BOLETIN
DE LA
SOCIEDAD MATEMATICA MEXICANA

VOLUMEN X — NUMEROS 3 y 4

CONTENIDO

SEPTIEMBRE Y DICIEMBRE, 1953

MEXICO

Vol.X, 3,4

BOLETIN DE LA
SOCIEDAD MATEMATICA MEXICANA

1953

METRICS ON THE TORUS WITHOUT CONJUGATE POINTS*

Herbert Buseman

1. Most theorems on Riemann spaces of a predominantly geometric nature prove to be independent of the Riemannian character of the metric in the sense that after some rewording of the hypotheses they are seen to become special cases of theorems on Finsler spaces. *Of special significance for the understanding of both types of spaces are therefore those theorems where a simple extension form the Riemannian to the Finsler case is impossible.* The outstanding example in this direction is Beltrami's Theorem which characterizes the Riemann spaces with the straight lines as geodesics as the spaces with constant curvature, whereas the characterization of the Finsler spaces with this property is one of Hilbert's problems.

---

*Received September, 1951. A Spanish translation of this article appeared in Vol.X, 1,2 pp.12-29.

M.Morse, G.Hedlund and E.Hopf[1] showed that *a torus with a Riemannian metric without conjugate points has curvature* 0, so that the metric is euclidean. The present note shows that this theorem is of the *non-extendable* type: the geodesics of a Finsler metric on the torus without conjugate points need not be the straight lines, and for any metric without conjugate points there are always many essentially different metrics with the same geodesics. In fact, there is so much arbitrariness in the choice of the metric when the geodesics are prescribed that the problem to determine all of them becomes uninteresting.

However, it turns out to be reasonable to ask *which curve systems on the torus can occur as geodesics in a metric without conjugate points*. The answer to this question --in therms of the plane as the universal covering space of the torus-- is the main result of the present paper.

2. Let the (x,y)-plane P be the universal covering space of a torus with the translations

$$(1) \qquad T(m,n): \quad x' = x + m, \quad y' = y + n, \quad m,n \quad \text{integers}$$

as covering transformations. A system of geodesics on the torus without conjugate points, yields a system S of curves in P with the following properties:

I. *Each curve is* S *is a topological image* $p(t) = (x(t), y(t))$, $-\infty < t < \infty$, *of the real t-axis, such that* $x^2(t) + y^2(t) \to \infty$ *for* $t \to \infty$.

[1] This Theorem was proved by M.Morse and G.Hedlund in [3] under the additional hypothesis that there are no focal points. In this general form it is due to E.Hopf [4]. Numbers in brackets refer to the references cited at the end of the paper.

II. *Any two points of* P *lie on exactly one curve of* S.

III. *The system* S *goes into itself under the translations* $T(m,n)$.

IV. *If a curve* L *of* S *contains* q *and* $qT(m,n)$ *then it contains all points* $qT(\nu m, \nu n)$, $\nu = \pm 1, \pm 2, \ldots$

V. *The system* S *satisfies the parallel axiom: for a given curve* L *in* S *and a given point* p *not on* L *there is exactly one curve in* S *through* p *which does not intersect* L.

The main result is

THEOREM 1. *If a metric in the plane* P *has a system* S *with properties* I *and* II *as geodesics and is invariant under the translations* $T(m,n)$ *then* S *satisfies* III, IV *and* V.

Conversely, if in P *a system* S *of curves with properties* I *to* V *is given then a metric invariant under the* $T(m,n)$ *exists for which the curves in* S *are the geodesics.*

First the necessity of the conditions IV and V will be proved using freely the results and concepts of [1]. Each geodesic is congruent to a euclidean straight line [1, p.79 Theorem 1]. Denote by U the unit square $0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1$. For any $T = T(m,n)$, where not both m and n vanish, there is a point a in U for which

$$a\,aT = \min_{p \in U} p\,pT$$

where ab denotes the distance of a and b in the given metric. If q is any point in P then a $T' = T(m',n')$ exists such that $q_0 = qT' \in U$. Then

$$a\,aT \leqslant q_0\,q_0T = q_0T'\,q_0TT' = q_0T'q_0T'T = q\,qT$$

hence

$$a\,a\,T = \min_{p\in P} p\,p\,T$$

(1) *For any* $T(m,n) \neq 1$ *the points* $qT(\nu m, \nu n) = qT^{\nu}$ *lie on a geodesic, if and only if* $q\,q\,T = \min_{p\in P} p\,p\,T$, see [2, Theorem (6.1)].

It follows that the points aT^{ν} lie on a geodesic L which, because of II, goes into itself under all T^{ν}, hence the points qT^{ν} lie on L and $qqT = aaT$. Moreover for any arbitrary $T' = T(m',n')$ and $a' = aT$

$$a'a'T = aT'a\,T'T = a\,T'a\,T\,T' = a\,a\,T$$

so that the points $a'T^{\nu}$ lie also on a geodesic L' which is of course the line LT'.

Since L and L' cannot intersect more than once they are either identical or do not intersect at all. If q is a point of the plane which does not lie on any $LT(m',n')$ then m' and n' can be chosen such that q lies between L and $LT(m',n')$. If $S(a,b)$ denotes the segment of the geodesic through a and b with endpoints a and b, then $\bigcup_{\nu=-\infty}^{\infty} S(qT^{\nu}, qT^{\nu+1})$ is by [1, p.119 (c)] a curve which bounds a convex region both together with L and together with L'. Hence the points qT^{ν} lie on a geodesic and it follows from (1) that $qqT = aaT$. This proves IV.

The implications of this result for the torus are sufficiently interesting to state them explicitly.

THEOREM 2. *In a metrization of a torus without conjugate* *points all geodesic one-gons are closed geodesics. There is exactly one closed geodesic in a given free homotopy class through a given point and all geodesics in the class have the same length.*

3. It is considerably more difficult to prove V. For brevity call rational a line which contains two points q and $qT(m,n)$, $(m,n) \neq (0,0)$, and hence all points $qT(\nu m, \nu n)$. It is easy to establish the parallel axiom for the rational lines by showing: if L contains the points pT^{ν}, $p \neq 1$ and q does not lie on L then the line L' containing the points qT^{ν} is the only line through q which does not intersect L.

If this were not so, the assymptote H (see [1, Chapter III, 4]) through q to one of the orientations, say L^{+}, of L would be different from L'. Let the limit circle Λ with L^{+} as central ray (l.c.) intersect L at $\bar{p}$. Then ΛT^{-1} is the limit circle with L^{+} as central ray through qT^{-1} and $\bar{p}T^{-1}$ ([1, p.200 (d)]). It was just shown that $\bar{p}\bar{p}T^{-1} = qqT^{-1}$. On the other hand H intersects ΛT^{-1} in a point f which is the unique foot of q on ΛT^{-1} ([1, p.102, Theorem 5]) and $qf = \bar{p}\bar{p}T^{-1}$. But then $qqT^{-1} = qf$ contradicts the uniqueness of the foot.

By means of a topological transformation of the torus (or the plane) on itself we can reach that the euclidean lines $x = \text{const.}$ and $y = \text{const.}$ represent geodesics. Every other geodesic has then because of II and the validity of the parallel axiom for the lines $x = \text{const.}$ and $y = \text{const.}$ a representation of the form

$$y = f(x), \quad -\infty < x < \infty$$

with $f(x)$ either strictly increasing or strictly decreasing and $|f(x)| \to \infty$ for $x \to \infty$. It will be shown that for every such line the "*slope*"

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} \tag{2}$$

exists and is different from 0 and ∞.

Consider first the case where L is a rational line through the origin z and the point $(m,n) = zT(m,n)$, $m \neq 0$, $n \neq 0$. Then $f(\nu m) = \nu f(m)$ and if $\nu m \leqslant x \leqslant (\nu+1)m$ then because $f(x)$ is monotone

$$|f(x) - f(\nu m)| < |f[(\nu+1)m] - f(\nu m)| = f(m)$$

hence with $\theta_1 < 1$

$$\frac{f(m)}{m} = \lim_{\nu \to \pm\infty} \frac{f(\nu m)}{\nu m} = \lim_{\nu \to \pm\infty} \frac{f(\nu m) + \theta_1 f(m)}{\nu m + \theta_2 m} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$$

A rational line L_κ obtained from L by the translation $T(0,\kappa)$ has the equation $y = f(x) + \kappa$ so that L_κ has the same slope as L. If L' is any line parallel to L, with the equation $y = f'(x)$, then L' lies for a suitable κ between L and L_κ so that L' also has this slope.

Now let $y = f(x)$ represent an arbitrary line. If it did not have a slope, then m and n different from 0 would exist such that

$$\liminf \frac{f(x)}{x} < \frac{m}{n} < \limsup \frac{f(x)}{x}$$

The rational line containing the points $(0, f(0))T(\nu m, \nu n)$ would then intersect L more than once, without coinciding with L.

