Vol. XI
Nos. 1 a 4

BOLETIN
de la
SOCIEDAD MATEMATICA MEXICANA

1954

LA FUNCION DE HILBERT EN ANILLOS SEMILOCALES

F. Recillas J. y E. Lluis R.

1. *Introduccion.*

Sea K un campo y $\mathfrak{a}$ un ideal homogéneo del anillo de polinomios - $K[X_1,\ldots,X_n]$. Si $\mathfrak{F}(r,\mathfrak{a})$ es el espacio vectorial sobre K de las formas de - grado r contenidas en $\mathfrak{a}$ y $\mathfrak{F}(r)$ el de todas las formas de grado r, entonces se define la función de Hilbert del ideal $\mathfrak{a}$ como

$$\chi(r,\mathfrak{a}) = \dim_K \mathfrak{F}(r) - \dim_K \mathfrak{F}(r,\mathfrak{a}) \quad .$$

D.G.Northcott en [2] generaliza el concepto de función de Hilbert a anillos locales. En el presente trabajo se extiende este concepto al caso de anillos semilocales y se demuestran algunas propiedades fundamentales de dicha función.

2. *Definición de la función de Hilbert.*

Sea $\mathfrak{o}$ un anillo semilocal y $\mathfrak{p}_1,\ldots,\mathfrak{p}_h$ los ideales primos máximos de - $\mathfrak{o}$. Formemos los anillos de cocientes de $\mathfrak{o}$ con respecto a $\mathfrak{p}_i$, $\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}_i} = \tilde{\mathfrak{o}}_i$ en el sentido de [1], $(1 \leqslant i \leqslant h)$ los cuales coinciden con los anillos de cocientes con respecto a $\mathfrak{p}_i$ cuando $\mathfrak{o} - \mathfrak{p}_i$ no tienen divisores de cero.

Los anillos $\tilde{\mathfrak{o}}_i$ son anillos locales, siendo $\mathfrak{p}_i = \mathfrak{p}_i \mathfrak{o}_i$ los ideales máximos de las no unidades. Si $\mathfrak{q}_i$ es un ideal primario para $\mathfrak{p}_i$, D.G.Northcott, [2], define la función de Hilbert de un ideal $\tilde{\mathfrak{a}}_i$ de $\tilde{\mathfrak{o}}_i$ respecto a $\tilde{\mathfrak{q}}_i$ mediante la fórmula:

$$\chi_{\tilde{\mathfrak{q}}_i}(r, \tilde{\mathfrak{a}}_i) = \dim_{A_i} (\tilde{\mathfrak{q}}_i^r / \tilde{\mathfrak{q}}_i^{r+1}) - \dim_{A_i} (\tilde{\mathfrak{a}}_i \cap \tilde{\mathfrak{q}}_i^r) / (\tilde{\mathfrak{a}}_i \cap \tilde{\mathfrak{q}}_i^{r+1}) \quad ,$$

donde $A_i = \tilde{\mathfrak{o}}_i / \tilde{\mathfrak{q}}_i$ y por $\dim_{A_i}$ se entiende la longitud de una serie de composición de A_i-submódulos propios para los A_i-módulos respectivos. En [2] se demuestra que

$$\chi_{\tilde{\mathfrak{q}}_i}(r, \tilde{\mathfrak{a}}_i) = \dim_{A_i} (\tilde{\mathfrak{a}}_i + \tilde{\mathfrak{q}}_i^r) / (\tilde{\mathfrak{a}}_i + \tilde{\mathfrak{q}}_i^{r+1}) \qquad (1)$$

En este caso, $(\tilde{\mathfrak{a}}_i + \tilde{\mathfrak{q}}_i^r) / (\tilde{\mathfrak{a}}_i + \tilde{\mathfrak{q}}_i^{r+1})$ es un anillo de Artín* y si entendemos por dimensión de un anillo de Artín R el número n de términos de - una serie de composición de ideales:

$$R \supset \mathfrak{c}_1 \supset \dots \supset \mathfrak{c}_n = (0) \quad ,$$

entonces en la fórmula (1) podemos omitir el índice A_i en $\dim_{A_i}$ ya que ambos conceptos coinciden.

