BOLETIN
DE LA
SOCIEDAD MATEMATICA MEXICANA

VOLUMEN XI NUMEROS 1 a 4

INDICE

MEXICO - 1954

BOLETIN DE LA SOCIEDAD MATEMATICA MEXICANA

Publicación Trimestral

Comisión Editora

Julián Adem Ch.
Marcos Moshinski
Guillermo Torres D.
Enrique Valle F.
Francisco Zubieta R.

Oficinas: Sociedad Matemática Mexicana. Tacuba 5. México 1, D. F.

Precio de este ejemplar: $ 10.00

Los miembros de la Sociedad tienen derecho a recibir gratuitamente este Boletín (Estatutos, Art. 54).—La responsabilidad de los artículos que se publiquen en este Boletín será de sus autores.—**Cuando algún artículo haya de publicarse en idioma extranjero en este Boletín, la Comisión Editora publicará también una traducción castellana, de la cual es responsable.**

Precio de la suscripción anual:

En la República	**$ 15.00**
En el extranjero	**2.50 Dls.**

Editado por la SOCIEDAD MATEMATICA MEXICANA, con la cooperación económica del Instituto Nacional de la Investigación Científica y de la Universidad Nacional Autónoma de México.

BOLETIN
DE LA
SOCIEDAD MATEMATICA MEXICANA

VOLUMEN XI NUMEROS 1 a 4

INDICE

MEXICO - 1954

Vol. XI
Nos. 1 a 4

BOLETIN
de la
SOCIEDAD MATEMATICA MEXICANA

1954

LA FUNCION DE HILBERT EN ANILLOS SEMILOCALES

F. Recillas J. y E. Lluis R.

1. *Introduccion.*

Sea K un campo y $\mathfrak{a}$ un ideal homogéneo del anillo de polinomios $K[X_1,\dots,X_n]$. Si $\mathfrak{F}(r,\mathfrak{a})$ es el espacio vectorial sobre K de las formas de grado r contenidas en $\mathfrak{a}$ y $\mathfrak{F}(r)$ el de todas las formas de grado r, entonces se define la función de Hilbert del ideal $\mathfrak{a}$ como

$$\chi(r,\mathfrak{a}) = \dim_K \mathfrak{F}(r) - \dim_K \mathfrak{F}(r,\mathfrak{a}) \quad .$$

D.G.Northcott en [2] generaliza el concepto de función de Hilbert a anillos locales. En el presente trabajo se extiende este concepto al caso de anillos semilocales y se demuestran algunas propiedades fundamentales de dicha función.

2. *Definición de la función de Hilbert.*

Sea $\mathfrak{o}$ un anillo semilocal y $\mathfrak{p}_1,\dots,\mathfrak{p}_h$ los ideales primos máximos de $\mathfrak{o}$. Formemos los anillos de cocientes de $\mathfrak{o}$ con respecto a $\mathfrak{p}_i$, $\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}_i} = \tilde{\mathfrak{o}}_i$ en el sentido de [1], $(1 \leqslant i \leqslant h)$ los cuales coinciden con los anillos de cocientes con respecto a $\mathfrak{p}_i$ cuando $\mathfrak{o} - \mathfrak{p}_i$ no tienen divisores de cero.

Los anillos $\tilde{\mathfrak{o}}_i$ son anillos locales, siendo $\mathfrak{p}_i = \mathfrak{P}_i\,\mathfrak{o}_i$ los ideales máximos de las no unidades. Si $\mathfrak{q}_i$ es un ideal primario para $\mathfrak{p}_i$, D.G.Northcott, [2], define la función de Hilbert de un ideal $\tilde{\mathfrak{a}}_i$ de $\tilde{\mathfrak{o}}_i$ respecto a $\tilde{\mathfrak{q}}_i$ mediante la fórmula:

$$\chi_{\tilde{\mathfrak{q}}_i}(r,\tilde{\mathfrak{a}}_i) = \dim_{A_i}(\tilde{\mathfrak{q}}_i^r/\tilde{\mathfrak{q}}_i^{r+1}) - \dim_{A_i}(\tilde{\mathfrak{a}}_i\cap\tilde{\mathfrak{q}}_i^r)/(\tilde{\mathfrak{a}}_i\cap\tilde{\mathfrak{q}}_i^{r+1}) \quad ,$$

donde $A_i = \tilde{\mathfrak{o}}_i/\tilde{\mathfrak{q}}_i$ y por $\dim_{A_i}$ se entiende la longitud de una serie de composición de A_i-submódulos propios para los A_i-módulos respectivos. En [2] se demuestra que

$$\chi_{\tilde{\mathfrak{q}}_i}(r,\tilde{\mathfrak{a}}_i) = \dim_{A_i}(\tilde{\mathfrak{a}}_i + \tilde{\mathfrak{q}}_i^r)/(\tilde{\mathfrak{a}}_i + \tilde{\mathfrak{q}}_i^{r+1}) \qquad (1)$$

En este caso, $(\tilde{\mathfrak{a}}_i + \tilde{\mathfrak{q}}_i^r)/(\tilde{\mathfrak{a}}_i + \tilde{\mathfrak{q}}_i^{r+1})$ es un anillo de Artín* y si entendemos por dimensión de un anillo de Artín R el número n de términos de una serie de composición de ideales:

$$R \supset \mathfrak{c}_1 \supset \dots \supset \mathfrak{c}_n = (0) \quad ,$$

entonces en la fórmula (1) podemos omitir el índice A_i en $\dim_{A_i}$ ya que ambos conceptos coinciden.