The definition (2) of the slope implies

(3) *Lines with different slopes intersect.*

(4) *There is a line with a given slipe* $\mu \neq 0, \infty$ *through a given point* $p = (x_0, y_0)$

If $\mu = \frac{n}{m}$ then the line containing the points $pT(\nu m, \nu n)$ satisfies (4). If μ is irrational[2], choose a sequence of rational numbers ρ_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$, which increase and tend to μ and a rational number $\rho_0 > \mu$. Denote by L_i a rational line through p with slope ρ_i. Then L_{i+1} lies between L_i and L_0, hence L_i tends to a limit line L through p. If $y = f_i(x)$ and $y = f(x)$ represent L_i and L respectively, then $f_0(x) > f(x) > f_i(x)$ for $x > x_0$ and $i \geq 1$; hence the slope of L is at least μ, and at most ρ_0. Since $\rho_0 > \mu$ was arbitrary L has slope μ.

Statements (3) and (4) show that the parallel axiom follows from:

(5) *There is at most one line with a given slope through a given point* p.

For rational μ this follows from the fact that the parallel axiom holds for rational lines. For if $\mu = n/m$ and if the line L containing the points $pT(\nu m, \nu n)$ has the equation $y = f(x)$ then any other line L′ through $p = (x_0, y_0)$ has an equation $y = f'(x)$ with $f'(x) > f(x)$ for $x > x_0$ say. Because L

---

[2] The following argument applies also to $\nu = 0$ or ∞.

is parallel to $LT(0,1)$, which has the equation $y = f(x)+1$, the line L' must intersect $LT(0,1)$ for some $x' > x_0$.

Then for a suitable $\nu > 0$ the point $pT(\nu m, \nu n)\ T(0,1)$ lies on $LT(0,1)$ and between L' and L. The line L'' through p and $pT(\nu m, \nu n+1)$ has slope $\frac{\nu n+1}{\nu m} > \mu$ and the slope of L' cannot be smaller than the slope of L''.

Let μ now be irrational and assume for an indirect proof that there are two different lines L, K through p with slope μ. We may assume that p is the origin and that the two lines have equations of the form

$$L : y = f(x), \quad K : y = g(x) \quad \text{with} \quad g(x) > f(x) \quad \text{for} \quad x > 0.$$

Then for integral $n > 0$

$$(6) \qquad 0 < g(n) - f(n) < 1$$

because otherwise the segment S_n connecting $(n, f(n))$ to $(n, g(n))$ would contain a point of the form (n, m) with integral m, and the rational line L through p and (n, m) would lie between L and K. By the first part of this proof the slope L would be smaller, and the slope of K would be greater, than n/m. Because the distance is invariant under the $T(m,n)$ it follows from [1, p.103, Theorem 6] that a $\delta > 0$ exists such that

$$g(n) - f(n) > \delta \quad \text{for} \quad n \geqslant 1 \ .$$

For a given integral $\kappa \geqslant 3$ determine the integer m_κ by

$$m_\kappa \delta \geqslant \kappa + 1 > (m_\kappa - 1) \delta \quad . \tag{7}$$

Then $\bigcup_{i=1}^{m_\kappa} S_i$ contains $\kappa + 1$ points which represent the same point on the torus, or two ordinates differ by integers. We distinguish two cases

a) There are for some κ four points p_i no three of which lie on the same geodesic. A familiar argument from elliptic functions shows that the convex closure of these 4 points in terms of S would then contain a "period parallelogram" Q whose sides are formed by segments of curves in S. Since the domain bounded by $y = f(x)$ and $y = g(x)$ for $x > 0$ is convex Q would lie in this domain, on the other hand Q would contain a point equivalent to p that is of the form (m, n) which was already seen to be impossible.

b) At least κ of the $\kappa + 1$ points lie on a geodesic H^κ. Then H^κ is rational and has a rational slope ρ_κ. Since no two of the κ points lie on the same S_i the abscisas n_i^κ of the κ points are different. Let $n_i^\kappa < n_{i+1}^\kappa$. Then $n_\kappa^\kappa - n_1^\kappa > \kappa - 1$ hence because of (7) $n_1^\kappa / n_\kappa^\kappa \leqslant 1 - (\kappa - 1)/m_\kappa \leqslant 1 - \delta/4$. Since

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{f(x_1)}{x_1} + \frac{(x_2/x_1)\ [f(x_1)/x_1 - f(x_2)/x_2]}{1 - x_2/x_1}$$

it follows that for $x_1 \to \infty$ and $0 < x_2/x_1 \leqslant \theta < 1$

$$\lim_{x_1 \to \infty} \frac{f(x_1)}{x_1} = \lim_{x_1 \to \infty} \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$$

where x_2 may, or may not, be bounded.

Hence it follows in the present case from $n_1^\kappa/n_\kappa^\kappa \leq 1 - \delta/4$ that

$$\lim_{\kappa\to\infty} \frac{f(n_\kappa^\kappa) - f(n_1^\kappa)}{n_\kappa^\kappa - n_1^\kappa} = \lim_{\kappa\to\infty} \frac{g(n_\kappa^\kappa) - g(n_1^\kappa)}{n_\kappa^\kappa - n_1^\kappa} = \mu$$

and therefore from (6) that also

$$\lim_{\kappa\to\infty} \frac{f(n_\kappa^\kappa) - g(n_1^\kappa)}{n_\kappa^\kappa - n_1^\kappa} = \lim_{\kappa\to\infty} \frac{g(n_\kappa^\kappa) - f(n_1^\kappa)}{n_\kappa^\kappa - n_1^\kappa} = \mu \quad .$$

On the other hand

$$(\kappa-1) \min_j (n_j^\kappa - n_{j-1}^\kappa) \leq n_\kappa - n_1 \leq m_\kappa - 1$$

and by (7)

$$\min_j (n_j^\kappa - n_{j-1}^\kappa) \leq (m_\kappa - 1)/(\kappa - 1) < 2/\delta \quad .$$

Therefore the denominator of the slope ρ_κ of H^κ (if reduced) cannot surpass $2/\delta$. Since μ is irrational there is an $\epsilon > 0$, independent of κ, such that $|\rho_\kappa - \mu| > \epsilon$. But if $y = h(x)$ represents H^κ, since the κ points lie between L and K,

$$\frac{g(n_\kappa^\kappa) - f(n_1^\kappa)}{n_\kappa^\kappa - n_1^\kappa} > \frac{h(n_\kappa^\kappa) - h(n_1^\kappa)}{n_\kappa^\kappa - n_1^\kappa} = \rho_\kappa \quad \frac{f(n_\kappa^\kappa) - g(n_1^\kappa)}{n_\kappa^\kappa - n_1^\kappa}$$

which in conjunction with (8) contradicts $|\rho_\kappa - \mu| > \epsilon$. This completes the proof of V.

4. We turn now to the *second part of Theorem* 1.[3] Conditions I and II alone guarantee that the curves in S have all the usual continuity and intersection properties, compare [1, Chapter III, § 3]. We may therefore again assume that the curves $x = \text{const.}$ and $y = \text{const.}$ represent curves of S, because of the parallel axiom all other curves again have representations of the form $y = f(x)$ with $f(x)$ strictly monotone and $|f(x)| \to \infty$ for $|x| \to \infty$.

Take any pair m, n with $m > 0$ and denote by L_p the curve in S containing the points $pT(\nu m, \nu n)$. For any p, q the curves L_p and L_q are either parallel or identical. Let $y = f_p(x)$ represent L_p (since $n = 0$ is admitted, $f_p(x)$ may be constant). That $T(m,n)$ carries L_p into itself implies $f_p(x+m) = f_p(x) + n$ for all x, therefore $f_p(x) - f_q(x)$ is periodic with period m and the area

$$d_{m,n}(p,q) = \int_{x_0}^{x_0+m} |f_p(x) - f_q(x)|\, dx$$

of the "parallelogram" Q bounded by L_p, L_q and $x = x_0$, $x = x_0+m$ is independent of x_0. An arbitrary translation $T' = T(m', n')$ carries Q into a parallelogram which has the same relation to pT' and qT' as Q has to p and q. But T' leaves area invariant, hence

$$d_{m,n}(p,q) = d_{m,n}(pT', qT') \tag{9}$$

[3] The idea of the following proof is taken from a similar proof in [1, Chapter III, § 3]. There the reader will find details which he might miss in the present discussion.

clearly $d_{m,n}(p,q) = d_{m,n}(q,p)$ and

(10) $$d_{m,n}(p,q) = 0 \quad \text{if and only if} \quad L_p = L_q$$

The arbitrariness of x_0 yields

(11) $d_{m,n}(p,q) + d_{m,n}(q,r) = d_{m,n}(p,r)$ *if and only if the line* L_q *lies in the closed strip bounded by* L_p *and* L_r.

