Vol. X, 3,4 BOLETIN DE LA SOCIEDAD MATEMATICA MEXICANA 1953

DEMOSTRACION DE LA EQUIVALENCIA DE LA TOPOLOGIA DE LA CONVERGENCIA REGULAR Y LA TOPOLOGIA-K PARA ESPACIOS DE TRANSFORMACIONES*

Rodolfo Morales Martínez**

El objeto de la presente nota es dar una demostración del teorema de R. Arens que establece la equivalencia de una estructura uniforme (la topología de la convergencia regular) y la topología-k en Y^X cuando Y es un espacio uniforme [1, pag. 489). Para tal fin, utilizo la técnica de André Weil usada en [2, pag.25] para establecer un Lema que es generalización de un conocido teorema sobre espacios métricos, a saber: dos subconjuntos de un espacio métrico, ajenos uno de los cuales es compacto y el otro cerrado estan separados por una distancia positiva.

*Recibido el 9 de diciembre de 1953.

**Becario del Instituto Nacional de la Investigación Científica.

Sean X un conjunto no vacio, $X \times X$ su producto por si mismo, es decir, la colección de parejas ordenadas (p,q) con $p, q \in X$.

Si V_α es un subconjunto de $X \times X$, V_α se llamará una *relación*. $V_\alpha(p)$ simboliza el conjunto $\{q \mid (p,q) \in V_\alpha\}$ ó sea, el conjunto de todos los puntos $q \in X$ tales que $(p,q) \in V_\alpha$, y si $A \subset X$, $V_\alpha(A) = \bigcup_{p \in A} V_\alpha(p)$.

El conjunto formado por todas las parejas (p,q) con $p = q$ es la *diagonal* Δ.

Dadas las relaciones V_α, V_β su *producto* $V_\alpha V_\beta$ es el conjunto de todas las parejas (p,r) tales que existe un $q \in X$ y $(p,q) \in V_\beta$, $(q,r) \in V_\alpha$.

Se define la *inversa* de una relación V_α con el conjunto $V_\alpha^{-1} = \{(p,r) \mid (r,p) \in V_\alpha\}$.

Sea ahora $\{V_\alpha\}$ una familia de relaciones en $X \times X$ definida por un conjunto de indices $I = \{\alpha\}$ sujeta a satisfacer los axiomas:

I) $\bigcap_{\alpha \in I} V_\alpha = \Delta$

II) $\alpha, \beta \in I \Longrightarrow \exists\ \gamma \in I \ni V_\gamma \quad V_\alpha V_\beta$

III) A todo $\alpha \in I$ le corresponde un $\beta \in I \ni V_\beta V_\beta^{-1} \quad V_\alpha$.

La familia $\{V_\alpha\}$ verificando las propiedades anteriores se llama una *estructura uniforme* en el sentido de André Weil, y es bien sabido que define en X una topología tomando como vecindades los conjuntos $V_\alpha(x)$ con $\alpha \in I$, $x \in X$ y que

X es entonces completamente regular [2, pag. 13].

El espacio X se llama en este caso un *espacio uniforme*. Una familia amplia de espacios de este tipo es la clase de los espacios métricos.

De los axiomas anteriores, por inducción y con las definiciones $V_\alpha^{-n} = (\overset{-1}{V_\alpha})^n$, $V_\alpha^0 = \Delta$ para todo α, no es difícil demostrar que: a toda relación V_α le corresponde otra V_β tal que $V_\beta^n \subset V_\alpha$ para todo entero n.

La topología-k. Sean X, Y espacios topológicos y Y^X el conjunto de todas las funciones continuas que transforman a X en Y. El símbolo (K,W) con $K \subset X$ y $W \subset Y$ indica el conjunto de todas las funciones f con $f(K) \subset W$. Cuando K recorre todos los conjuntos compactos en X y W todos los conjuntos abiertos en Y, la familia $\{(K,W)\}$ tomada como subbase es la topología-k en Y^X.

Supongamos que Y tiene una estructura uniforme $\{V_\alpha\}$ y que K es compacto en X. Se puede establecer en Y^X una relación (K/V_α) con el criterio: $(f,g) \in (K/V_\alpha)$ $(f(x),g(x)) \in V_\alpha$, $x \in K$.

Es fácil demostrar que la familia $\{(K/V_\alpha)\}$ definida en la forma anterior es una estructura uniforme para Y^X puesto que es inmediato que se verifican las proposiciones:

I') $(f,g) \in (K/V_\alpha)$ para todo $\alpha \in I$ en Y, K compacto arbitrario en $X \Longleftrightarrow f = g$.

II') $L \cup M \subset K$, $V_\beta \subset V_\alpha^2 \Longrightarrow (K/V_\beta) \subset (L/V_\alpha) \cap (M/V_\alpha)$ con L, M, K compactos.

III') $(K/V_\alpha)^2 \subset (K/V_\alpha^2)$

Estas propiedades, primeramente notadas por R. Arens implican los axiomas I, II y III en Y^X y automáticamente Y^X tiene una estructura uniforme.