Sean ahora $\mathfrak{q}_1,\dots,\mathfrak{q}_h$ ideales primarios para $\mathfrak{p}_1,\dots,\mathfrak{p}_h$ respectivamente y sea $\mathfrak{a}$ un ideal arbitrario de $\mathfrak{o}$. Sea h' tal que $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}_i (1 \leqslant i \leqslant h')$ y $\mathfrak{a} \not\subset \mathfrak{p}_i (h' + 1 \leqslant i \leqslant h)$. Entonces ***definimos la función de Hilbert de*** $\mathfrak{a}$ ***respecto a*** $\mathfrak{q}_1,\dots,\mathfrak{q}_h$, ***mediante la fórmula***

$$\chi_{\tilde{\mathfrak{q}}_1,\dots,\mathfrak{q}_h}(r,\mathfrak{a}) = \sum_{i=1}^{h'} \chi_{\tilde{\mathfrak{q}}_i}(r,\mathfrak{a}_i) \quad ,$$

---

* Esto se debe a que en el anillo semilocal $\mathfrak{o}/\mathfrak{a}$ el ideal $\mathfrak{a}+\mathfrak{q}/\mathfrak{a}$ es un ideal de definición de la topología de $\mathfrak{o}/\mathfrak{a}$, y por consiguiente el anillo $(\mathfrak{o}/\mathfrak{a})/(\mathfrak{a}+\mathfrak{q}/\mathfrak{a}) = \mathfrak{o}/(\mathfrak{a}+\mathfrak{q})$ es de Artín.

donde $\tilde{\mathfrak{a}}_i = \mathfrak{a}\tilde{\mathfrak{O}}_i$ *y* $\tilde{\mathfrak{q}}_i = \mathfrak{q}_i\tilde{\mathfrak{O}}_i$ (primario para $\tilde{\mathfrak{p}}_i$).

Si hacemos la convención de que $\chi_{\tilde{\mathfrak{q}}_i}(r,\tilde{\mathfrak{O}}_i) = 0$, como para $h'+1 \leqslant i \leqslant h$ se tiene que $\mathfrak{a}\tilde{\mathfrak{O}}_1 = \tilde{\mathfrak{O}}_i$, podemos escribir la definición mediante la fórmula

$$\chi_{\tilde{\mathfrak{q}}_1,\dots,\mathfrak{q}_h}(r,\mathfrak{a}) = \Sigma\, \chi_{\tilde{\mathfrak{q}}_i}(r,\tilde{\mathfrak{a}}_i)$$

Resulta inmediato de la definición y de un resultado de P.Samuel [3], que para r suficientemente grande, $\chi_{\mathfrak{q}_1,\dots,\mathfrak{q}_h}(r,\mathfrak{a})$ es un polinomio en r.

3. ***Algunas propiedades de la función de Hilbert.***

Teorema 1. ***Sea*** $\overline{\mathfrak{O}}$ ***la completación del anillo semilocal*** $\mathfrak{O}$, $\mathfrak{q}_1,\dots,\mathfrak{q}_h$ ***ideales para los primos máximos*** $\mathfrak{p}_1,\dots,\mathfrak{p}_h$ ***de*** $\mathfrak{O}$, $\overline{\mathfrak{q}}_1,\dots,\overline{\mathfrak{q}}_h$ ***sus extensiones en*** $\overline{\mathfrak{O}}$, $\mathfrak{a}$ ***un ideal de*** $\mathfrak{O}$ ***y*** $\overline{\mathfrak{a}}$ ***su extensión. Entonces***

$$\chi_{\mathfrak{q},\dots,\mathfrak{q}_h}(r,\mathfrak{a}) = \chi_{\overline{\mathfrak{q}}_1,\dots,\overline{\mathfrak{q}}_h}(r,\overline{\mathfrak{a}}) \;.$$

(Sabemos que la extensión induce una correspondencia *biunívoca* entre el conjunto de ideales primarios para los primos máximos de $\mathfrak{O}$ y el de primarios para los - primos máximos de $\overline{\mathfrak{O}}$, Bol.Soc.Mat.Mex., 1953).

Con las notaciones anteriores, tenemos, según la definición

$$\chi_{\mathfrak{q}_1,\dots,\mathfrak{q}_h}(r,\mathfrak{a}) = \sum_{i=1}^{h'} \chi_{\tilde{\mathfrak{q}}_i}(r,\tilde{\mathfrak{a}}_i)$$

$$\chi_{\overline{\mathfrak{q}}_1,\dots,\overline{\mathfrak{q}}_h}(r,\overline{\mathfrak{a}}) = \sum_{i=1}^{h'} \chi_{\tilde{\overline{\mathfrak{q}}}_i}(r,\tilde{\overline{\mathfrak{a}}}_i)$$

(la h' es la misma en los dos casos) y por lo tanto bastará demostrar que

$$\chi_{\tilde{\mathfrak{q}}_i}(r,\tilde{\mathfrak{a}}_i) = \chi_{\tilde{\overline{\mathfrak{q}}}_i}(r,\tilde{\overline{\mathfrak{a}}}_i)\,,\quad 1 \leqslant i \leqslant h' \;.$$

Pero según [2], si $\tilde{\overline{\mathfrak{O}}}_i$ designa la completación del anillo local $\tilde{\mathfrak{O}}_i$ y $\tilde{\overline{\mathfrak{a}}}_i$, $\tilde{\overline{\mathfrak{q}}}_i$ son las extensiones a este anillo de los ideales $\tilde{\mathfrak{a}}_i$ y $\tilde{\mathfrak{q}}_i$ respectivamente, se tiene

$$\chi_{\widetilde{\mathfrak{q}}_i}(r,\widetilde{\mathfrak{a}}_i) = \chi_{\widetilde{\overline{\mathfrak{q}}}_i}(r,\overline{\widetilde{\mathfrak{a}}}_i) \quad ,$$

y por consiguiente basta comprobar la igualdad

$$\chi_{\overline{\widetilde{\mathfrak{q}}}_i}(r,\overline{\widetilde{\mathfrak{a}}}_i) = \chi_{\widetilde{\overline{\mathfrak{q}}}_i}(r,\widetilde{\overline{\mathfrak{a}}}_i) \quad ,$$

la cual se sigue inmediatamente del lema siguiente:

LEMA 1. *Los anillos* $\overline{\widetilde{\mathfrak{o}}}_i$ *y* $\widetilde{\overline{\mathfrak{o}}}_i$ *son isomorfos y bajo el isomorfismo natural al ideal* $\overline{\widetilde{\mathfrak{a}}}_i$ *le corresponde el ideal* $\widetilde{\overline{\mathfrak{a}}}_i$.