(12) $d_{m,n}(p,q) + d_{m,n}(q,r) > d_{m,n}(p,r)$ *if* L_q *does not lie in this strip.*

Let δ be the difference of the ordinates of p and q and determine the integer κ by $\kappa - 1 \leqslant |\delta| < \kappa$. Then $T(0,\pm\kappa)$ carries L_p into a line L_r for which L_q (if different from L_p) lies between L_p and L_r. Then

(13) $$d_{m,n}(p,q) < d_{m,n}(p,r) = \kappa d_{m,n}(p,pT(0,1)) \leqslant (|\delta|+1)\lambda_{m,n}$$

where $\lambda_{m,n}$ depends only on m and n. A distance which satisfies our requirements will be

(14) $$pq = \Sigma' \, d_{m,n}(p,q)\, \lambda_{m,n}^{-1}\, 2^{-m-|n|} \quad ;$$

where the prime indicates that the summation is extended over all pairs m,n with $m > 0$ and all n, but such that $n/m \neq n'/m'$ for different pairs m,n and m',n'.

If p and q are given and have ordinate difference δ

then by (13) $d_m(p,q)\lambda^{-1}_{m,n} < |\delta| + 1$ for all m,n, so that pq is always finite. (9) shows that pq is invariant under all $T(m',n')$, and (11) and (12) imply that pq satisfies the triangle inequality. $pp = 0$ by (20), and $pq = qp > 0$ for $p \neq q$ follows from $d_{m,n}(p,q)$ $d_{m,n}(q,p)$ and from (10) because for suitable m,n the lines L_p and L_q (in the previous notation) will be different.

Thus pq *satisfies the axioms for a metric space.* To see that the curves in S are the geodesics it must be shown: that for three different points p,q,r

(15) $pq + qr = pr$ *if* q *lies on the segment* σ *of the curve of* S *through* p *and* r.

(16) $pq + qr > pr$ *if* q *does not lie on* σ.

If q lies on σ, then for any m,n the line L_q will either contain p and r or L_q lies between L_p and L_r. Hence it follows from (10) and (11) that (15) holds.

If finally q does not lie on σ, let L be the curve in S through two arbitrary interior points q' and q'' of the segments (in the sense of S) from q to p and r respectively. Then L separates σ from q. If L contains for suitable m,n with $m > 0$ the points $q'T(\nu m, \nu n)$, then (16) follows from (12). If L does not have this property (that is either a line $x = \text{const}$ or not rational) then the parallel axiom implies the existence of $m > 0$ and n such that the line L' containing the points $q'T(\nu m, \nu n)$ is so close to L that it also separates σ, and therefore p and r from q. Then (16) follows again from (12).

That the distance pq is equivalent to the euclidean distance is easily derived from either the analytic definition of pq or the geometric properties of S. The finite compactness of pq follows from its invariance under $T(m',n')$.

5. A few examples will conclude this paper. The construction of the distance pq in the preceding section happens to yield a Minkowski metric if the curves in S are the euclidean lines $ax + by + c = 0$. This is however, accidental because other functions $d_{m,n}(p,q)$ than the area could have been used. For instance, if $p_i = (x_i, y_i)$ then

$$p_1p_2 = [(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2]^{\frac{1}{2}} + |7y_1+\sin 2\pi y_1-7y_2-\sin 2\pi y_2|$$

yields a metric for which the euclidean lines are the geodesics, because $7y + \sin 2\pi y$ increases monotonically. Moreover, this metric is invariant under the $T(m,n)$. Instead $7y + \sin 2\pi y$ many other functions could have been used, a similarly formed term in the x_i could have been added, the euclidean distance occurring in the definition of p_1p_2 could have been replaced by an arbitrary Minkowski distance. The euclidean distance can also be modified in less obvious ways. This elucidates a point made in the introduction: *there is so much choice that the problem to determine all metrics which belong to a given system of curves becomes uninteresting.*

One might ask whether conditions I, II and III do not imply either IV or V. The example 1) in [1, p. 105] shows that this is not the case.

Finally we give an example which confirms the assertion of the introduction that *the curves of a system* S *satisfying* *conditions* I *to* IV *need not be the straight lines.* This means the following: in general, no topological mapping of P on another plane P' exists under which the system S goes into the system of the euclidean line in P'. An obviously necessary (and actually also sufficient) condition for such a mapping to exist is that the *Theorem of Desargues* holds for the curves in S. Systems which satisfy I, II, and V but not Desargues' Theorem are well known, but a system satisfying III and IV as well has not come to the author's attention.

To construct such a system S, we first define certain functions $f_t(x)$ in the interval $0 \leq x \leq 1$. Put

$$f_1(x) = x, \quad \text{and for integral } n > 1$$

$$f_n(x) = \begin{cases} a_n x & \text{for } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ b_n(x-\frac{1}{2}) + \frac{1}{2} a_n & \text{for } \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

where

$$a_n = 2n - 1 - 2c_n, \quad b_n = 1 + 2c_n, \quad c_n = \sum_{\nu=1}^{n} 10^{-\nu}$$

then $f_n(1) = n$ and $f'_{n+1}(x) - f'_n(x) > 0$ for $x \neq \frac{1}{2}$ so that $f_{n+1}(x) - f_n(x)$ increases. Morover put

$$f_t(x) = (n+1-t)\, f_n(x) + (t-n)\, f_{n+1}(x) \quad \text{if } n < t < n+1 .$$

Then it is easily seen that $f_{t_2}(x) - f_{t_1}(x)$ increases for $1 < t_1 < t_2$, and that $f_t(1) = t$.

Now define $g_t^b(x)$ for all x, all $t < 1$ and all b by

$$g_t^b(x) = f_t(x-m) + mt + b \quad \text{for} \quad m \leq x \leq m+1$$

Since

$$(g_{t_2}^{b_2}(x) - g_{t_1}^{b_1}(x))' = f'_{t_2}(x-m) - f'_{t_1}(x-m)$$

the difference $g_{t_2}^{b_2}(x) - g_{t_1}^{b_1}(x)$ increases for $t_2 > t_1$. Hence the two curves $y = g_{t_1}^{b_1}(x)$ and $y = g_{t_2}^{b_2}(x)$ intersect at most once. Morover $y = g_t^b(x)$ has slope t in the sense of (2).

The system S is defined as consisting of all curves $y = g_t^b(x)$, all lines $y = mx + b$ with $m < 1$ and the lines $x = \text{const}$. Because $(g_t^b(x))' \geq 1$ each line in S intersects each $y = g_t^b(x)$ exactly once.

Through every point of the plane there is exactly one line with a given slope (2). Hence the parallel axiom holds. It is easily verified that two distinct points of the plane lie on exactly (and not only at most) one curve in S.

To show that the system S has property IV it suffices to prove the following: If $g_t^b(x') = y'$ and $g_t^b(x'+m) = y' + n$, where m and n are integers,, then $g_t^b(x'+\nu m) = y' + \nu n$. Determine the integer k by $k \leq x' < k+1$. Then putting $f_t(x'-k) + b = W$,

$$y' = g_t^b(x') = W + kt, \quad g_t^b(x'+m) = W + (k+m)t = W + kt + n$$

hence $t = n/m$. Moreover

$$g_t^b(x'+\nu m) = W + (k+\nu m)t = y' + \nu mt = y' + \nu n.$$

That the Theorem of Desargues does not hold is seen as in the other well known examples of non-Desarguesian systems: Two triangles which are in the Desarguesian relation in the ordinary sense are placed so that all but one of the lines entering the theorem have slope less than 1 and hence are also curves of S. The last line L has slope > 1. The curve $y = g^b_t(x)$ through two of the three points of the Desarguesian configuration on L will in general not contain the third point.

The system S goes into itself not only under the $T(m,n)$ but under all translations $x' = x+m$, $y' = y+b$ where m is an integer, but b is an arbitrary real number. It is easily verified that the metric constructed in section 4 is invariant under all these translations. Thus:

THEOREM 3. *There are metrizations of the torus without conjugate points which have a one-parameter group of motions and for which the geodesics are not the straight lines.*

The system S is so constructed that it also exhibits another phenomenon, which is surprising at first sight. The curves $y = g^o_n(x)$ of S approach for $n \to \infty$ the curve $x = 0$, but there is an $\epsilon > 0$ independent of n and a circular disk with radius ϵ (whose center depends on n) such that $g^o_n(x)$ does not enter this disk.

University of Southern California.

REFERENCES

[1] H.Busemann, Metric Methods in Finsler Spaces and in the

foundations of Geometry. Annals of Mathematics Studies, No. 8. Princeton 1942.

[2] H.Busemann, Spaces with Non-Positive Curvature, Acta Math., Vol. 80 (1949), pp.261-310.

[3] E.Hopf, Closed surfaces without conjugate points, Proc.Nat.Acad.Sc., Vol. 34 (1948), pp.47-51.

