Vol.X, 3,4 BOLETIN DE LA SOCIEDAD MATEMATICA MEXICANA 1953

SOBRE IDEALES PRIMARIOS EN ANILLOS SEMILOCALES GENERALIZADOS*

E. Lluis Riera y F. Recillas Juárez**

Sea $\mathfrak{o}$ un anillo semilocal generalizado, es decir, un $\mathfrak{m}$-anillo tal que $\mathfrak{m}$ está contenido en la intersección de todos los ideales máximos de $\mathfrak{o}$.

Sea $\bar{\mathfrak{o}}$ la completación de $\mathfrak{o}$ (respecto a $\mathfrak{m}$). Si $\mathfrak{a}$ es un ideal en $\mathfrak{o}$, llamaremos *extensión* de $\mathfrak{a}$ al ideal $\mathfrak{a}\bar{\mathfrak{o}}$ de $\bar{\mathfrak{o}}$. Si $\bar{\mathfrak{a}}$ es un ideal en $\bar{\mathfrak{o}}$, llamaremos *contracción* de $\bar{\mathfrak{a}}$ al ideal $\bar{\mathfrak{a}} \cap \mathfrak{o}$ en $\mathfrak{o}$.

Debido a la fórmula $\mathfrak{a}\bar{\mathfrak{o}} \cap \mathfrak{o} = \mathfrak{a}$, la extensión induce una correspondencia biunívoca entre todos los ideales de $\mathfrak{o}$ y sus imágenes en $\bar{\mathfrak{o}}$, siendo la contracción la correspondencia inversa. Esta correspondencia es biunívoca entre los conjuntos de

---

*Presentado ante el III Congreso Nacional de Matemáticas en San Luis Potosí, junio de 1953.

**Becarios del Instituto Nac. de la Investigación Científica.

ideales de $\mathfrak{o}$ y $\bar{\mathfrak{o}}$ que contienen a $\mathfrak{m}$ y $\bar{\mathfrak{m}} = \mathfrak{m}\bar{\mathfrak{o}}$ respectivamente; también induce una correspondencia biunívoca entre los ideales primos máximos de $\mathfrak{o}$ y todos los ideales primos máximos de $\bar{\mathfrak{o}}$.

Si el anillo $\mathfrak{o}$ es local, $\mathfrak{m}$ el ideal de las no unidades, se sabe que la extensión induce una correspondencia biunívoca entre los conjuntos de primarios asociados a $\mathfrak{m}$ y $\bar{\mathfrak{m}} = \mathfrak{m}\bar{\mathfrak{o}}$ respectivamente.

El resultado que aquí obtenemos es la generalización de esta propiedad para anillos semilocales generalizados.

LEMA 1. *Sea* $\mathfrak{a}$ *un ideal de* $\mathfrak{o}$ *y* $\bar{\mathfrak{a}}$ *su extensión; la condición necesaria y suficiente para que un elemento* $\bar{a}$ *de* $\bar{\mathfrak{o}}$ *pertenezca a* $\bar{\mathfrak{a}}$ *es que* $\bar{a} = \lim_{n\to\infty} a_n$ *con* $a_n \in \mathfrak{a}$ *a partir de cierto rango.*

Según un teorema de O. Zariski, la adherencia de $\mathfrak{a}$ en $\bar{\mathfrak{o}}$ coincide con su extensión y el lema resulta de que $\bar{a}$ está en dicha adherencia si y sólo si $\bar{a} = \lim_{n\to\infty} a_n$ con $a_n \in \mathfrak{a}$.

LEMA 2. *Dado* k, *entero positivo y un elemento* $\bar{a}$ *de* $\bar{\mathfrak{o}}$ *existe* $a \in \mathfrak{o}$ *tal que* $\bar{a} \equiv a(\bar{\mathfrak{m}}^k)$

Sea $\bar{a} = \lim_{n\to\infty} a_n$ con $a_n \in \mathfrak{o}$; existe m tal que $a_n - a_m \in \mathfrak{m}^k$ para toda $n > m$, de donde $\bar{a} - a_m = \lim_{n\to\infty}(a_n - a_m)$ y por el lema 1, $\bar{a} - a_m \in \mathfrak{m}^k\bar{\mathfrak{o}} = \bar{\mathfrak{m}}^k$.

LEMA 3. *Sea* $\mathfrak{q}$ *un ideal primario asociado al primo máximo* $\mathfrak{p}$ *de* $\mathfrak{o}$. *Entonces si* $\bar{x} = \lim_{n\to\infty} x_n$ *y* $x_n - x_{n-1} \in \mathfrak{m}^n$ *resulta que* $\bar{x} \in \mathfrak{q}\bar{\mathfrak{o}}$ *si y sólo si* $x_h \in \mathfrak{q}$, *donde* h *es un número tal que* $\mathfrak{q} \supset \mathfrak{p}^h$.

Como $\mathfrak{p} \supset \mathfrak{m}$, $\mathfrak{q} \supset \mathfrak{m}^h$.

Si $x_h \in \mathfrak{q}$, entónces $x_{h+1}, x_{h+2}, x_{h+3}, \dots$ están en $\mathfrak{q}$ ($x_{h+1} - x_h \in \mathfrak{m}^h \subset \mathfrak{q}$ y como $x_h \in \mathfrak{q}$, $x_{h+1} \in \mathfrak{q}$, etc.) y por el lema 1 resulta que $\bar{x} \in q\bar{\mathfrak{o}}$.