Se sabe (ver [1], pag. 96) que $\overline{\widetilde{\mathfrak{o}}}_i \cong \overline{\mathfrak{o}}\,\varepsilon_i$, donde ε_i es un idempotente de $\overline{\mathfrak{o}}$ asociado a $\overline{\mathfrak{p}}_i$. Análogamente (con la misma ε_i) se tiene $\widetilde{\overline{\mathfrak{o}}}_{i}$ $\overline{\mathfrak{o}}\varepsilon_i = \overline{\mathfrak{o}}\,\varepsilon_i$ lo cual demuestra la primera parte. Bajo la correspondencia natural del primer isomorfismo, al ideal $\overline{\widetilde{\mathfrak{a}}}_i$ de $\overline{\widetilde{\mathfrak{o}}}_i$ le corresponde el ideal $\overline{\mathfrak{a}}\varepsilon_i$ de $\overline{\mathfrak{o}}\varepsilon_i$ (aclarando las notaciones, $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{o}$, $\widetilde{\mathfrak{a}}_i = \mathfrak{a}\widetilde{\mathfrak{o}}_i$, $\overline{\mathfrak{a}} = \mathfrak{a}\overline{\mathfrak{o}}$, $\overline{\widetilde{\mathfrak{a}}}_i = \widetilde{\mathfrak{a}}_i\overline{\widetilde{\mathfrak{o}}}_i$, $\widetilde{\overline{\mathfrak{a}}}_i = \overline{\mathfrak{a}}\widetilde{\overline{\mathfrak{o}}}_i$). En el segundo isomorfismo, a $\widetilde{\overline{\mathfrak{a}}}_i$ le corresponde también $\overline{\mathfrak{a}}\varepsilon_i$, de donde bajo la correspondencia inducida por el isomorfismo natural entre $\overline{\widetilde{\mathfrak{o}}}_i$ y $\widetilde{\overline{\mathfrak{o}}}_i$, al ideal $\overline{\widetilde{\mathfrak{a}}}_i$ le corresponde el ideal $\widetilde{\overline{\mathfrak{a}}}_i$.

Sea ahora $\mathfrak{a}$ un ideal de $\mathfrak{o}$ y $\mathfrak{o}' = \mathfrak{o}/\mathfrak{a}$. Si $\mathfrak{b}$ es un ideal arbitrario de $\mathfrak{o}$, designaremos con $\mathfrak{b}'$ el ideal $\mathfrak{b} + \mathfrak{a}/\mathfrak{a}$ de $\mathfrak{o}'$. Así, $\mathfrak{a}'$ designará el ideal cero de $\mathfrak{o}'$. Con estas notaciones podemos demostrar el siguiente teorema:

TEOREMA 2. *Sea* $\mathfrak{o}$ *un anillo semilocal,* $\mathfrak{p}_1,\ldots,\mathfrak{p}_h$ *los ideales máximos de* $\mathfrak{o}$ *y* $\mathfrak{q}_1$. *Sea* $\mathfrak{a}$ *un ideal de* $\mathfrak{o}$ *y* h' *tal que* $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}_i$ $(1 \leqslant i \leqslant h')$ *y* $\mathfrak{a} \not\subset \mathfrak{p}_i$ $(h'+1 \leqslant i \leqslant h)$. *Entonces*

$$\chi_{\mathfrak{q}_1,\ldots,\mathfrak{q}_h}(r,\mathfrak{a}) = \chi_{\mathfrak{q}'_1,\ldots,\mathfrak{q}'_{h'}}(r,\mathfrak{a}')$$

Con las notaciones convenidas tenemos, por definición,

$$\chi_{\mathfrak{q}_1,\ldots,\mathfrak{q}_h}(r,\mathfrak{a}) = \sum_{i=1}^{h'} \chi_{\mathfrak{q}_i}(r,\widetilde{\mathfrak{a}}_i)$$

$$\chi_{q_1',\dots,q_{h'}'}(r,\mathfrak{a}') = \sum_{i=1}^{h'} \chi_{(\tilde{q}')_i}(r,(\mathfrak{a}')_i)$$

Así pues, bastará demostrar que

$$\chi_{\tilde{q}_i}(r,\tilde{\mathfrak{a}}_i) = \chi_{(\tilde{q}')_i}(r,(\tilde{\mathfrak{a}}')_i) \ .$$

Pero como $\tilde{\mathfrak{o}}_i$ es local y el ideal $\tilde{\mathfrak{a}}_i$ está contenido en el ideal de las no unidades de $\tilde{\mathfrak{o}}_i$, se tiene, [2],

$$\chi_{\tilde{q}_i}(r,\tilde{\mathfrak{a}}_i) = \chi_{(\tilde{q}_i)'}(r,(\tilde{\mathfrak{a}}_i)')$$

Por consiguiente basta comprobar la igualdad

$$\chi_{(\tilde{q}_i)'}(r,(\tilde{\mathfrak{a}}_i)') = \chi_{(\tilde{q}')_i}(r,(\tilde{\mathfrak{a}}')_i) \ ,$$

la cual es una consecuencia de la correspondencia entre ideales inducida por el isomorfismo natural entre los anillos

$$(\tilde{\mathfrak{o}}_i)' = \mathfrak{o}_{\mathfrak{p}_i} / \mathfrak{a}\mathfrak{o}_{\mathfrak{p}_i} \quad \text{y} \quad (\tilde{\mathfrak{o}}')_i = (\mathfrak{o}/\mathfrak{a})_{(\mathfrak{p}/\mathfrak{a})} \ .$$

Ahora daremos una propiedad que indica que la función de Hilbert de un ideal $\mathfrak{a}$ con respecto a $q_1,\dots,q_h$ no depende más que de la intersección $\mathfrak{t}$ de $q_1,\dots,q_h$, el cual es un ideal de definición de la topología del anillo semilocal $\mathfrak{o}$.

Recordamos que si $\mathfrak{t}$ es un ideal de definición de $\mathfrak{o}$, entonces $\mathfrak{o}/\mathfrak{t}$ es un anillo de Artín ([3], pag.7), y por lo tanto podemos hablar de la dimensión de este anillo de Artín o de un subanillo de él.