Sean ahora $\mathfrak{q}_1, \dots, \mathfrak{q}_h$ ideales primarios para $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_h$ respectivamente y sea $\mathfrak{a}$ un ideal arbitrario de $\mathfrak{o}$. Sea h' tal que $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}_i (1 \leqslant i \leqslant h')$ y $\mathfrak{a} \not\subset \mathfrak{p}_i (h' + 1 \leqslant i \leqslant h)$. Entonces ***definimos la función de Hilbert de*** $\mathfrak{a}$ ***respecto a*** $\mathfrak{q}_1, \dots, \mathfrak{q}_h$, ***mediante la fórmula***

$$\chi_{\tilde{\mathfrak{q}}_1, \dots, \mathfrak{q}_h}(r, \mathfrak{a}) = \sum_{i=1}^{h'} \chi_{\tilde{\mathfrak{q}}_i}(r, \mathfrak{a}_i) \quad ,$$

---

* Esto se debe a que en el anillo semilocal $\mathfrak{o}/\mathfrak{a}$ el ideal $\mathfrak{a} + \mathfrak{q}/\mathfrak{a}$ es un ideal de definición de la topología de $\mathfrak{o}/\mathfrak{a}$, y por consiguiente el anillo $(\mathfrak{o}/\mathfrak{a}) / (\mathfrak{a} + \mathfrak{q}/\mathfrak{a}) = \mathfrak{o}/(\mathfrak{a} + \mathfrak{q})$ es de Artín.

donde $\widetilde{\mathfrak{a}}_i = \mathfrak{a}\widetilde{\mathfrak{O}}_i$ *y* $\widetilde{\mathfrak{q}}_i = \mathfrak{q}_i\widetilde{\mathfrak{O}}_i$ (primario para $\widetilde{\mathfrak{p}}_i$).

Si hacemos la convención de que $\chi_{\widetilde{\mathfrak{q}}_i}(r,\widetilde{\mathfrak{O}}_i) = 0$, como para $h'+1 \leqslant i \leqslant h$ se tiene que $\mathfrak{a}\widetilde{\mathfrak{O}}_1 = \widetilde{\mathfrak{O}}_i$, podemos escribir la definición mediante la fórmula

$$\chi_{\widetilde{\mathfrak{q}}_1,\dots,\mathfrak{q}_h}(r,\mathfrak{a}) = \Sigma\, \chi_{\widetilde{\mathfrak{q}}_i}(r,\widetilde{\mathfrak{a}}_i)$$

Resulta inmediato de la definición y de un resultado de P.Samuel [3], que para r suficientemente grande, $\chi_{\mathfrak{q}_1,\dots,\mathfrak{q}_h}(r,\mathfrak{a})$ es un polinomio en r.

3. ***Algunas propiedades de la función de Hilbert.***

Teorema 1. *Sea* $\overline{\mathfrak{O}}$ *la completación del anillo semilocal* $\mathfrak{O}$, $\mathfrak{q}_1,\dots,\mathfrak{q}_h$ *ideales para los primos máximos* $\mathfrak{p}_1,\dots,\mathfrak{p}_h$ *de* $\mathfrak{O}$, $\overline{\mathfrak{q}}_1,\dots,\overline{\mathfrak{q}}_h$ *sus extensiones en* $\overline{\mathfrak{O}}$, $\mathfrak{a}$ *un ideal de* $\mathfrak{O}$ *y* $\overline{\mathfrak{a}}$ *su extensión. Entonces*

$$\chi_{\mathfrak{q},\dots,\mathfrak{q}_h}(r,\mathfrak{a}) = \chi_{\overline{\mathfrak{q}}_1,\dots,\overline{\mathfrak{q}}_h}(r,\overline{\mathfrak{a}}) \;.$$

(Sabemos que la extensión induce una correspondencia *biunívoca* entre el conjunto de ideales primarios para los primos máximos de $\mathfrak{O}$ y el de primarios para los - primos máximos de $\overline{\mathfrak{O}}$, Bol.Soc.Mat.Mex., 1953).