[4] M.Morse and G.Hedlund, Manifolds without conjugate points, Trans.Am.Math.Soc., Vol. 51 (1942), pp.362-382.

Vol.X, 3,4 BOLETIN DE LA SOCIEDAD MATEMATICA MEXICANA 1953

SOBRE IDEALES PRIMARIOS EN ANILLOS SEMILOCALES GENERALIZADOS*

E. Lluis Riera y F. Recillas Juárez**

Sea $\mathfrak{o}$ un anillo semilocal generalizado, es decir, un $\mathfrak{m}$-anillo tal que $\mathfrak{m}$ está contenido en la intersección de todos los ideales máximos de $\mathfrak{o}$.

Sea $\bar{\mathfrak{o}}$ la completación de $\mathfrak{o}$ (respecto a $\mathfrak{m}$). Si $\mathfrak{a}$ es un ideal en $\mathfrak{o}$, llamaremos *extensión* de $\mathfrak{a}$ al ideal $\mathfrak{a}\bar{\mathfrak{o}}$ de $\bar{\mathfrak{o}}$. Si $\bar{\mathfrak{a}}$ es un ideal en $\bar{\mathfrak{o}}$, llamaremos *contracción* de $\bar{\mathfrak{a}}$ al ideal $\bar{\mathfrak{a}} \cap \mathfrak{o}$ en $\mathfrak{o}$.

Debido a la fórmula $\mathfrak{a}\bar{\mathfrak{o}} \cap \mathfrak{o} = \mathfrak{a}$, la extensión induce una correspondencia biunívoca entre todos los ideales de $\mathfrak{o}$ y sus imágenes en $\bar{\mathfrak{o}}$, siendo la contracción la correspondencia inversa. Esta correspondencia es biunívoca entre los conjuntos de

*Presentado ante el III Congreso Nacional de Matemáticas en San Luis Potosí, junio de 1953.

**Becarios del Instituto Nac. de la Investigación Científica.

ideales de $\mathfrak{o}$ y $\bar{\mathfrak{o}}$ que contienen a $\mathfrak{m}$ y $\bar{\mathfrak{m}} = \mathfrak{m}\bar{\mathfrak{o}}$ respectivamente; también induce una correspondencia biunívoca entre los ideales primos máximos de $\mathfrak{o}$ y todos los ideales primos máximos de $\bar{\mathfrak{o}}$.

Si el anillo $\mathfrak{o}$ es local, $\mathfrak{m}$ el ideal de las no unidades, se sabe que la extensión induce una correspondencia biunívoca entre los conjuntos de primarios asociados a $\mathfrak{m}$ y $\bar{\mathfrak{m}} = \mathfrak{m}\bar{\mathfrak{o}}$ respectivamente.

El resultado que aquí obtenemos es la generalización de esta propiedad para anillos semilocales generalizados.

LEMA 1. *Sea* $\mathfrak{a}$ *un ideal de* $\mathfrak{o}$ *y* $\bar{\mathfrak{a}}$ *su extensión; la condición necesaria y suficiente para que un elemento* $\bar{a}$ *de* $\bar{\mathfrak{o}}$ *pertenezca a* $\bar{\mathfrak{a}}$ *es que* $\bar{a} = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ *con* $a_n \in \mathfrak{a}$ *a partir de cierto rango.*

Según un teorema de O. Zariski, la adherencia de $\mathfrak{a}$ en $\bar{\mathfrak{o}}$ coincide con su extensión y el lema resulta de que $\bar{a}$ está en dicha adherencia si y sólo si $\bar{a} = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ con $a_n \in \mathfrak{a}$.

LEMA 2. *Dado* k, *entero positivo y un elemento* $\bar{a}$ *de* $\bar{\mathfrak{o}}$ *existe* $a \in \mathfrak{o}$ *tal que* $\bar{a} \equiv a(\bar{\mathfrak{m}}^k)$

Sea $\bar{a} = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ con $a_n \in \mathfrak{o}$; existe m tal que $a_n - a_m \in \mathfrak{m}^k$ para toda $n > m$, de donde $\bar{a} - a_m = \lim\limits_{n\to\infty} (a_n - a_m)$ y por el lema 1, $\bar{a} - a_m \in \mathfrak{m}^k\,\bar{\mathfrak{o}} = \bar{\mathfrak{m}}^k$.

LEMA 3. *Sea* $\mathfrak{q}$ *un ideal primario asociado al primo máximo* $\mathfrak{p}$ *de* $\mathfrak{o}$. *Entonces si* $\bar{x} = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ *y* $x_n - x_{n-1} \in \mathfrak{m}^n$ *resulta que* $\bar{x} \in \mathfrak{q}\bar{\mathfrak{o}}$ *si y sólo si* $x_h \in \mathfrak{q}$, *donde* h *es un número tal que* $\mathfrak{q} \supset \mathfrak{p}^h$.

Como $\mathfrak{p} \supset \mathfrak{m}$, $\mathfrak{q} \supset \mathfrak{m}^h$.

Si $x_h \in \mathfrak{q}$, entónces $x_{h+1}, x_{h+2}, x_{h+3}, \ldots$ están en $\mathfrak{q}$ $(x_{h+1} - x_h \in \mathfrak{m}^h \subset \mathfrak{q}$ y como $x_h \in \mathfrak{q}$, $x_{h+1} \in \mathfrak{q}$, etc.) y por el lema 1 resulta que $\bar{x} \in q\bar{o}$.

Inversamente, si $\bar{x} \in q\bar{o}$ entonces $\bar{x} = \lim_{n\to\infty} y_n$ con $y_n \in q$. Para toda $n \geq N_h$, $y_n - x_n \in m^h \subset q$. Supongo $N_h \geq h$. Si $n \geq N_h$, $x_n \in q$ porque $y_n \in q$ y $y_n - x_n \in q$. Pero $x_n\ x_h = (x_n - x_{n-1}) + (x_{n-1} - x_{n-2}) + \ldots + (x_{h+1} - x_h)$; cada uno de los sumandos esta en m^h (porque $n \geq h$) y por consiguiente $x_n - x_h \in m^h \subset q$ y tomando en cuenta que $x_n \in q$ resulta que $x_h \in q$.

LEMA 4. *Si q es un ideal primario para el ideal primo máximo $\mathfrak{p}$ en $\mathfrak{o}$ entonces $\bar{q} = q\bar{\mathfrak{o}}$ es primario para el primo máximo $\mathfrak{p}\bar{\mathfrak{o}} = \bar{\mathfrak{p}}$ en $\bar{\mathfrak{o}}$.*

Sean $\bar{x} = \lim x_n$, $\bar{y} = \lim y_n$ con $x_n, y_n \in \mathfrak{o}$ y tales que $x_n y_n - x_{n-1} y_{n-1} \in m^n$, $x_n - x_{n-1} \in m^n$ y $y_n - y_{n-1} \in m^n$. Si $\bar{x}\,\bar{y} \in \bar{q}$ y $\bar{x} \notin \bar{q}$ por el lema 3 $x_h y_h \in q$, $x_h \notin q$ por lo tanto $y_h \in \mathfrak{p}$. Además $y_{h+n} \in \mathfrak{p}$ para toda n y por lo tanto $\bar{y} \in \mathfrak{p}\bar{\mathfrak{o}} = \bar{\mathfrak{p}}$. Como también $\bar{q} \subset \bar{\mathfrak{p}}$ y $\bar{\mathfrak{p}}^h \subset \bar{q}$ resulta el lema.

TEOREMA. *Si $\mathfrak{o}$ es un anillo semilocal generalizado, $\bar{\mathfrak{o}}$ su completación, $\mathfrak{p}$ un ideal primo máximo de $\mathfrak{o}$ y $\bar{\mathfrak{p}}$ su extensión, entonces existe una correspondencia biunívoca* (la extensión) *entre el conjunto de ideales primarios para $\mathfrak{p}$ en $\mathfrak{o}$ y el de ideales primarios para $\bar{\mathfrak{p}}$ en $\bar{\mathfrak{o}}$*

El lema 4 asegura que la imagen de un primario para $\mathfrak{p}$ es primario para $\bar{\mathfrak{p}}$ y debido a la fórmula $a\bar{\mathfrak{o}} \cap \mathfrak{o} = a$, la correspondencia es biunívoca. Falta sólo ver que es sobre.