TEOREMA 3. *Sea* $\mathfrak{o}$ *un anillo semilocal,* $\mathfrak{a}$ *un ideal de* $\mathfrak{o}$, $q_1,\dots,q_h$ *ideales primarios asociados a los ideales máximos* $\mathfrak{p}_1,\dots,\mathfrak{p}_h$ *de* $\mathfrak{o}$ *y* $\mathfrak{t} = q_1 \cap \dots \cap q_h$. *Entonces*

$$\chi_{q_1,\ldots,q_h}(r,\mathfrak{a}) = \dim (\mathfrak{k}^r + \mathfrak{a})/(\mathfrak{k}^{r+1} + \mathfrak{a}) .$$

Por los teoremas 1 y 2 podemos suponer que $\mathfrak{o}$ es un anillo semilocal completo y que $\mathfrak{a} = (o)$. Así pues, demostramos que

$$\chi_{q_1,\ldots,q_h}(r,(o)) = \dim \mathfrak{k}^r / \mathfrak{k}^{r+1} .$$

Según la definición, $\chi_{q_1,\ldots,q_h}(r,(o)) = \Sigma \chi_{q_i}(r,(o))$ y como los anillos $\tilde{\mathfrak{o}}_i$ son locales, se tiene, [2],

$$\chi_{\tilde{q}_i}(r,(o)) = \dim \tilde{q}_i^r / \tilde{q}_i^{r+1} = \dim \overline{\tilde{q}}_i^r / \overline{\tilde{q}}_i^{r+1}$$

y por consiguiente bastará demostrar que

$$\dim \mathfrak{k}^r / \mathfrak{k}^{r+1} = \sum_{i=1}^{h} \dim \overline{\tilde{q}}_i^r / \overline{\tilde{q}}_i^{r+1}$$

lo cual será consecuencia de los dos lemas que a continuación se demostrarán.

LEMA 2. *El anillo* $\mathfrak{k}^r / \mathfrak{k}^{r+1}$ *es isomorfo a la suma directa de anillos* $\overline{\tilde{q}}_1^r / \overline{\tilde{q}}_1^{r+1} + \ldots + \overline{\tilde{q}}_h^r / \overline{\tilde{q}}_h^{r+1}$.

(Observamos aquí que todos estos anillos son anillos de Artín).

Por ser $\mathfrak{o}$ semilocal completo, sabemos [1] que es isomorfo a la suma directa

$$\mathfrak{o} = \overline{\tilde{\mathfrak{o}}}_1 + \ldots + \overline{\tilde{\mathfrak{o}}}_h .$$

Si α_i es el homomorfismo proyección de $\mathfrak{o}$ sobre $\overline{\tilde{\mathfrak{o}}}_i$ y $\mathfrak{c}$ un ideal de $\mathfrak{o}$, entonces $\alpha_i(\mathfrak{c}) = \mathfrak{c}\overline{\tilde{\mathfrak{o}}}_i$. Ahora bien, como $q_j^r \not\subset \mathfrak{p}_i$ $(j \neq i)$, entonces $\alpha_i(q_j) = \overline{\tilde{\mathfrak{o}}}_i$. Por otro lado, $\alpha_i(q_i^r) = \overline{\tilde{q}}_i^r$, y por consiguiente

$$\alpha_i(\mathfrak{k}^r) = \alpha_i(q_1^r \cdots q_h^r) = \alpha_i(q_1^r) \cdots \alpha_i(q_h^r) = \overline{\tilde{q}}_i^r .$$

De aquí tenemos

$$\mathfrak{r}^r \cong \overline{\tilde{q}}_1^{\,r} + \ldots + \overline{\tilde{q}}_h^{\,r}$$

donde la suma es directa y r un entero arbitrario. Esto demuestra ya el lema, puesto que

$$\mathfrak{r}^r / \mathfrak{r}^{r+1} \cong (\overline{\tilde{q}}_1^{\,r} + \ldots + \overline{\tilde{q}}_h^{\,r}) / (\overline{\tilde{q}}_1^{\,r+1} + \ldots + \overline{\tilde{q}}_h^{\,r+1}) \cong$$

$$\overline{\tilde{q}}_1^{\,r} / \overline{\tilde{q}}_1^{\,r+1} + \ldots + \overline{\tilde{q}}_h^{\,r} / \overline{\tilde{q}}_h^{\,r+1} \quad .$$

LEMA 3. *Si* $A_1, \ldots, A_h$ ***son anillos de Artín, entonces su suma directa*** $A = A_1 + \ldots + A_h$ ***es un anillo de Artín y***

$$\dim A = \sum_{i=1}^{h} \dim A_i$$

Sea $d_i = \dim A_i$. Entonces existen series de composición de ideales:

$$A_i \supset A_{i1} \supset A_{i2} \supset A_{id_i} = (0) \; .$$

Formemos la siguiente cadena de ideales para A:

$$A = A_1 + \ldots + A_h \supset A_1 + \ldots + A_{h-1} + A_{h_1} \supset A_1 + \ldots + A_{h-1} + A_{h_2} \supset \ldots$$

$$\supset A_1 + \ldots + A_{h-1} + A_{hd_h} = A_1 + \ldots + A_{h-1} \supset \ldots \supset A_1 \supset A_{11} \supset \ldots \supset A_{1d_1} = (0).$$

Esta cadena es de longitud $d_1 + d_2 + \ldots + d_h$.

Bastará pues demostrar que es una serie de composición.

Consideremos un factor arbitrario

$$(A_1 + \ldots + A_{i-1} + A_{ij}) / (A_1 + \ldots + A_{i-1} + A_{i,j-1}) \cong$$

$$\cong A_{ij} / A_{ij} \cap (A_1 + \dots + A_{i-1} + A_{i,j-1}) = A_{ij} / A_{i,j-1}$$

los cuales son anillos sin ideales propios por ser

$$A_i \supset A_{i1} \supset A_{i2} \supset \dots \supset A_{id_i}$$

series de composición.