Con las notaciones anteriores, tenemos, según la definición

$$\chi_{\mathfrak{q}_1,\dots,\mathfrak{q}_h}(r,\mathfrak{a}) = \sum_{i=1}^{h'} \chi_{\widetilde{\mathfrak{q}}_i}(r,\widetilde{\mathfrak{a}}_i)$$

$$\chi_{\overline{\mathfrak{q}}_1,\dots,\overline{\mathfrak{q}}_h}(r,\overline{\mathfrak{a}}) = \sum_{i=1}^{h'} \chi_{\overline{\widetilde{\mathfrak{q}}}_i}(r,\overline{\widetilde{\mathfrak{a}}}_i)$$

(la h' es la misma en los dos casos) y por lo tanto bastará demostrar que

$$\chi_{\widetilde{\mathfrak{q}}_i}(r,\widetilde{\mathfrak{a}}_i) = \chi_{\overline{\widetilde{\mathfrak{q}}}_i}(r,\overline{\widetilde{\mathfrak{a}}}_i)\,, \quad 1 \leqslant i \leqslant h' \;.$$

Pero según [2], si $\overline{\widetilde{\mathfrak{O}}}_i$ designa la completación del anillo local $\widetilde{\mathfrak{O}}_i$ y $\overline{\widetilde{\mathfrak{a}}}_i$, $\overline{\widetilde{\mathfrak{q}}}_i$ son las extensiones a este anillo de los ideales $\widetilde{\mathfrak{a}}_i$ y $\widetilde{\mathfrak{q}}_i$ respectivamente, se tiene

$$\chi_{\tilde{\mathfrak{q}}_i}(r,\tilde{\mathfrak{a}}_i) = \chi_{\tilde{\overline{\mathfrak{q}}}_i}(r,\overline{\tilde{\mathfrak{a}}}_i) \quad ,$$

y por consiguiente basta comprobar la igualdad

$$\chi_{\overline{\tilde{\mathfrak{q}}}_i}(r,\overline{\tilde{\mathfrak{a}}}_i) = \chi_{\tilde{\overline{\mathfrak{q}}}_i}(r,\tilde{\overline{\mathfrak{a}}}_i) \quad ,$$

la cual se sigue inmediatamente del lema siguiente:

LEMA 1. *Los anillos* $\overline{\tilde{\mathfrak{o}}}_i$ *y* $\tilde{\overline{\mathfrak{o}}}_i$ *son isomorfos y bajo el isomorfismo natural al ideal* $\overline{\tilde{\mathfrak{a}}}_i$ *le corresponde el ideal* $\tilde{\overline{\mathfrak{a}}}_i$.