Sea $\bar{q}$ un primario para $\bar{\mathfrak{p}}$ en $\bar{\mathfrak{o}}$. $\bar{q} \cap \mathfrak{o} = q$ es primario para $\bar{\mathfrak{p}} \cap \mathfrak{o}$ el cual es igual a $\mathfrak{p}$. Demostraremos que $\bar{q}$ es la extensión de q. Podemos elegir h tal que $\mathfrak{p}^h \subset q$ y $\bar{\mathfrak{p}}^h \subset \bar{q}$. Evidentemente $q\bar{\mathfrak{o}} \subset \bar{q}$; inversamente, sea $\bar{a} \in \bar{q}$ por el lema 2, existe $a \in \mathfrak{o}$ tal que $\bar{a} \equiv a(\bar{m}^h)$, de donde $\bar{a} - a \in \bar{m}^h \subset \subset \bar{\mathfrak{p}}^h \subset \bar{q}$, por lo cual $a \in \bar{q}$ y $a \in \bar{q} \cap \mathfrak{o} = q$. Por otra par te, $\bar{a} - a \in \bar{\mathfrak{m}}^h = \mathfrak{m}^h \bar{\mathfrak{o}} \subset \mathfrak{p}^h \bar{\mathfrak{o}} \subset \mathfrak{q}\bar{\mathfrak{o}}$ y como $a \in \mathfrak{q} \subset \mathfrak{q}\bar{\mathfrak{o}}$, resulta que $\bar{a} \in \mathfrak{q}\bar{\mathfrak{o}}$, es decir $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{q}\bar{\mathfrak{o}}$. Por consiguiente $\bar{\mathfrak{q}} = \mathfrak{q}\bar{\mathfrak{o}}$.

BIBLIOGRAFIA

Chevaley, C. On the theory of local rings. Ann. of Math. Vol.44, 1943.

Cohen, I.S. On the structure and ideal theory of complete local rings, Trans.Am.Math.Soc. Vol. 59, 1946.

Zarischi, O. Generalized semi-local rings. Summa Bras.Math. Vol. 1, 1946.

Instituto de Matemáticas de la
Universidad Nacional de México.

Vol. X, 3,4 BOLETIN DE LA SOCIEDAD MATEMATICA MEXICANA 1953

DEMOSTRACION DE LA EQUIVALENCIA DE LA TOPOLOGIA DE LA CONVERGENCIA REGULAR Y LA TOPOLOGIA-K PARA ESPACIOS DE TRANSFORMACIONES*

Rodolfo Morales Martínez**

El objeto de la presente nota es dar una demostración del teorema de R. Arens que establece la equivalencia de una estructura uniforme (la topología de la convergencia regular) y la topología-k en Y^X cuando Y es un espacio uniforme (1, pag. 489). Para tal fin, utilizo la técnica de André Weil usada en [2, pag.25] para establecer un Lema que es generalización de un conocido teorema sobre espacios métricos, a saber: dos subconjuntos de un espacio métrico, ajenos uno de los cuales es compacto y el otro cerrado estan separados por una distancia positiva.

*Recibido el 9 de diciembre de 1953.

**Becario del Instituto Nacional de la Investigación Científica.

Sean X un conjunto no vacio, $X \times X$ su producto por si mismo, es decir, la colección de parejas ordenadas (p,q) con $p,q \in X$.

Si V_α es un subconjunto de $X \times X$, V_α se llamará una *relación*. $V_\alpha(p)$ simboliza el conjunto $\{q \mid (p,q) \in V_\alpha\}$ ó sea, el conjunto de todos los puntos $q \in X$ tales que $(p,q) \in V_\alpha$, y si $A \subset X$, $V_\alpha(A) = \bigcup_{p \in A} V_\alpha(p)$.

El conjunto formado por todas las parejas (p,q) con $p = q$ es la *diagonal* Δ.

Dadas las relaciones V_α, V_β su *producto* $V_\alpha V_\beta$ es el conjunto de todas las parejas (p,r) tales que existe un $q \in X$ y $(p,q) \in V_\beta$, $(q,r) \in V_\alpha$.

Se define la *inversa* de una relación V_α con el conjunto $V_\alpha^{-1} = \{(p,r) \mid (r,p) \in V_\alpha\}$.

Sea ahora $\{V_\alpha\}$ una familia de relaciones en $X \times X$ definida por un conjunto de indices $I = \{\alpha\}$ sujeta a satisfacer los axiomas:

I) $\bigcap_{\alpha \in I} V_\alpha = \Delta$

II) $\alpha, \beta \in I \Longrightarrow \exists \; \gamma \in I \ni V_\gamma \quad V_\alpha V_\beta$

III) A todo $\alpha \in I$ le corresponde un $\beta \in I \ni V_\beta^{-1} V_\beta \quad V_\alpha$.

La familia $\{V_\alpha\}$ verificando las propiedades anteriores se llama una *estructura uniforme* en el sentido de André Weil, y es bien sabido que define en X una topología tomando como vecindades los conjuntos $V_\alpha(x)$ con $\alpha \in I$, $x \in X$ y que

X es entonces completamente regular [2, pag. 13].

El espacio X se llama en este caso un *espacio uniforme*. Una familia amplia de espacios de este tipo es la clase de los espacios métricos.

De los axiomas anteriores, por inducción y con las definiciones $V_\alpha^{-n} = (\overset{-1}{V_\alpha})^n$, $V_\alpha^0 = \Delta$ para todo α, no es difícil de mostrar que: a toda relación V_α le corresponde otra V_β tal que $V_\beta^n \subset V_\alpha$ para todo entero n.

La topología-k. Sean X, Y espacios topológicos y Y^X el conjunto de todas las funciones continuas que transforman a X en Y. El símbolo (K,W) con $K \subset X$ y $W \subset Y$ indica el conjunto de todas las funciones f con $f(K) \subset W$. Cuando K recorre todos los conjuntos compactos en X y W todos los conjuntos abiertos en Y, la familia $\{(K,W)\}$ tomada como subbase es la topología-k en Y^X.

Supongamos que Y tiene una estructura uniforme $\{V_\alpha\}$ y que K es compacto en X. Se puede establecer en Y^X una relación (K/V_α) con el criterio: $(f,g) \in (K/V_\alpha) \quad (f(x),g(x)) \in V_\alpha$, $x \in K$.

Es fácil demostrar que la familia $\{(K/V_\alpha)\}$ definida en la forma anterior es una estructura uniforme para Y^X puesto que es inmediato que se verifican las proposiciones:

I') $(f,g) \in (K/V_\alpha)$ para todo $\alpha \in I$ en Y, K compacto arbitrario en $X \Longleftrightarrow f = g$.

II') $L \cup M \subset K$, $V_\beta \subset V_\alpha^2 \Longrightarrow (K/V_\beta) \subset (L/V_\alpha) \cap (M/V_\alpha)$ con L, M, K compactos.

III') $(K/V_\alpha)^2 \subset (K/V_\alpha^2)$

Estas propiedades, primeramente notadas por R. Arens implican los axiomas I, II y III en Y^X y automáticamente Y^X tiene una estructura uniforme.

La topología asi definida se llama la topología de la convergencia regular [1, pag.489]. Se indicará con $Y^X(U)$

Lema. Si $K, F \subset Y$ con K compacto, F cerrado y $K \cap F = \phi$ (conjunto vacío), entonces existe una relación V_α en la estructura de Y tal que $V_\alpha(x) \cap F = \phi$, $x \in K$ y como consecuencia $V_\alpha(y) \cap K = \phi$, $y \in F$.

Nota. En toda estructura uniforme puede tomarse siempre $V_\alpha = \overset{-1}{V_\alpha}$ para todo $\alpha \in I$ sin perder generalidad [2, pag.9].

Demostración. Para todo $x \in K$, existe $V_{\beta(x)}$ tal que $V_{\beta(x)}(x) \cap F = \phi$; como K es compacto hay un número finito de puntos $x_1,\dots,x_m \in K$ con $K \subset \bigcap_{i=1}^{m} V_{\beta(x_i)}(x_i) = W$ (abierto). Sea $p \in K$. Existe un índice γ y otro δ con $V_\gamma(p) \subset W$, $V^2_\delta(p) \subset V_\gamma(p)$, $V_\delta(p) \subset V_\gamma(p)$. Cuando p recorre K las vecindades $V_\delta(p)$ forman una cubierta de K; existe entonces una subcubierta finita

$$\{V_{\delta(p_1)}(p_1),\dots, V_{\delta(p_n)}(p_n)\}$$

Sea α tal que $V_\alpha \subset \bigcap_{i=1}^{n} V_{\delta(p_i)}$ $x \in K$; $x \in V_{\delta(p_r)}(p_r)$ en donde r es algún i.

$$\therefore\ V_\alpha(x) \subset V_\alpha(V_{\delta(p_r)}(p_r)) \subset V_{\delta(p_r)}(V_{\delta(p_r)}(p_r) \subset V^2_{\delta(p_r)}(p_r) \subset W$$

$$\therefore\ V_\alpha(K) \cap F = \phi$$

Evidentemente también $V_\alpha(F) \cap K = \phi$.

TEOREMA 2 (R. Arens). La topología $Y^X(\mathcal{U})$ es equivalente a la topología-k.