La topología asi definida se llama la topología de la convergencia regular [1, pag.489]. Se indicará con $Y^X(\mathcal{U})$

Lema. Si $K, F \subset Y$ con K compacto, F cerrado y $K \cap F = \phi$ (conjunto vacío), entonces existe una relación V_α en la estructura de Y tal que $V_\alpha(x) \cap F = \phi$, $x \in K$ y como consecuencia $V_\alpha(y) \cap K = \phi$, $y \in F$.

Nota. En toda estructura uniforme puede tomarse siempre $V_\alpha = \overset{-1}{V}_\alpha$ para todo $\alpha \in I$ sin perder generalidad [2, pag.9].

Demostración. Para todo $x \in K$, existe $V_{\beta(x)}$ tal que $V_{\beta(x)}(x) \cap F = \phi$; como K es compacto hay un número finito de puntos $x_1, \ldots, x_m \in K$ con $K \subset \bigcap_{i=1}^{m} V_{\beta(x_i)}(x_i) = W$ (abierto). Sea $p \in K$. Existe un índice γ y otro δ con $V_\gamma(p) \subset W$, $V_\delta^2(p) \subset V_\gamma(p)$, $V_\delta(p) \subset V_\gamma(p)$. Cuando p recorre K las vecindades $V_\delta(p)$ forman una cubierta de K; existe entonces una subcubierta finita

$$\{V_{\delta(p_1)}(p_1), \ldots, V_{\delta(p_n)}(p_n)\}$$

Sea α tal que $V_\alpha \subset \bigcap_{i=1}^{n} V_{\delta(p_i)}$ $x \in K$; $x \in V_{\delta(p_r)}(p_r)$ en donde r es algún i.

$$\therefore\ V_\alpha(x) \subset V_\alpha(V_{\delta(p_r)}(p_r)) \subset V_{\delta(p_r)}(V_{\delta(p_r)}(p_r) \subset V^2_{\delta(p_r)}(p_r) \subset W$$

$$\therefore\ V_\alpha(K) \cap F = \phi$$

Evidentemente también $V_\alpha(F) \cap K = \phi$.

TEOREMA 2 (R. Arens). La topología $Y^X(\mathcal{U})$ es equivalente a la topología-k.

Demostración. Sea $f \in (K,W)$. Como $f(K)$ es compacto y $Y-W$ es cerrado con $f(K) \cap (Y-W) = \phi$, existe un índice α, por el lema anterior tal que

$$V_\alpha(y) \cap (Y-W) = \phi, \quad y \in f(K)$$

Tomo $(K/V_\alpha) \in \mathcal{U}$.

$$g \in (K/V_\alpha)(f) \Longrightarrow (g(x), f(x)) \in V_\alpha, \quad x \in K \Longrightarrow g(x) \in V_\alpha(f(x)),$$

$$x \in K \Longrightarrow g(x) \in Y-W \qquad g(x) \in W \Longrightarrow g \in (K,W) \qquad \text{y}$$

$$(K/V_\alpha)(f) \subset (K,W) \quad .$$

Sea $(K/V_\alpha)(f) \in U$.

Por II) y III) existen los índices β, γ tales que $V_\beta^2 \subset V_\alpha$, $V_\gamma \subset \overline{V}_\gamma \subset V_\beta$ [2, pag.9].

Dado $x \in K$, existe una vecindad $V(x)$ con $f(V) \subset V_\gamma(f(x))$ y entonces hay un número finito de puntos $x_1, \ldots, x_n \in K$ tales que

$$K \subset V(x_1) + \ldots + V(x_n) \quad .$$

Hago $K_i = K \cap \overline{V(x_i)}$ que es compacto

$$f(K_i) \subset f(\overline{V(x_i)}) \subset V_\gamma(\overline{f(x_i)}) \subset \overline{V}(\overline{f(x_i)}) \qquad \overline{V}(f(x_i))$$

Entonces $f(K_i) \subset V_\beta(f(x_i)) \qquad i = 1, \ldots, n.$

Tomo $U = \bigcap_{i=1}^{n} (K_i, V_\beta(f(x_i))$ vecindad-k.

Sea $g \in U$.

$x \in K \Longrightarrow x \in K_r$, r algun valor de $i \Longrightarrow f(x) \in V_\beta(f(x_r))$ ó

$$(f(x), f(x_r)) \in V_\beta$$

$g \in U \Longrightarrow g(x) \in V_\beta(f(x_r))$ ó $(f(x_r), g(x) \in V_\beta$

$$\therefore \quad (f(x), g(x) \in V_\beta^2 \subset V_\alpha$$

$\therefore \quad g \in (K/V_\alpha)$ y $f \in U \subset (K/V_\alpha)$ (f)

BIBLIOGRAFIA.

[1] Arens, R.F., A topology for spaces of transformations, Annals of Mathematics, Vol. 47, No.3, July, 1946, pp. 480-495.

[2] Weil, André, Sur les espaces a estructure uniforme et sur la Topologie General, Actualités Scientifiques et Industrielles, 551, Hermann et Cie, Paris 1937.

Instituto de Matemáticas de la
Universidad Nacional de Mexico.