Se sabe (ver [1], pag. 96) que $\overline{\tilde{\mathfrak{o}}}_i \cong \overline{\mathfrak{o}}\,\varepsilon_i$, donde ε_i es un idempotente de $\overline{\mathfrak{o}}$ asociado a $\overline{\mathfrak{p}}_i$. Análogamente (con la misma ε_i) se tiene $\tilde{\overline{\mathfrak{o}}}_{ii}$ $\overline{\overline{\mathfrak{o}}}\varepsilon_i = \overline{\mathfrak{o}}\,\varepsilon_i$ lo cual demuestra la primera parte. Bajo la correspondencia natural del primer isomorfismo, al ideal $\overline{\tilde{\mathfrak{a}}}_i$ de $\overline{\tilde{\mathfrak{o}}}_i$ le corresponde el ideal $\overline{\mathfrak{a}}\varepsilon_i$ de $\overline{\mathfrak{o}}\varepsilon_i$ (aclarando las notaciones, $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{o}$, $\tilde{\mathfrak{a}}_i = \mathfrak{a}\tilde{\mathfrak{o}}_i$, $\overline{\mathfrak{a}} = \mathfrak{a}\overline{\mathfrak{o}}$, $\overline{\tilde{\mathfrak{a}}}_i = \tilde{\mathfrak{a}}_i\,\overline{\tilde{\mathfrak{o}}}_i$, $\tilde{\overline{\mathfrak{a}}}_i = \overline{\mathfrak{a}}\,\tilde{\overline{\mathfrak{o}}}_i$). En el segundo isomorfismo, a $\tilde{\overline{\mathfrak{a}}}_i$ le corresponde también $\overline{\mathfrak{a}}\varepsilon_i$, de donde bajo la correspondencia inducida por el isomorfismo natural entre $\overline{\tilde{\mathfrak{o}}}_i$ y $\tilde{\overline{\mathfrak{o}}}_i$, al ideal $\overline{\tilde{\mathfrak{a}}}_i$ le corresponde el ideal $\tilde{\overline{\mathfrak{a}}}_i$.

Sea ahora $\mathfrak{a}$ un ideal de $\mathfrak{o}$ y $\mathfrak{o}' = \mathfrak{o}/\mathfrak{a}$. Si $\mathfrak{b}$ es un ideal arbitrario de $\mathfrak{o}$, designaremos con $\mathfrak{b}'$ el ideal $\mathfrak{b} + \mathfrak{a}/\mathfrak{a}$ de $\mathfrak{o}'$. Así, $\mathfrak{a}'$ designará el ideal cero de $\mathfrak{o}'$. Con estas notaciones podemos demostrar el siguiente teorema:

TEOREMA 2. *Sea* $\mathfrak{o}$ *un anillo semilocal,* $\mathfrak{p}_1,\ldots,\mathfrak{p}_h$ *los ideales máximos de* $\mathfrak{o}$ *y* $\mathfrak{q}_1$. *Sea* $\mathfrak{a}$ *un ideal de* $\mathfrak{o}$ *y* h' *tal que* $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}_i$ $(1 \leqslant i \leqslant h')$ *y* $\mathfrak{a} \not\subset \mathfrak{p}_i$ $(h'+1 \leqslant i \leqslant h)$. *Entonces*

$$\chi_{\mathfrak{q}_1,\ldots,\mathfrak{q}_h}(r,\mathfrak{a}) = \chi_{\mathfrak{q}'_1,\ldots,\mathfrak{q}'_{h'}}(r,\mathfrak{a}')$$

Con las notaciones convenidas tenemos, por definición,

$$\chi_{\mathfrak{q}_1,\ldots,\mathfrak{q}_h}(r,\mathfrak{a}) = \sum_{i=1}^{h'} \chi_{\mathfrak{q}_i}(r,\tilde{\mathfrak{a}}_i)$$

$$\chi_{q'_1,\dots,q'_{h'}}(r,a') = \sum_{i=1}^{h'} \chi_{(\widetilde{q}')_i}(r,(a')_i)$$

Así pues, bastará demostrar que

$$\chi_{\widetilde{q}_i}(r,\widetilde{a}_i) = \chi_{(\widetilde{q}')_i}(r,(\widetilde{a}')_i) \quad .$$

Pero como $\widetilde{\mathfrak{o}}_i$ es local y el ideal $\widetilde{a}_i$ está contenido en el ideal de las no unidades de $\widetilde{\mathfrak{o}}_i$, se tiene, [2],

$$\chi_{\widetilde{q}_i}(r,\widetilde{a}_i) = \chi_{(\widetilde{q}_i)'}(r,(\widetilde{a}_i)')$$

