcorner \psi_1 \vee \ldots \vee \psi_n \urcorner$. Then, since $\ulcorner \psi_1 \vee \ldots \vee \psi_n \urcorner$ lacks negation (by (i)), we can conclude from the implication criterion that every clause of Ψ subsumes a clause of $\ulcorner\psi_1 \vee \ldots \vee \psi_n\urcorner$. By (ii), then, Ψ has no clauses but $\psi_1, \ldots, \psi_n$. Now assign truth to all letters of ψ_i, for some i, and falsity to all other letters. By (i), ψ_i lacks negation and hence comes out true. Therefore Ψ comes out true (since truth of ψ_i assures truth of $\ulcorner\psi_1 \vee \ldots \vee \psi_n\urcorner$). Therefore, by (iii), Φ comes out true. Hence some clause ϕ of Φ comes out true. On the other hand each of $\psi_1, \ldots, \psi_n$ other than ψ_i contains a letter other than those of ψ_i, by (ii), and hence comes out false under the given assignment. Therefore ϕ, which comes out true, subsumes none of $\psi_1, \ldots, \psi_n$ other than ψ_i. So, since every clause of Φ subsumes one or another of $\psi_1, \ldots, \psi_n$, we must conclude that ϕ subsumes ψ_i and none of the others. Applying this reasoning to each choice of i, we see that each of $\psi_1, \ldots, \psi_n$ is subsumed by a clause of Φ which subsumes no others of $\psi_1, \ldots, \psi_n$. Therefore Φ is no shorter than $\ulcorner\psi_1 \vee \ldots \vee \psi_n\urcorner$, q.e.d.

Preparatory to the other theorem which it is the business of this paper to prove, viz. Theorem 2 below, let us look back to the 2^n fundamental formulas listed in (1). The alternation of the first i of those formulas will be called [i]. Clearly $[2^n]$ is valid, and hence has '$p \vee \bar{p}$' as shortest normal equivalent. On the other hand

Theorem 2. *If* $m < 2^n$ *then* [m] *has as a shortest normal equivalent a formula which lacks negation.*

Proof. For each h up to n, the first 2^{n-h} formulas of (1) exhaust the ways of distributing negation signs over $\alpha_{h+1}, \ldots, \alpha_n$ while keeping $\alpha_1, \ldots, \alpha_h$ affirmative. Clearly, therefore,

(2) $\qquad [2^{n-h}]$ is equivalent to $\ulcorner\alpha_1 \ldots \alpha_h\urcorner$

After the 2^{n-h}th formula, the series (1) repeats as from the beginning but with a_h negated. Thus, where $1 \leqslant i \leqslant 2^{n-h}$

(3) $[2^{n-h} + i]$ is $[2^{n-h}]$ in alternation with $[i]$ with a_h negated.