Demostración. Sea $f \in (K,W)$. Como $f(K)$ es compacto y $Y-W$ es cerrado con $f(K) \cap (Y-W) = \phi$, existe un índice α, por el lema anterior tal que

$$V_\alpha(y) \cap (Y-W) = \phi, \quad y \in f(K)$$

Tomo $(K/V_\alpha) \in \mathcal{U}$.

$$g \in (K/V_\alpha)(f) \Longrightarrow (g(x), f(x)) \in V_\alpha, \quad x \in K \Longrightarrow g(x) \in V_\alpha(f(x)),$$

$$x \in K \Longrightarrow g(x) \in Y-W \qquad g(x) \in W \Longrightarrow g \in (K,W) \qquad \text{y}$$

$$(K/V_\alpha)(f) \subset (K,W) \quad .$$

Sea $(K/V_\alpha)\ (f) \in U$.

Por II) y III) existen los índices β, γ tales que $V_\beta^2 \subset V_\alpha$, $V_\gamma \subset \overline{V}_\gamma \subset V_\beta$ [2, pag.9].

Dado $x \in K$, existe una vecindad $V(x)$ con $f(V) \subset V_\gamma(f(x))$ y entonces hay un número finito de puntos $x_1, \ldots, x_n \in K$ tales que

$$K \subset V(x_1) + \ldots + V(x_n) \quad .$$

Hago $K_1 = K \cap \overline{V(x_1)}$ que es compacto

$$f(K_1) \subset f(\overline{V(x_1)}) \subset V_\gamma(\overline{f(x_1)}) \subset \overline{V}(\overline{f(x_1)}) \qquad \overline{V}(f(x_1))$$

Entonces $f(K_1) \subset V_\beta(f(x_1)) \qquad i = 1, \ldots, n.$

Tomo $U = \bigcap_{i=1}^{n} (K_i, V_\beta(f(x_i))$ vecindad-k.

Sea $g \in U$.

$x \in K \Longrightarrow x \in K_r$, r algun valor de $i \Longrightarrow f(x) \in V_\beta(f(x_r))$ ó

$$(f(x), f(x_r)) \in V_\beta$$

$g \in U \Longrightarrow g(x) \in V_\beta(f(x_r))$ ó $(f(x_r), g(x) \in V_\beta$

$$\therefore \quad (f(x),\ g(x) \in V_\beta^2 \subset V_\alpha$$

$\therefore$ $g \in (K/V_\alpha)$ y $f \in U \subset (K/V_\alpha)\ (f)$

BIBLIOGRAFIA.

[1] Arens, R.F., A topology for spaces of transformations, Annals of Mathematics, Vol. 47, No.3, July, 1946, pp. 480-495.

[2] Weil, André, Sur les espaces a estructure uniforme et sur la Topologie General, Actualités Scientifiques et Industrielles, 551, Hermann et Cie, Paris 1937.

Instituto de Matemáticas de la
Universidad Nacional de Mexico.

Vol. X, 3,4 BOLETIN DE LA SOCIEDAD MATEMATICA MEXICANA 1953

THE INTRODUCTION TO THE THEORY OF ANALYTIC FUNCTIONS*

Marshall H. Stone.

A pedagogical very satisfactory approach to the study of integration originates in the search for the primitives of a given function - that is, for those functions having the given one as derivative. In the case of real functions of a real variable this approach has traditional advantages which, as we point out here, are preserved in the consideration of complex functions of a complex variable. The study of the equation

$$\frac{dw}{dz} = f(z) \tag{1}$$

where f is a given continuos function of the complex variable z with domain D, lead directly and simply to the essential

*Received September, 1951.

results of the Cauchy theory. The technical apparatus required in this development is at a minimum. In the standard theory all the preliminar labor needed to define integration along a path is promply shown by the Cauchy integral theorem to have been essentialy irrelevant; but here contour integration is a relegated to its proper place as a useful devise for computation. Any solution of (1) has an increment along the directed segment z_1, z_2 which is given by the integration of f as a function of a *real* parameter for the segment. This integral exists in any case, since f is continuos; and its value defines a function $H(z_1, z_2)$ of *two* complex variables on any convex part C of D. A solution of (1) will exists if and only if $H(z_1, z_2)$ is expressible as the increment of a function of one variable; or, equivalently, if

$$(2) \qquad H(z_1, z_2) + H(z_2, z_3) + H(z_3, z_1) = 0 \quad .$$

A *sufficient* condition for (2) to hold is that f have a derivative, the proof proceeds, along traditional and here clearly motivated lines, by subdivision of the triangle with vertices at z_1, z_2, z_3. The problem of matching local solutions of (1) to obtain a global one presents itself here as an elementary problem of combinatorial topology. Its solution for any simply connected open part of D contains the essence of the Cauchy integral theorem and leads at once to this theorem and the associated Cauchy integral formula. A familiar argument then shows that a function wich has a derivative everywhere in an open set is infinitely differentiable there, and is expressible locally by mean of power series. The *sufficient* condition above then appears to be *necessary* as well.

Chicago University.

Vol. X, 3,4 BOLETIN DE LA SOCIEDAD MATEMATICA MEXICANA 1953

OBSERVACION SOBRE UN TEOREMA DE D. ELLIS*

Enrique Valle Flores**

I. *Introducción.* D. Ellis[1] obtiene el siguiente

TEOREMA. *Todo grupo* G *es (isomorfo a) un subgrupo del grupo de movimientos del espacio métrico de Baire formado sobre* G,

para el caso en que el grupo G sea finito o numerable. En seguida se hace ver que lo hecho por Ellis no requiere esencialmente limitación para el número cardinal de G y que por consiguiente vale el teorema para un grupo arbitrario.

2. *El espacio métrico de Baire* $\mathfrak{B}(G)$ *sobre* G. Sus

---

*Presentado ante el III Congreso Nacional de Matemáticas, el 9 de junio de 1953.

**Becario del Instituto Nacional de la Investigación Científica

[1]Véase D. Ellis. On metric representation of groups. Mathematics Magazine. Vol. 26, pp. 183-4 (1953).

puntos son todas las sucesiones $\mathfrak{a} = (a_1, a_2, \ldots)$ de elementos $a_i \in G$ (naturalmente que dos puntos se identifican si *todas* sus componentes coinciden). La distancia se define: $d(\mathfrak{a},\mathfrak{a}) = 0$ y $d(\mathfrak{a},\mathfrak{b}) = 1/k$ si k es el primer entero para el cual $a_k \neq b_k$. Es fácil ver que $\mathfrak{B}(G)$ resulta espacio métrico con esa distancia *aunque* G *sea infinito no numerable*. Entonces a partir de aquí la demostración de Ellis puede aplicarse (y se hace figurar para que la presente nota quede completa).

En efecto, si $\mathfrak{b} = (b_1, b_2, \ldots)$, defínase para cada $a \in G$ la función

$$(1) \qquad \varphi(a) : \mathfrak{B}(G) \to \mathfrak{B}(G) \, ,$$

mediante $\varphi(a)\mathfrak{b} = (ab_1, ab_2, \ldots)$. Entonces $\varphi(a)$ es función *sobre* en vista de que $\varphi(a)(a^{-1}b_1, a^{-1}b_2, \ldots) = \mathfrak{b}$; también es biunívoca puesto que de $(aa_1, aa_2, \ldots) = (ab_1, ab_2, \ldots)$ se sigue $a_i = b_i$ y $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$. Por último es un movimiento de $\mathfrak{B}(G)$: si $d(\mathfrak{a},\mathfrak{b}) = 1/k$, entonces es k el primer entero para el cual $a\,a_k \neq ab_k$ y $d(\varphi(a)\mathfrak{a}, \varphi(a)\mathfrak{b}) = 1/k$. Ahora bien la función $\varphi: G \to$ Movimientos de $\mathfrak{B}(\bar{G})$ definida mediante la regla (1) satisface $\varphi(b) \circ \varphi(a) = \varphi(ba)$ y de $\varphi(a) = \varphi(b)$ se sigue $a = b$; luego ella es isomorfismo *en* y con ello queda el teorema demostrado.

Instituto de Matemáticas de la
Universidad Nacional de México.

Vol. X, 3,4 BOLETIN DE LA SOCIEDAD MATEMATICA MEXICANA 1963

SOBRE UNA NOCION NORMAL DE LA TEORIA DE LAS CLASES

F. Zubieta R.*

En la teoría axiomática de Bernays-Gödel, la noción $\mathfrak{Un}(X)$ (la clase X es uniforme) se define poniendo:

$$\mathfrak{Un}(X) = (u)(v)(w)[\langle uv\rangle \in X \cdot \langle wv\rangle \in X :\supset . \; u = w]$$

Esta definición puede también escribirse así:

$$\mathfrak{Un}(X) = (x)(y)(u)(w)[\langle ux\rangle \in X \cdot \langle wy\rangle \in X :\supset (x = y . \supset . u = w)] \quad ;$$

lo que sugiere la idea de introducir una noción más general (la clase X es uniforme con respecto a Y), que defino poniendo:

$$\mathfrak{Un}(Y,X) = (x)(y)(u)(w)[\langle ux\rangle \in X \cdot \langle wy\rangle \in X :\supset (\langle xy\rangle \in Y . \supset . \langle uw\rangle \in Y)]$$

*Becario del Instituto Nacional de la Investigación Científica.