BIBLIOGRAFIA

[1] C.Chevalley. *On the notion of the ring of quotiens of a prime ideal.* Bull. Am.Math.Soc., *50*, (1944).

[2] D.G.Northcott. *Hilbert's function in a local ring.* Quart.J.Math. Oxford (2), *4* (1953).

[3] P.Samuel. *Algèbre locale,* Mem.Sc.Math. (1953).

INSTITUTO DE MATEMATICAS DE LA
UNIVERSIDAD NACIONAL DE MEXICO

INSTITUTO NACIONAL DE LA
INVESTIGACION CIENTIFICA

Vol. XI
Nos. 1 a 4

BOLETIN
de la
SOCIEDAD MATEMATICA MEXICANA

1954

LOS PRODUCTOS-i DE COCADENAS EN LA TEORIA SINGULAR CUBICA

R. Vázquez García

§1. INTRODUCCION.

Serre [2, p.441] definió un producto-0 (cup product) de cocadenas en la teoría singular cúbica. Recientemente MacLane [1, §5] demostró que la definición anterior concuerda con la del producto-0 de Cech-Alexander en la teoría singular simplicial. En este artículo se obtienen fórmulas explícitas para los productos-i (cup-i products) de cocadenas, módulo 2, en la teoría singular cúbica y se demuestra que los cuadrados, que estos productos-i definen en los grupos de cohomología, satisfacen las condiciones que impone Serre [3, p.222] para caracterizar a los cuadrados de Steenrod.

§2. PRELIMINARES.

Sea I el intervalo cerrado $[0,1]$, $I^n (n \geqslant 1)$ el producto topológico de n factores iguales a I. Designemos con $\overline{I}$ al complejo que se obtiene descomponiendo celularmente al intervalo $[0,1]$ del modo usual, esto es, $\overline{I}$ tiene una 1-célula, los dos vértices 0 y 1, y su orientación es tal que $dI = 1-0$, donde d es el operador frontera. Sea $\overline{I}^n$ el complejo producto de n factores iguales a $\overline{I}$. Una célula ζ de $\overline{I}^n$ es un producto topológico $\sigma_1 \times \sigma_2 \times \ldots \times \sigma_n$ donde σ_i es una célula de $\overline{I}$. Por definición

$$(2.1) \qquad d\zeta = \sum_{i=1}^{n} (-)^{\dim \sigma_1 + \ldots + \dim \sigma_{i-1}} \sigma_1 \times \sigma_2 \times \ldots \times \sigma_{i-1} \times d\sigma_i \times \sigma_{i+1} \times \ldots \times \sigma_n$$

En este artículo usaremos de un modo sistemático la notación siguiente:

Las letras H, K, L, M denotarán conjuntos finitos de números enteros positivos; $\nu(H)$ será el número cardinal de H. Sea CH el complemento de H respecto al conjunto de los enteros positivos; φ_H representará a la función estrictamente creciente de CH sobre $H \cup CH$. Usaremos las letras $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ para designar funciones definidas en alguno de los conjuntos H, K, L, M y con valores en el conjunto $\{0,1\}$; ε será siempre un elemento de este último conjunto.

Toda célula $\zeta = \sigma_1 \times \ldots \times \sigma_n$ de $\overline{I}^n$ determina biunívocamente al par (H,α) definido así: $i \in H$ si y solo si $\dim \sigma_i = 0$; $\alpha(i) = \sigma_i$ para $i \in H$. A (H,α) le llamaremos *el par* de ζ.

Sea K arbitrario y β definida en K. Si $C(\overline{I}^n)$ es el grupo de cocadenas enteras de $\overline{I}^n$ definimos un homomorfismo

$$(2.2) \qquad \lambda_K^\beta : C(\overline{I}^n) \to C(\overline{I}^n)$$

de este modo:

Sea ζ una célula de $\overline{I}^n$ y (H,α) su par, entonces

(a) Si $\varphi_H^{-1}(K) \subset \{1,\ldots,n\}$ es $\lambda_K^\beta \zeta$ la célula de $\overline{I}^n$ cuyo par (L,γ) es tal que

$$L = H \cup \varphi_H^{-1}(K) \; ; \quad \gamma(i) = \begin{cases} \alpha(i) & \text{si } i \in H \\ \beta\varphi_H(i) & \text{si } i \in \varphi_H^{-1}(K) \end{cases}$$

(b) Si $\varphi_H^{-1}(K) \not\subset \{1,\dots,n\}$ definimos $\lambda_K^{\beta}\zeta = 0$.

Son consecuencias inmediatas de esta definición:

(2.21) $$\zeta = \lambda_H^{\alpha}\, I^n \quad \text{si } (H,\alpha) \text{ es el par de } \zeta.$$

(2.22) $$\lambda_L^{\gamma}\lambda_K^{\beta} = \lambda_M^{\delta}$$

donde

$$M = K \cup \varphi_K^{-1}(L)\ ; \qquad \delta(i) = \begin{cases} \beta(i) & \text{si } i \in K \\ \gamma\varphi_K(i) & \text{si } i \in \varphi_K^{-1}(L) \end{cases}.$$

Cuando α es constante y de valor ε se escribirá λ_H^{ε} en lugar de λ_H^{α}; si H contiene un solo elemento i se escribirá λ_i^{ε} en lugar de $\lambda_{\{i\}}^{\varepsilon}$.

Sea $\zeta = \sigma_1 \times \dots \times \sigma_n$ de par (H,α) y de dimensión q. Entonces por (2.1):

$$d\zeta = \sum_{i \notin H} (-)^{\dim\sigma_1 + \dots + \dim\sigma_{i-1}} [\sigma_1 \times \dots \times \sigma_{i-1} \times 1 \times \sigma_{i+1} \times \dots \times \sigma_n -$$
$$- \sigma_1 \times \dots \times \sigma_{i-1} \times 0 \times \sigma_{i+1} \times \dots \times \sigma_n]$$
$$= \sum_{i \notin H} (-)^{\varphi_H(i)} [\lambda^0_{\varphi_H(i)}\zeta - \lambda^1_{\varphi_H(i)}\zeta] \quad .$$

Por consiguiente

(2.3) $$d\zeta = \sum_{i=1}^{q} (-)^i [\lambda_i^0\zeta - \lambda_i^1\zeta] \quad .$$

Sea $1 \leqslant m \leqslant n$, $M \subset \{1,\dots,n\}$ tal que $\nu(M) = n-m$ y sea γ definida en M. Definimos un homomorfismo

(2.4) $$\Lambda_M^{\gamma} : C(\bar{I}^m) \to C(\bar{I}^n)$$

tal que.