Inversamente, si $\bar{x} \in q\bar{\mathfrak{o}}$ entonces $\bar{x} = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$ con $y_n \in q$. Para toda $n \geq N_h$, $y_n - x_n \in \mathfrak{m}^h \subset q$. Supongo $N_h \geq h$. Si $n \geq N_h$, $x_n \in q$ porque $y_n \in q$ y $y_n - x_n \in q$. Pero $x_n \ x_h = (x_n - x_{n-1}) + (x_{n-1} - x_{n-2}) + \dots + (x_{h+1} - x_h)$; cada uno de los sumandos esta en $\mathfrak{m}^h$ (porque $n \geq h$) y por consiguiente $x_n - x_h \in \mathfrak{m}^h \subset q$ y tomando en cuenta que $x_n \in q$ resulta que $x_h \in q$.

LEMA 4. *Si q es un ideal primario para el ideal primo máximo $\mathfrak{p}$ en $\mathfrak{o}$ entonces $\bar{q} = q\bar{\mathfrak{o}}$ es primario para el primo máximo $\mathfrak{p}\bar{\mathfrak{o}} = \bar{\mathfrak{p}}$ en $\bar{\mathfrak{o}}$.*

Sean $\bar{x} = \lim x_n$, $\bar{y} = \lim y_n$ con $x_n, y_n \in \mathfrak{o}$ y tales que $x_n y_n - x_{n-1} y_{n-1} \in \mathfrak{m}^n$, $x_n - x_{n-1} \in \mathfrak{m}^n$ y $y_n - y_{n-1} \in \mathfrak{m}^n$. Si $\bar{x}\bar{y} \in \bar{q}$ y $\bar{x} \notin \bar{q}$ por el lema 3 $x_h y_h \in q$, $x_h \notin q$ por lo tanto $y_h \in \mathfrak{p}$. Además $y_{h+n} \in \mathfrak{p}$ para toda n y por lo tanto $\bar{y} \in \mathfrak{p}\bar{\mathfrak{o}} = \bar{\mathfrak{p}}$. Como también $\bar{q} \subset \bar{\mathfrak{p}}$ y $\bar{\mathfrak{p}}^h \subset \bar{q}$ resulta el lema.

TEOREMA. *Si $\mathfrak{o}$ es un anillo semilocal generalizado, $\bar{\mathfrak{o}}$ su completación, $\mathfrak{p}$ un ideal primo máximo de $\mathfrak{o}$ y $\bar{\mathfrak{p}}$ su extensión, entonces existe una correspondencia biunívoca* (la extensión) *entre el conjunto de ideales primarios para $\mathfrak{p}$ en $\mathfrak{o}$ y el de ideales primarios para $\bar{\mathfrak{p}}$ en $\bar{\mathfrak{o}}$*

El lema 4 asegura que la imagen de un primario para $\mathfrak{p}$ es primario para $\bar{\mathfrak{p}}$ y debido a la fórmula $\mathfrak{a}\bar{\mathfrak{o}} \cap \mathfrak{o} = \mathfrak{a}$, la correspondencia es biunívoca. Falta sólo ver que es sobre.

Sea $\bar{q}$ un primario para $\bar{\mathfrak{p}}$ en $\bar{\mathfrak{o}}$. $\bar{q} \cap \mathfrak{o} = q$ es primario para $\bar{\mathfrak{p}} \cap \mathfrak{o}$ el cual es igual a $\mathfrak{p}$. Demostraremos que $\bar{q}$ es la extensión de q. Podemos elegir h tal que $\mathfrak{p}^h \subset q$ y $\bar{\mathfrak{p}}^h \subset \bar{q}$. Evidentemente $q\bar{\mathfrak{o}} \subset \bar{q}$; inversamente, sea $\bar{a} \in \bar{q}$ por el lema 2, existe $a \in \mathfrak{o}$ tal que $\bar{a} \equiv a(\bar{\mathfrak{m}}^h)$, de donde $\bar{a} - a \in \bar{\mathfrak{m}}^h \subset \bar{\mathfrak{p}}^h \subset \bar{q}$, por lo cual $a \in \bar{q}$ y $a \in \bar{q} \cap \mathfrak{o} = q$. Por otra par te, $\bar{a} - a \in \bar{\mathfrak{m}}^h = \mathfrak{m}^h \bar{\mathfrak{o}} \subset \mathfrak{p}^h \bar{\mathfrak{o}} \subset \mathfrak{q}\bar{\mathfrak{o}}$ y como $a \in \mathfrak{q} \subset \mathfrak{q}\bar{\mathfrak{o}}$, resulta que $\bar{a} \in \mathfrak{q}\bar{\mathfrak{o}}$, es decir $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{q}\bar{\mathfrak{o}}$. Por consiguiente $\bar{\mathfrak{q}} = \mathfrak{q}\bar{\mathfrak{o}}$.

BIBLIOGRAFIA

Chevaley, C. On the theory of local rings. Ann. of Math. Vol.44, 1943.

Cohen, I.S. On the structure and ideal theory of complete local rings, Trans.Am.Math.Soc. Vol. 59, 1946.

Zarischi, O. Generalized semi-local rings. Summa Bras.Math. Vol. 1, 1946.

Instituto de Matemáticas de la
Universidad Nacional de México.