Now let $h_1,\ldots,h_k$ be, in ascending order, the integers such that

$$(4) \qquad m = 2^{n-h_1} + 2^{n-h_2} + \ldots + 2^{n-h_k}$$

(They are all positive, since $m < 2^n$; and they are distinct. To find them, write m in binary notation and count the places to the right of each occurrence of '1'. Each of $h_1,\ldots,h_k$ is n minus one of those counts). By (4) and (3), $[m]$ is $[2^{n-h_1}]$ in alternation with $[2^{n-h_2} +\ldots+ 2^{n-h_k}]$ with a_{h_1} negated. But, by (3) again, $[2^{n-h_2} +\ldots+ 2^{n-h_k}]$ in turn is $[2^{n-h_2}]$ in alternation with $[2^{n-h_3} +\ldots+ 2^{n-h_k}]$ with a_{h_2} negated; so $[m]$ is the alternation of $[2^{n-h_1}]$, $[2^{n-h_2}]$ with a_{h_1} negated, and $[2^{n-h_3} +\ldots+ 2^{n-h_k}]$ with a_{h_1} and a_{h_2} negated. Continuing thus, we finally find that $[m]$ is the alternation of $[2^{n-h_1}]$, $[2^{n-h_2}]$ with a_{h_1} negated, $[2^{n-h_3}]$ with a_{h_1} and a_{h_2} negated, ..., and $[2^{n-h}\ ]$ with $a_{h_1},\ldots,a_{h_{k-1}}$ negated. But, by (2), $[2^{n-h_1}]$ is equivalent to $\ulcorner a_1 \ldots a_{h_1} \urcorner$. Also, by (2), $[2^{n-h_2}]$ is equivalent to $\ulcorner a_1 \ldots a_{h_2} \urcorner$, and hence, since substitution for letters prserves equivalence, $[2^{n-h_2}]$ with a_{h_1} negated is equivalent to $\ulcorner a_1 \ldots a_{h_1-1} \bar{a}_{h_1} a_{h_1+1} \ldots a_{h_2} \urcorner$. Continuing thus, we find $[m]$ equivalent to

$$(5)\qquad \ulcorner a_1 \ldots a_{h_1} \vee a_1 \ldots a_{h_1-1} \bar{a}_{h_1} a_{h_1+1} \ldots a_{h_2} \vee a_1 \ldots a_{h_1-1} \bar{a}_{h_1} a_{h_1+1} \ldots a_{h_2-1} \bar{a}_{h_2} a_{h_2+1} \ldots a_{h_3} \vee \ldots \vee a_1 \ldots a_{h_1-1} \bar{a}_{h_1} a_{h_1+1} \ldots a_{h_2-1} \bar{a}_{h_2} a_{h_2+1} \ldots a_{h_{k-1}-1} \bar{a}_{h_{k-1}} a_{h_{k-1}+1} \ldots a_{h_k} \urcorner .$$

Now the last two of the k clauses of (5) are related in the manner of 'pq' and 'p$\bar{\text{q}}$r', with $a_{h_{k-1}}$ in the rôle of 'q'; and 'pq $\vee$ p$\bar{\text{q}}$r' is equivalent by truth tables to 'pq $\vee$ pr'. Hence the occurrence of $\ulcorner \bar{a}_{h_{k-1}} \urcorner$ in (5) can be dropped. Again the last three clauses of the thus amended (5) are related in the manner of 'pq', 'p$\bar{\text{q}}$r', and 'p$\bar{\text{q}}$s', with $a_{h_{k-2}}$ in the rôle of 'q'; and 'pq $\vee$ p$\bar{\text{q}}$r $\vee$ p$\bar{\text{q}}$s' is equivalent to 'pq $\vee$ pr $\vee$ ps'. Hence the two occurrences of $\ulcorner \bar{a}_{h_{k-2}} \urcorner$ can be dropped. Continuing thus, we delete all negative literals from (5) and are left with

$$\ulcorner a_1 \ldots a_{h_1} \vee a_1 \ldots a_{h_1-1} a_{h_1+1} \ldots a_{h_2} \vee a_1 \ldots a_{h_1-1} a_{h_1+1} \ldots a_{h_2-1} a_{h_2+1} \ldots a_{h_3} \vee \ldots \vee a_1 \ldots a_{h_1-1} a_{h_1+1} \ldots a_{h_2-1} a_{h_2+1} \ldots a_{h_{k-1}-1} a_{h_{k-1}+1} \ldots a_{h_k} \urcorner .$$

But thus lacks negation. Moreover, none of its clauses subsumes any other of its clauses; so, by Theorem 1, there is no shorter normal equivalent.

Harvard University
July 13, 1951.