Por consiguiente basta comprobar la igualdad

$$\chi_{(\widetilde{q}_i)'}(r,(\widetilde{a}_i)') = \chi_{(\widetilde{q}')_i}(r,(\widetilde{a}')_i) \quad ,$$

la cual es una consecuencia de la correspondencia entre ideales inducida por el isomorfismo natural entre los anillos

$$(\widetilde{\mathfrak{o}}_i)' = \mathfrak{o}_{\mathfrak{p}_i} / a\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}_i} \quad \text{y} \quad (\widetilde{\mathfrak{o}}')_i = (\mathfrak{o}/a)_{(\mathfrak{p}/a)} \quad .$$

Ahora daremos una propiedad que indica que la función de Hilbert de un ideal a con respecto a $q_1,\dots,q_h$ no depende más que de la intersección $\mathfrak{t}$ de $q_1,\dots,q_h$, el cual es un ideal de definición de la topología del anillo semilocal $\mathfrak{o}$.

Recordamos que si $\mathfrak{t}$ es un ideal de definición de $\mathfrak{o}$, entonces $\mathfrak{o}/\mathfrak{t}$ es un anillo de Artín ([3], pag.7), y por lo tanto podemos hablar de la dimensión de este anillo de Artín o de un subanillo de él.

TEOREMA 3. *Sea $\mathfrak{o}$ un anillo semilocal, a un ideal de $\mathfrak{o}$, $q_1,\dots,q_h$ ideales primarios asociados a los ideales máximos $\mathfrak{p}_1,\dots,\mathfrak{p}_h$ de $\mathfrak{o}$ y* $\mathfrak{t} = q_1 \cap \dots \cap q_h$. *Entonces*

$$\chi_{q_1,\dots,q_h}(r,\mathfrak{a}) = \dim (\mathfrak{k}^r + \mathfrak{a})/(\mathfrak{k}^{r+1} + \mathfrak{a}) .$$

Por los teoremas 1 y 2 podemos suponer que $\mathfrak{o}$ es un anillo semilocal completo y que $\mathfrak{a} = (o)$. Así pues, demostramos que

$$\chi_{q_1,\dots,q_h}(r,(o)) = \dim \mathfrak{k}^r/\mathfrak{k}^{r+1} .$$

Según la definición, $\chi_{q_1,\dots,q_h}(r,(o)) = \sum \chi_{q_i}(r,(o))$ y como los anillos $\tilde{\mathfrak{o}}_i$ son locales, se tiene, [2],

$$\chi_{\tilde{q}_i}(r,(o)) = \dim \tilde{q}_i^r/\tilde{q}_i^{r+1} = \dim \overline{\tilde{q}}_i^r/\overline{\tilde{q}}_i^{r+1}$$

y por consiguiente bastará demostrar que

$$\dim \mathfrak{k}^r/\mathfrak{k}^{r+1} = \sum_{i=1}^{h} \dim \overline{\tilde{q}}_i^r/\overline{\tilde{q}}_i^{r+1}$$

lo cual será consecuencia de los dos lemas que a continuación se demostrarán.

LEMA 2. *El anillo* $\mathfrak{k}^r/\mathfrak{k}^{r+1}$ *es isomorfo a la suma directa de anillos* $\overline{\tilde{q}}_1^r/\overline{\tilde{q}}_1^{r+1} + \dots + \overline{\tilde{q}}_h^r/\overline{\tilde{q}}_h^{r+1}$.

(Observamos aquí que todos estos anillos son anillos de Artín).