(2.41) $$\Lambda^{\gamma}_{M}(\lambda^{a}_{H}\, I^{m}) = \lambda^{a}_{H}\lambda^{\gamma}_{M} I^{n}$$

Proposición 2.42: Λ^{γ}_{M} *sumerge* $C(\overline{I}^{m})$ *en* $C(\overline{I}^{n})$.

Demostración: Por (2.22) $\lambda^{a}_{H}\lambda^{\gamma}_{M} I^{n} = \lambda^{\beta}_{K}\ \lambda^{\gamma}_{M} I^{n}$ implica $\lambda^{a}_{H} I^{m} = \lambda^{\beta}_{K} I^{m}$ por lo tanto el núcleo de Λ^{γ}_{M} es cero. Además

$$\Lambda^{\gamma}_{M}(\lambda^{\varepsilon}_{i}\lambda^{a}_{H}\, I^{m}) = \lambda^{\varepsilon}_{i}\ \lambda^{a}_{H}\lambda^{\gamma}_{M} I^{n} = \lambda^{\varepsilon}_{i}\Lambda^{\gamma}_{M}(\lambda^{a}_{H}\, I^{m})$$

Por consiguiente $\Lambda^{\gamma}_{M}\, d = d\,\Lambda^{\gamma}_{M}$.

Proposición 2.43: *Sea* $C(\overline{I}^{m}) \xrightarrow{\Lambda^{\gamma}_{M}} C(\overline{I}^{n}) \xrightarrow{\Lambda^{\beta}_{L}} C(\overline{I}^{p})$. *Entonces* $\Lambda^{\beta}_{L}\ \Lambda^{\gamma}_{M} = \Lambda^{\delta}_{K}$ *donde el par* (K,δ) *está determinado por la condición* $\lambda^{\gamma}_{M}\lambda^{\beta}_{L} = \lambda^{\delta}_{K}$.

La demostración de (2.43) es trivial.

El homomorfismo Λ^{γ}_{M} induce una inmersión

(2.44) $$\Lambda^{\gamma}_{M}\times\Lambda^{\gamma}_{M} : C(\overline{I}^{m}\times\overline{I}^{m}) \to C(\overline{I}^{n}\times\overline{I}^{n})$$

definida del modo siguiente:

(2.45) $$(\Lambda^{\gamma}_{M}\times\Lambda^{\gamma}_{M})(\sigma_1\times\sigma_2) = (\Lambda^{\gamma}_{M}\,\sigma_1)\times(\Lambda^{\gamma}_{M}\,\sigma_2)\quad,\quad \sigma_1,\sigma_2\ \varepsilon\ \overline{I}^{m}\quad.$$

Estudiaremos ahora, en el caso particular de los complejos $\overline{I}^{n}$, a las operaciones D_i de grado i (i entero no negativo) definidas en [4] · Previamente recordemos algunas definiciones.

Si ζ es una célula de $\overline{I}^{n}$ sea $\overline{\zeta}$ el subcomplejo de $\overline{I}^{n}$ cuyas células - son las caras de ζ. Sea $C:\overline{I}^{n}\to\overline{I}^{n}\times\overline{I}^{n}$ el portador diagonal: $C(\zeta) = \overline{\zeta}\times\overline{\zeta}$.

$$e, T : \overline{I}^{n}\times\overline{I}^{n}\to\overline{I}^{n}\times\overline{I}^{n}$$

son las transformaciones de cadena* definidas así: e = identidad;

*Traducimos así el término "chain mapping".

$T(\zeta_1 \times \zeta_2) = (-)^{p_1 p_2} \zeta_1 \times \zeta_2$ donde $\zeta_i \in \overline{I}^n$ y $p_i = \dim \zeta_i$.

Definición: Una operación de grado i de $\overline{I}^n \times \overline{I}^n$ es un homomorfismo

$$D_i : C(\overline{I}^n) \to C(\overline{I}^n \times \overline{I}^n)$$

tal que $D_i C_q(\overline{I}^n) \subset C_{q+i}(\overline{I}^n \times \overline{I}^n)$.

Definición 2.5: A una sucesión $\{D_i\}$, $i = 0,1,2,\ldots$, de operaciones de $\overline{I}^n$ en $\overline{I}^n \times \overline{I}^n$ llamaremos aquí ***sucesión-S en*** $\overline{I}^n$ si:

(a) D_i tiene el portador C.

(b) D_o es una transformación de cadena.

(c) $dD_i + (-)^{i+1} D_i d = (T + (-)^i e) D_{i-1}$, $i \geq 1$.

Nota: En [4] se demuestra la existencia de sucesiones-S en circunstancias mucho más generales que las consideradas aquí.

Se deduce inmediatamente que los términos no nulos de toda sucesión-S en $\overline{I}$ son de la siguiente forma:

(2.51) $$D_o\varepsilon = \varepsilon \times \varepsilon \quad ;$$

$$D_o I = a(0 \times I + I \times 1) + (1-a)\, T(0 \times I + I \times 1) \quad ;$$

$$D_1 I = (2a-1)\, I \times I \quad ;$$

donde a es un entero cualquiera.