Vol.X, 1,2 BOLETIN DE LA SOCIEDAD MATEMATICA MEXICANA 1953

UNA PROPIEDAD DE LA METRICA DE BUSEMANN PARA LOS SUBESPACIOS EN UN ESPACIO METRICO ARBITRARIO*

Enrique Valle Flores **

1. INTRODUCCION. Hausdorff[1] resolvió el problema de topologizar los subconjuntos no vacíos y acotados en un espacio métrico R, de la siguiente manera. Si M y N son dos tales subconjuntos de R, la distancia (general) entre ellos es[2], en el sentido de Hausdorff

$$(1) \qquad \rho_H (M,N) = \sup_{x\in R} |xM - xN| \quad ,$$

---

*Recibido para el Congreso Científico Mexicano, Septiembre 1951.
** Becario del Instituto Nacional de la Investigación Científica.

(1) Véase [1], § 28, pags. 145-150. Los números entre paréntesis rectangulares se refieren a la Bibliografía, al final del trabajo.

(2) Hausdorff [1] y Alexandroff [2, pag. 112] definen ρ_H mediante la frontera inferior de los números α que satisfacen simultaneamente $S(M,\alpha)$ N y $S(N,\alpha)$ M, donde $S(M,\alpha)$ designa al conjunto de los puntos de R que distan de M menos que α. Sin embargo Busemann demuestra en [3, (2.1), pag. 206] la equivalencia de esta definición con la (1).

donde xM designa la distancia, segun la métrica que ya había en R, entre el punto x y el subconjunto M. Entonces ρ_H satisface[3]:

i) $\rho_H(M,N) \geqslant 0$, $\rho_H(M,N) = 0$.

ii) $\rho_H(M,N) = 0$ equivale a $\bar{M} = \bar{N}$.

iii) $\rho_H(M,N) = \rho_H(N,M)$.

iv) $\rho_H(M,N) + \rho_H(N,Q) \geqslant \rho_H(M,Q)$.

El espacio resultante de los subconjuntos acotados y no vacíos de R, se metriza entonces *propiamente*, del modo natural y usual, clasificando tales subconjuntos en clases cuyos miembros disten 0 (según ρ_H). Gracias a ii) este espacio de clases es el *espacio de las clases densas y acotadas*, esto es el espacio de clases de conjuntos acotados y mutuamente densos. Ahora bien la métrica de Hausdorff induce de la manera usual una convergencia *de clases densas* o de conjuntos cerrados y acotados, la llamada convergencia métrica, asi:

(2) lm. $M_\nu = M$ *equivale*[4] a $\rho_H(M_\nu, M) \to 0$,

y en [2, II, § 5, No.3] se establecen varios hechos importantes sobre la comparación entre las convergencias topológica[5] y la métrica (2), entre tales resultados figura:

[3] Para los hechos citados aqui sobre la métrica hausdorffiana véase [2, II, § 5, No.2, pags. 112-116].

[4] En este caso M es naturalmente cerrado.

[5] Para este concepto véase [2, § 5, No. 1].

(3) *Si la sucesión* $\{M_\nu\}$ *satisface, segun* ρ_H *la condición de Cauchy*[6], *entonces* M_ν *converge topológicamente*[7].

Ahora bien el defecto de la métrica de Hausdorff, consistente en excluir los conjuntos no acotados es remediado por Busemann en [3, 1.2] al introducir la distancia que llamamos *distancia de Busemann*, entre los conjuntos no vacios *arbitrarios* M y N de R, mediante

$$(4) \qquad \rho_p\ (M,N) = \sup_{x\in R}.\ \{|xM-xN|\ \exp.(-px)\}\quad ,$$

donde[8] p es cualquier punto (fijo) de R. Para esta métrica que resulta topológicamente independiente de la elección del punto p, valen también los resultados i) a iv), con ρ_H reemplazada por ρ_p. Entonces ella determina en R, como la de Hausdorff, un *espacio de las clases densas de* R (de miembros no necesariamente acotados) e induce naturalmente y como antes, una convergencia en R, que llamamos *convergencia métrica* (según ρ_p) y que también resulta independiente del punto[9] p, por medio de (2) con ρ_H reemplazada por ρ_p.