Por ser $\mathfrak{o}$ semilocal completo, sabemos [1] que es isomorfo a la suma directa

$$\mathfrak{o} = \overline{\tilde{\mathfrak{o}}}_1 + \dots + \overline{\tilde{\mathfrak{o}}}_h .$$

Si α_i es el homomorfismo proyección de $\mathfrak{o}$ sobre $\overline{\tilde{\mathfrak{o}}}_i$ y $\mathfrak{c}$ un ideal de $\mathfrak{o}$, entonces $\alpha_i(\mathfrak{c}) = \mathfrak{c}\overline{\tilde{\mathfrak{o}}}_i$. Ahora bien, como $q_j^r \not\subset \mathfrak{p}_i$ $(j \neq i)$, entonces $\alpha_i(q_j) = \overline{\tilde{\mathfrak{o}}}_i$. Por otro lado, $\alpha_i(q_i^r) = \overline{\tilde{q}}_i^r$, y por consiguiente

$$\alpha_i(\mathfrak{k}^r) = \alpha_i(q_1^r \dots q_h^r) = \alpha_i(q_1^r) \dots \alpha_i(q_h^r) = \overline{\tilde{q}}_i^r .$$

De aquí tenemos

$$\mathfrak{k}^r \cong \bar{\tilde{q}}_1^r + \ldots + \bar{\tilde{q}}_h^r$$

donde la suma es directa y r un entero arbitrario. Esto demuestra ya el lema, puesto que

$$\mathfrak{k}^r / \mathfrak{k}^{r+1} \cong (\bar{\tilde{q}}_1^r + \ldots + \bar{\tilde{q}}_h^r)/(\bar{\tilde{q}}_1^{r+1} + \ldots + \bar{\tilde{q}}_h^{r+1}) \cong$$

$$\bar{\tilde{q}}_1^r / \bar{\tilde{q}}_1^{r+1} + \ldots + \bar{\tilde{q}}_h^r / \bar{\tilde{q}}_h^{r+1} \quad .$$

LEMA 3. *Si* $A_1, \ldots, A_h$ *son anillos de Artín, entonces su suma directa* $A = A_1 + \ldots + A_h$ *es un anillo de Artín y*

$$\dim A = \sum_{i=1}^{h} \dim A_i$$

Sea $d_i = \dim A_i$. Entonces existen series de composición de ideales:

$$A_i \supset A_{i1} \supset A_{i2} \supset A_{id_i} = (0) \ .$$

Formemos la siguiente cadena de ideales para A:

$$A = A_1 + \ldots + A_h \supset A_1 + \ldots + A_{h-1} + A_{h_1} \supset A_1 + \ldots + A_{h-1} + A_{h_2} \supset \ldots$$

$$\supset A_1 + \ldots + A_{h-1} + A_{hd_h} = A_1 + \ldots + A_{h-1} \supset \ldots \supset A_1 \supset A_{11} \supset \ldots \supset A_{1d_1} = (0).$$

Esta cadena es de longitud $d_1 + d_2 + \ldots + d_h$.

Bastará pues demostrar que es una serie de composición.

Consideremos un factor arbitrario

$$(A_1 + \ldots + A_{i-1} + A_{ij}) / (A_1 + \ldots + A_{i-1} + A_{i,j-1}) \cong$$

$$\cong A_{ij} / A_{ij} \cap (A_1 + \dots + A_{i-1} + A_{i,j-1}) = A_{ij} / A_{i,j-1}$$

los cuales son anillos sin ideales propios por ser

$$A_i \supset A_{i1} \supset A_{i2} \supset \dots \supset A_{id_i}$$

series de composición.

BIBLIOGRAFIA

[1] C.Chevalley. ***On the notion of the ring of quotiens of a prime ideal.*** Bull. Am.Math.Soc., *50*, (1944).

[2] D.G.Northcott. ***Hilbert's function in a local ring.*** Quart.J.Math. Oxford (2), *4* (1953).

[3] P.Samuel. ***Algèbre locale,*** Mem.Sc.Math. (1953).

INSTITUTO DE MATEMATICAS DE LA
UNIVERSIDAD NACIONAL DE MEXICO

INSTITUTO NACIONAL DE LA
INVESTIGACION CIENTIFICA