Definición 2.52: Llamaremos ***sucesión princial en*** $\overline{I}$ a la sucesión-S correspondiente al valor 1 de a, esto es, aquella en la cual

$$D_o I = 0 \times I + I \times 1 \quad ; \qquad D_1 I = I \times I \quad .$$

Sean m y n dos enteros positivos. Definimos

(2.53) $$\mu : (\overline{I}^m)^2 \times (\overline{I}^n)^2 \to (\overline{I}^m \times \overline{I}^n)^2$$

tal que

$$\mu[(\sigma_1 \times \sigma_2) \times (\tau_1 \times \tau_2)] = (-)^{p_2 q_1} (\sigma_1 \times \tau_1) \times (\sigma_2 \times \tau_2)$$

donde $\sigma_1, \sigma_2 \in \overline{T}^m$, $\tau_1, \tau_2 \in \overline{T}^n$; $p_2 = \dim \sigma_2$, $q_1 = \dim \tau_1$.

Se prueba fácil mente que μ es una transformación de cadena.

La proposición que sigue es un caso particular de un resultado bien conocido.

Proposición 2.54: *Si* $\{D_i'\}$, $\{D_i''\}$ *son dos sucesiones*-S *en* $\overline{T}^m, \overline{T}^n$ *respectivamente entonces es* $\{D_i\}$ *una sucesión*-S *en* $\overline{T}^{m+n}$ *si*

$$(2.55) \qquad D_i\ (\sigma \times \tau) = \mu \sum_{j=0}^{i} (-)^{p(i+j)}\ D_j' \sigma \times T^j D_{i-j}'' \tau\ ,$$

donde $\sigma \in \overline{T}^m$, $\tau \in \overline{T}^n$, $p = \dim \sigma$.

(2.56) Tenemos ahora las siguientes definiciones:

La sucesión $\{D_i\}$ en $\overline{T}^{m+n}$ dada por (2.55) se llamará producto de las sucesiones $\{D_i'\}$, $\{D_i''\}$ en $\overline{T}^m, \overline{T}^n$ respectivamente.

Una familia-S es una colección de sucesiones-S donde existe para cada n una y solo una sucesión-S en $\overline{T}^n$.

Una familia admisible es una familia-S donde la sucesión en $\overline{T}^{m+n}$ es el producto de las sucesiones en $\overline{T}^m$, $\overline{T}^n$ respectivamente. En este caso se dirá que la sucesión-S en $\overline{T}$ genera a la familia admisible.

La familia principal es la familia admisible generada por la sucesión principal (2.52) en $\overline{T}$.

Demostraremos ahora la existencia de familias admisibles y de la familia principal.

Teorema 2.57: ***Toda sucesión*-S *en* $\overline{T}$ *genera a una familia admisible.***

Demostración: Sea $\{D_i\}$ una sucesión-S arbitraria en $\overline{T}$. Obtenemos una familia-S definiendo inductivamente:

Si $n > 1$ la sucesión-S en $\overline{T}^n$ es el producto de la sucesión en $\overline{T}^{n-1}$ por la sucesión en $\overline{T}$.

Demostraremos por inducción que esta familia es admisible; la inducción se hará respecto a la dimensión de los complejos $\overline{T}^n$. Si $n = 2$ la sucesión en $\overline{T}^n$ es el producto de la sucesión en $\overline{T}$ por sí misma por definición. Supongamos ahora que para $2 < n < p + q$, donde p y q son enteros positivos, la sucesión en $\overline{T}^n$ es el producto de las sucesiones en $\overline{T}^k$, $\overline{T}^m$ donde $k + m = n$. Consideremos $\overline{T}^{p+q}$, $q > 1$. Sean

$$\mu : (\overline{T}^{p+q-1})^2 \times \overline{T}^2 \to (\overline{T}^{p+q})^2$$

$$\mu_1 : (\overline{T}^p)^2 \times (\overline{T}^{q-1})^2 \to (\overline{T}^{p+q-1})^2$$

$$\mu_2 : (\overline{T}^{q-1})^2 \times \overline{T}^2 \to (\overline{T}^q)^2$$

$$\mu_3 : (\overline{T}^p)^2 \times (\overline{T}^q)^2 \to (\overline{T}^{p+q})^2$$

las transformaciones de cadena definidas en (2.53). Sea $\zeta \in \overline{T}^{p+q}$ entonces $\zeta = \tau_1 \times \tau_2$ donde $\tau_1 \in \overline{T}^{p+q-1}$, $\tau_2 \in \overline{T}$. Por definición

$$\begin{aligned} D_i \zeta &= \mu \sum_{j=0}^{i} (-)^{(i+j)\dim \tau_1} D_j \tau_1 \times T^j D_{i-j} \tau_2 \\ &= \mu \left[D_i \tau_1 \times T^i D_0 \tau_2 + (-)^{\dim \tau_1} D_{i-1} \tau_1 \times T^{i-1} D_1 \tau_2 \right]. \end{aligned}$$

Pero $\tau_1 = \sigma_1 \times \sigma_2$ donde $\sigma_1 \in \overline{T}^p$, $\sigma_2 \in \overline{T}^{q-1}$, entonces por la hipótesis de la inducción tenemos:

$$D_i \tau_1 = \mu_1 \sum_{j=0}^{i} (-)^{(i+j)\dim \sigma_1} D_j \sigma_1 \times T^j D_{i-j} \sigma_2 .$$

Por consiguiente

$$\mu(D_i\tau_1 \times T^iD_o\tau_2) = \mu \sum_{j=0}^{i} (-)^{(i+j)\dim \sigma_1} [\mu_1(D_j \sigma_1 \times T^j D_{i-j} \sigma_2)] \times T^i D_o \tau_2$$

$$= \mu_3 \sum_{j=0}^{i} (-)^{(i+j)\dim \sigma_1} D_j \sigma_1 \times \mu_2 (T^j D_{i-j} \sigma_2 \times T^i D_o \tau_2)$$

$$= \mu_3 \sum_{j=0}^{i} (-)^{(i+)\dim \sigma_1} D_j \sigma_1 \times T^j \mu_2(D_{i-j} \sigma_2 \times T^{i-j} D_o \tau_2)$$