El propio Busemann establece resultados relativos a la comparación entre la convergencia topológica y la nueva convergencia métrica[10], semejantes a los correspondientes en el caso hausdorffiano. El propósito del presente trabajo es completar esa comparación mediante el siguiente hecho, correspondien

---

(6) Esto es, si para cada $\delta > 0$, existe ν_0 tal que $\mu, \nu > \nu_0$ implique $\rho\ (M_\mu, M_\nu) < \delta$.

(7) Esto es, existe el límite topológico lt. M_ν. Véase [2, pag. 112]

(8) La métrica que ya existía en R se designa mediante xy.

(9) Según se desprende de [3, (2.10), pag. 207].

(10) Cf. [3, (2.12) a (2.18) pags. 208-209].

te de (3):

TEOREMA. *Si una sucesión* $\{M_\nu\}$ *de conjuntos arbitrarios y no vacíos satisface, segun* ρ_p, *la condición de Cauchy, entonces* $\{M_\nu\}$ *converge topológicamente.*

2. DEMOSTRACIÓN del teorema[11]. Sea $\epsilon (0 < \epsilon 1)$ arbitraria y supongamos que $a \in \overline{\mathrm{lt}}\ M_\nu$ [12]; tomamos $\delta = \epsilon/(1 + \exp (pa + 1) < 1$. Si $\{M_\nu\}$ satisface la condición de Cauchy, entonces existe un rango[8] $\mu > \nu_0$ tal que $S(a, \delta) \cap M_\mu$ no es vacío, esto es existe cierto punto $a_\mu \in M$ que satisface $aa_\mu < \delta$. Si ahora es $\nu > \nu_0$ se tendrá

$$\delta > \rho_p\ (M_\mu, M_\nu) \geqslant a_\mu\ M_\nu \exp (-pa_\mu) \quad ;$$

luego $\delta \exp (pa_\mu) > a_\mu\ M_\nu$ y en vista de que

$$pa_\mu \leqslant pa + aa_\mu < pa + \delta < pa + 1 \ ,$$

resulta $a_\mu M_\nu < \delta \exp (pa + 1)$. Así pues existe $a_\nu' \in M_\nu$ tal que $a_\mu a_\nu' < \delta \exp (pa + 1)$ y entonces

$$aa_\nu' \leqslant aa_\mu + a_\mu a_\nu' < \delta + \delta \exp (pa + 1) = \epsilon \ .$$

En resumen, para $\nu > \nu_0$ existe a_ν' tal que $a_\nu' \in M_\nu$ y tam-

---

(11) Esta es la natural modificación de la demostración al teorema (3), que figura en [2].

(12) $\overline{\mathrm{lt}}\ M_\nu$ designa al límite topológico superior y $\underline{\mathrm{lt}}\ M_\nu$ al límite topológico inferior de la sucesión de conjuntos M_ν, en el sentido de [2, II, § 5, No. 1; pag. 111]. En nuestra hipótesis, el primer límite puede ser vacío y no existir entonces ninguna a tal; pero en tal caso también hay convergencia, hacia el conjunto vacío.

bien $aa_{\nu}' < \epsilon$, esto es para $\nu > \nu_0$, $S(a,\epsilon) \cap M_{\nu}$ no es vacía luego $a \in \underline{\mathrm{lt}}\, M_{\nu}$ y $\overline{\mathrm{lt}}\, M_{\nu} = \underline{\mathrm{lt}}\, M_{\nu}$, Q.E.D.

BIBLIOGRAFIA.

[1] F.Hausdorff. Mengenlhre, Dritte Auflage. Dover, N.York 1944.

[2] P.Alexandroff und H.Hopf. Topologie, erster band, J. Springer Berlin, 1935.

[3] H.Busemann. Local metric Geometry, Transactions of the American Mathematical Society, Vol. 56 (1944), pgs. 200-274.

Instituto de Matemáticas de la
U. N. A. M.