Las relaciones son clases formadas exclusivamente por pares ordenados. Se define la relación I (de identidad) poniendo: $\langle xy \rangle \epsilon I. \equiv .x = y.$ Si en la definición de $\mathfrak{Un}(Y,X)$ la clase arbitraria Y se substituye por I, obtenemos:

$$\mathfrak{Un}(I,X). \equiv .(x)(y)(u)(w)[\langle ux \rangle \epsilon X \cdot \langle wy \rangle \epsilon X : \supset (\langle xy \rangle \epsilon I . \supset . \langle uw \rangle \epsilon I)]$$

$$\mathfrak{Un}(I,X). \equiv .(x)(y)(u)(w)[\langle ux \rangle \epsilon X \cdot \langle wy \rangle \epsilon X : \supset (x = y . \supset . u = w)]$$

$$\mathfrak{Un}(I,X). \equiv .\mathfrak{Un}(X). \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

Es evidente la importancia de la noción $\mathfrak{Un}(Y,X)$ que generaliza la idea de uniformidad de una relación con respecto a otra, frecuentemente usada en matemáticas. En particular defino las funciones como relaciones que son uniformes con respecto a la identidad.

Mexico, D.F., junio de 1953.
Instituto de Matemáticas, U.N.A.

RESEÑA DEL

III CONGRESO NACIONAL DE MATEMATICAS

Del 8 al 13 de junio del presente año tuvo lugar en la Ciudad de San Luís Potosí el III Congreso Nacional de Matemáticas, convocado por la Sociedad Matemática Mexicana, con el proposito de dar a conocer los recientes progresos en las investigaciones matemáticas, de promover e impulsar el interés por esas investigaciones y de estrechar lazos de cooperación y amistad entre los intelectuales potosinos dedicados al estudio de las ciencias exactas y los de otros Estados de la República.

A la sesión inaugural, efectuada en la Sala Principal del Teatro de la Paz, concurrió el señor Gobernador del Estado *Don Ismael Salas* quien declaró inaugurado el Congreso. Los señores licenciado *Ernesto Baez Lozano*, Presidente del Comite Local y doctor *Alfonso Nápoles Gándara*, Presidente de la Comisión Organizadora pronunciaron sendos y substanciosos discursos. El acto estuvo amenizado por números musicales ejecutados por la Banda del Estado, dirigida por el *Prof Ramon Hernández*.

TRABAJOS

Se mencionan a continuación los trabajos originales de investigación sobre matemáticas puras y aplicadas, en el orden en que fueron presentados.

1. *Ejemplo en superficies ordinarias, que contradice el enunciado de una conjetura de Birkhoff*, por el Dr. A. Nápoles Gándara, Director del Instituto de Matemáticas de la Universidad Nacional de México.

2. *Sobre los Conjuntos Compactos en Espacios de Funciones Continuas*, por el Mat. Rodolfo Morales Martínez del Instituto de Matemáticas.

3. *Instrucciones para la resolución de un sistema de - ecuaciones normales, hasta de 30 ecuaciones con 30 incognitas,* por el Dr. Honorato de Castro.

4. *Una fórmula que dá los valores de y a partir de los cuales el Teorema de Fermat es cierto,* por el Ing. Francisco Villaseñor, de la Escuela Nacional Preparatoria.

5. *Presentaciones duales de grupos de nudos,* por el Dr. Guillermo Torres Díaz, del Instituto de Matemáticas.

6. *Representación de grupos de nudos por grupos de movimientos del plano,* por el Dr. Guillermo Torres Díaz.

7. *Métodos numéricos en problemas de impacto sobre vigas y losas.,* por el Dr. Emilio Rosenblueth, del Instituto de Geofísica de la Universidad Nacional de México.

8. *Respuestas sísmicas sobre mantos blandos,* por el Dr. Emilio Rosenblueth.

9. *Nota sobre el Teorema de Cayley,* por el Mat. Enrique Valle Flores del Instituto de Matemáticas.

10. *Procedimiento para encontrar las fórmulas de la astronomía de posición por medio de dos triángulos astronómicos,* por el Ing. Ricardo Toscano del Instituto de Geofísica.

11. *Generalización de una noción normal de la teoría de las clases,* por el M. en C. Francisco Zubieta Russi del Instituto de Matemáticas.

12. *Extensiones de una valuación,* por el Lic. Mario Ruiz Esparza del Instituto Tecnológico de Monterrey.

13. *Sobre ideales primarios en anillos semilocales generalizados,* por los señores Mat. Emilio Lluis Riera y Dr. Felix Recillas Juárez, del Instituto de Matemáticas.

14. *La función de Hilbert en anillos semilocales,* por los señores Dr. Felix Recillas Juárez y Mat. Emilio Lluis - Riera.

15. *Relaciones en potencias reducidas iteradas,* enviado por el Dr. José Adem, miembro del Instituto de Matemáticas, desde la Universidad de Princeton donde actualmente esta comisionado. Presentado por el Dr. Roberto Vazquez García.

16. *Un sistema formal matemático,* por el Dr. Harold S. Dutton, del Instituto Tecnológico de Monterrey.

17. *Sobre un lema de tromotopía combinatoria*, por el Dr. Roberto Vazquez García del Instituto de Matemáticas.

18. *Sobre una conjetura de R. Vazquez*, por la Sra. Profa. Marta M. de Valle, de la Escuela Nacional Preparatoria.

19. *Cálculo Proporcional y Teoría de Conjuntos*, por el Dr. Harold S. Dutton.

20. *Reacciones nucleares entre partículas cargadas*, por el Dr. Marcos Moshinsky de los Institutos de Física y de Geofísica.

21. *Superficies molduras como fronteras rígidas de regiones de flujo*, por el Dr. Enzo Levi de la Secretaría de Recursos Hidráulicos.

Se presentaron además los siguientes trabajos diversos, que se mencionan en el orden alfabético de sus autores.

1. *Un procedimiento matemático para el cálculo del desarrollo económico*, por el Lic. Luis Aguirre Pliego.

2. *Construcción de ábacos para la determinación de la latitud por observación de alturas circunmeridianas*, por el Dr. Honorato de Castro.

3. *Presentación moderna de las ecuaciones y funciones en álgebra de Bachilleres*, por el Dr. Harold S. Dutton.

4. *El cálculo de probabilidades en una investigación de invalideces*, por la Srita. Ana María Flores.

5. *La fotogrametría estereoscópica o de tres dimensiones*, por el Ing. Porfirio García de Leon.

6. *El Transformador de Laplace*, por el Prof. Pedro Lezama y Noriega.

7. *Valuación de áreas en la superficie de la Tierra*, por el Ing. Carlos Martinez Becerril.

8. *La estadística matemática en el control de calidad industrial*, por el Sr. José Nieto de Pascual.

9. *La matemática en la localización de la actividad económica*, por el Ing. Rodolfo Ortega Mata.

10. *Análisis de algunos conceptos fundamentales de las*

matemáticas, por el Ing. José Treviño García.

11. *Mareas producidas por los cuerpos celestes*, por el Ing. Ricardo Toscano.

OTRAS ACTIVIDADES DEL CONGRESO

Se pronunciaron las siguientes conferencias de divulgación sobre matemática moderna, en el Auditorium de la Facultad de Leyes de la Universidad de San Luis:

1. *El álgebra moderna*, por el matemático Enrique Valle Flores.

2. *La Teoría de los conjuntos*, por el matemático Emilio Lluis Riera.

3. *Importancia social de la estadística matemática*, por la señorita Ana María Flores de la Dirección General de Estadística.

Hubo además diversos actos sociales tales como la Sesión solemne del H. Ayuntamiento Potosino declarando Huéspedes de Honor a los Delegados al III Congreso Nacional de Matemáticas efectuada en el Salón Manuel José Othon del Palacio de Gobierno; la comida ofrecida por el C. Gobernador del Estado, en el Cafe la Lonja; la visita al Museo Regional Potosino de Monumentos Coloniales; la Velada solemne en homenaje al ilustre hombre de ciencia potosino don Valentín Gama, en el Auditorium de la Universidad de San Luis, en la cual el ingeniero *Carlos Martinez Becerril* pronunció un interesante discurso sobre la vida y obra de don Valentín Gama y por último la Sesión solemne de clausura en la Sala Flavio F. Carlos del Teatro de la Paz, efectuada bajo la presidencia del señor Gobernador del Estado, Don *Ismael Salas*.

Asistieron al Congreso, dándole realce y como invitados de honor el Señor doctor *Nabor Carrillo Flores*, Rector de la Universidad Nacional Autónoma de México, quien fungió como Presidente Honorario del Congreso, y los señores Dr. *Efren del Pozo*, Secretario General de la Universidad Nacional, maestro *Julián Carrillo*, ingeniero *Mariano Hernández Barrenechea* y licenciado *Jesús Silva Herzog*.

NOTAS VARIAS

En este verano de 1953 tuvimos el honor de recibir a los siguientes distinguidos matemáticos visitantes, huéspedes del Instituto de Matemáticas: *Armand Borel, Herbert Busseman, Solomon Lefschetz, Laurent Schwarz* e *Irving Segal* cuyas actividades en México, que más adelante detallamos, fueron de valor y provecho inestimables.

I

A cargo del Profesor *Borel* estuvo un seminario sobre la *Teoría de la Estructura de los Grupos de Lie Compactos* y también una serie de conferencias relativas a sus últimas investigaciones en los espacios homogéneos de grupos de Lie compactos.

II

Por segunda vez de visita en México, el distinguido geómetra *H. Bussemann* de la Universidad de California dió unas conferencias sobre los *problemas actuales de la geometría intrínseca de los espacios de Finsler.*

III

Como es ya costumbre de varios años, el célebre matemático, *S. Lefschetz* nos honró con su visita la que fué aprovechada para dirigir un seminario esta vez sobre *Geometría Algebraica*. Comunicamos que a partir de 1954 la Universidad Nacional Autónoma de México, en especial la Facultad de Ciencias y el Instituto de Matemáticas se benefician con la estancia definitiva del Profesor *Lefschetz* ya que es bien conocida su influencia internacional en el campo de la investigación matemática y actividades afines y el impulso que dió a éstas en el Instituto de Estudios Avanzados de la Universidad de Princeton, al cual deja de pertenecer.

La Sociedad Matemática Mexicana felicita a las autoridades universitarias de las instituciones citadas, por su valiosa adquisición y a la vez hace votos por el mejoramiento de nuestro medio matemático que se dejará sentir en poco tiempo.

IV

El Profesor *Laurent Schwarz* expuso en un seminario especial su *teoría de las distribuciones* cuyo valor le hizo merecer un premio en el Congreso Internacional de Matemáticas efectuado en Boston, EE.UU. en 1950. El notable analista francés dictó también algunas conferencias abarcando temas de actualidad como el problema de *Cousin en variedades diferenciables*, *espacios topológicos vectoriales*, etc.

V

El Profesor *Segal* de la Universidad de Chicago sostuvo un seminario sobre *variedades diferenciables* y unas conferencias en relación con la *teoría de los grupos topológicos*. En esta última especialidad el sustentante es autoridad internacionalmente reconocida.

VI.

Continúa comisionado el *Dr. Jose Adem* por el Instituto de Matemáticas en la Universidad de Princeton en donde ha realizado valiosas investigaciones sobre *Topología Algebráica*. Sus artículos relativos a las potencias reducidas de Steenrod y otros más han merecido su publicación en el Boletín de la Academia Nacional de Ciencias del vecino país del norte. Para su conocimiento entre nuestros consocios, tales artículos se presentan en nuestro Boletín.

VII

En la primavera regresó de los Estados Unidos nuestro consocio el *Dr. Julian Adem* quien permaneció aproximadamente un año en la Universidad de Brown, en donde realizó investigaciones en el campo de la matemática aplicada. Anteriormente ya había estado nuestro compañero Adem en aquella Universidad con motivo de la adquisición de su grado doctoral.

VIII

Igualmente, comisionado por el Instituto de Matemáticas, el consocio *Humberto Cárdenas* permanece todavía en la Universidad de Princeton en donde investiga sobre la *Teoría de Homología de Grupos*.

IX

Disfrutando de una beca, otorgada por la Universidad Nacional Autónoma, el compañero *Emilio Lluis Riera* permanecerá algunos meses en la Universidad de Clermont-Ferrand para investigar en problemas de *Geometría Algebraica* en unión con el matemático francés Pierre Samuel.

X

Desde septiembre del presente año, nuestra consocia la Sra. *Marta Mejía de Valle* salió a la Universidad de Kansas a investigar en los *espacios de Hilbert* en colaboracion con el Profesor Aronzajn. La Sra. de Valle goza de becas concedidas por aquella institución y el Instituto Internacional de Educación.

XI

Nuestro compañero el *Dr. Marcos Moshinsky* investigador de los Institutos de Física y de Geofísica, salió recientemente a Francia para investigar en algunos problemas de matemáticas aplicadas en el Instituto Henri Poincaré.

XII

Becado por el Gobierno de Francia, permanecerá en aquel país, el *Dr. Felix Recillas Juárez* los últimos meses de 1953 y los primeros de 1954 para investigar en la *topología de los grupos de Lie*. El Dr. Recillas dividirá su tiempo entre el Instituto Henri Poincaré en la Universidad de París y el Instituto Elie Cartan en la Universidad de Nancy.

XIII

En abril pasado regresó de la Universidad de Princeton nuestro consocio el *Dr. Guillermo Torres Díaz.* El tiempo de su permanencia en el exterior lo utilizó en investigar sobre algunos problemas de la *Teoría de los Nudos* en comunicación mutua con algunos especialistas muy principalmente con el - Prof. Ralph H. Fox. El Dr. Torres es conocido en el mundo matemático por sus recientes artículos publicados en la prestigiada revista Annals of Mathematics de la cual es colaborador.

XIV

Desde septiembre del presente año salio el *Dr Roberto Vazquez García* a la Universidad de Princeton a investigar en los problemas actuales de la *Topología Algebraica* en unión con el topólogo eminente N.E.Steenrod. El Dr. Vazquez aprovechará su estancia, de aproximadamente un año, para impartir un curso de Matematicas en aquella Universidad con su caracter de profesor visitante, cargo con el que ha sido distinguido.

XV

En junio del presente año tuvo lugar la elección de la Mesa Directiva de nuestra Sociedad, correspondiente al bienio 1953-1955 yla cual quedó integrada de la manera siguiente:

Presidente:	Dr. Roberto Vazquez García.
Vice-Presidente:	Dr. Guillermo Torres Díaz.
Secretario:	Mat. Enrique Valle Flores.
Tesorero:	C.P.T. Miguel Mier Viesca.
Srio.de Actas:	Mat. Rodolfo Morales Martínez.
Vocal:	Ing. Esteban Minor.
Vocal:	Prof. Anselmo Chargoy.

ERRATA DEL VOL. X Nos. 1,2.

p. 17, renglón 9o ↓ dice "una transformación del Toro" debe decir "una transformación Topológica del Toro"

p. 17, renglón 3o ↑ dice " $f(\nu m) = \nu F(m)$ " debe decir " $f(\nu m) = \nu f(m)$"

p. 18, renglón 3o ↑ después de "Si μ es irracional insertar la siguiente llamada "2" al pie de página.

[2]El argumento que sigue se aplica también a $\nu = 0$ o ∞.

p. 19, renglón 5o ↓ dice " $i > 1$" debe decir "$i \geqslant 1$"

p. 20, renglón 12o ↓ dice "el entero m", debe decir "el entero m_κ"

p. 20, fórmula (7) debe ser

$$m_\kappa \, \delta \geqslant \kappa + \dots$$

p. 21, renglón 11o ↓ debe decir $n_1^\kappa / n_\kappa^\kappa \leqslant 1 - \dots$

p. 22, fórmula a la mitad de la página debe ser "$\dots \rho_\kappa > \dots$"

p. 22, renglón 13o ↑ después de *Teorema 1* insetar la siguiente llamada[3] al pie de página.

[3]La idea de la demostración siguiente se tomo de una demostración semejante en [1, Cap. III, § 3]. Allí podrá el lector encontrar los detalles que pudo perder en la discusión presente.

p. 24, renglón 8o↑ debe ser "$d_{m,n}(p,q) = d_{m,n}(p,q)$"

p 27, renglón 9o ↑ debe ser para $m \leqslant x \leqslant m+1$

p.27, renglón 7° ↑ dice "se cortan mas una", debe decir "se cortan cuando mas una".

p.43, lines 4-5. For "characteristics" read "characteristic"

p.44, line 9 from the bottom. After the work "two" insert "different"

p.44, line 3 from the bottom. After the word "belongs" insert a dash.

p.45, line 6. For "into" read "on to".

p.45, lines 16-19. Delete one of the repetitions of the phrase "for any system of values of the propositional variables that includes the value h."

p.46, line 18. After the word "whether" insert "there"

p.47, line 10. After $(\exists t_{\alpha(o\alpha)}$ and before the dot, insert the quantifiers $(f_{o\alpha})(x_{\alpha})$.