Análogamente:

$$D_{i-1}\tau_1 = \mu_1 \sum_{j=0}^{i-1} (-)^{(i+j-1)\dim \sigma_1} D_j \sigma_1 \times T^j D_{i-j-1} \sigma_2 ,$$

$$\mu(D_{i-1} \tau_1 \times T^{i-1} D_1 \tau_2) = \mu \sum_{j=0}^{i-1} (-)^{(i+j-1)\dim \sigma_1} [\mu_1(D_j\sigma_1 \times T^j D_{i-j-1}\sigma_2] \times T^{i-1}D_1\tau_2$$

$$= \mu_3 \sum_{j=0}^{i} (-)^{(i+j-1)\dim \sigma_1} D_j \sigma_1 \times T^j \mu_2 (D_{i-j-1} \sigma_2 \times T^{i-j-1} D_1\tau_2)$$

Por lo tanto

$$D_i\zeta = \mu_3 \sum_{j=0}^{i} (-)^{(i+j)\dim \sigma_1} D_j \sigma_1 \times T^j \mu_2 [D_{i-j} \sigma_2 \times T^{i-j} D_o \tau_2 +$$

$$+ (-)^{\dim \sigma_1 + \dim \tau_1} D_{i-j-1} \sigma_2 \times T^{i-j-1} D_1 \tau_2]$$

$$= \mu_3 \sum_{j=0}^{i} (-)^{(i+j)\dim \sigma_1} D_j \sigma_1 \times T^j D_{i-j} (\sigma_2 \times \tau_2) ,$$

lo que significa que la sucesión en Γ^{p+q} es el producto de las sucesiones en Γ^p e Γ^q. Así pues el teorema está demostrado.

Podemos caracterizar a las familias admisibles del siguiente modo:

Teorema 2.58: ***Una condición necesaria y suficiente para que una familia-S sea admisible es la conmutatividad de los diagramas***

$$\begin{array}{ccc} C(\overline{I}^m) & \xrightarrow{\Lambda_M^\gamma} & C(\overline{I}^n) \\ D_i \downarrow & & \downarrow D_i \\ C(\overline{I}^m \times \overline{I}^m) & \xrightarrow{\Lambda_M^\gamma \times \Lambda_M^\gamma} & C(\overline{I}^n \times \overline{I}^n) \end{array} .$$

Demostración:

(1º) La condición es necesaria.

Debido a 2.43 basta demostrar $D_i(\lambda_M^\gamma I^n) = (\Lambda_M^\gamma \times \Lambda_M^\gamma)\, D_i\, I^m$ lo que haremos por inducción respecto a n. Si $n = 2$ se comprueba sin dificultad la validez de la proposición; supongamos pues $n > 2$. Sean p y q enteros positivos tales que $p + q = n$; pongamos

$$H = M \cap \{1,\dots,p\}, \qquad K = M \cap \{p+1,\dots,n\}, \qquad L = \psi(K)$$

donde $\psi : \{p+1,\dots,n\} \to \{1,\dots,q\}$ es estrictamente creciente.

Definimos α y β en H y L respectivamente de este modo:

$$\alpha(i) = \gamma(i) \quad \text{para} \quad i \in H; \qquad \beta\psi(j) = \gamma(j) \quad \text{para} \quad j \in K .$$

Se tiene:
$$\lambda_M^\gamma I^n = \lambda_H^\alpha I^p \times \lambda_L^\beta I^p .$$

Si $\nu(M) < n-1$ se puede suponer $\nu(H) \leq p-1$, $\nu(L) \leq q-1$. Ahora por (2.55) y utilizando la hipótesis de la inducción

$$D_i \lambda_M^\gamma I^n = \mu \sum_{j=0}^{i} (-)^{(p-\nu(H))(i+j)} D_j \lambda_H^\alpha I^p \times T^j D_{i-j} \lambda_L^\beta I^q$$

$$= \mu \sum_{j=0}^{i} (-)^{(p-\nu(H))(i+j)} (\Lambda_H^\alpha \times \Lambda_H^\alpha) D_j I^{p-\nu(H)} \times (\Lambda_L^\beta \times \Lambda_L^\beta)\, T^j D_{i-j} I^{q-\nu(L)}$$

$$= (\Lambda_K^\gamma \times \Lambda_K^\gamma)(\Lambda_H^\alpha \times \Lambda_H^\alpha)\, \mu' \sum_{j=0}^{i} (-)^{(p-\nu(H))(i+j)} D_j I^{p-\nu(H)} \times T^j D_{i-j} I^{q-\nu(L)}$$

$$= (\Lambda_M^\gamma \times \Lambda_M^\gamma)\, D_i I^m .$$

Si $\nu(M) = n\text{-}1$ entonces una de las dos células $\lambda^{\alpha}_{H}\, I^{p}, \lambda^{\beta}_{L}\, I^{q}$ es cero dimensional. Si $\lambda^{\alpha}_{H}\, I^{p}$, lo es

$$D_i\, \lambda^{\gamma}_{M}\, I^{n} = \mu(D_o\, \lambda^{\alpha}_{H}\, I^{p} \times D_i\, \lambda^{\beta}_{L}\, I^{q})$$

$$= (\Lambda^{\gamma}_{K} \times \Lambda^{\gamma}_{K})\ \mu'\ (D_o\, \lambda^{\alpha}_{H}\, I^{p} \times D_i\, I^{q-\nu(L)})$$

$$= (\Lambda^{\gamma}_{K} \times \Lambda^{\gamma}_{K})\, D_i\, \lambda^{\alpha}_{H}\, I^{p+q-\nu(L)} = (\Lambda^{\gamma}_{K} \times \Lambda^{\gamma}_{K})(\Lambda^{\alpha}_{H} \times \Lambda^{\alpha}_{H})\, D_i\, I^{m}$$

$$= (\Lambda^{\gamma}_{M} \times \Lambda^{\gamma}_{M})\, D_i\, I^{m}\,.$$

Si $\lambda^{\beta}_{L}\, I^{q}$ es la de dimensión cero, el razonamiento es análogo.

(2º) La condición es suficiente.

Sea $\zeta \in \overline{I}^{n}$, $\zeta = \tau_1 \times \tau_2$ donde $\tau_1 \in \overline{I}^{n-1}$, $\tau_2 \in \overline{I}$. Basta demostrar

$$D_i\, \zeta = \mu \sum_{j=0}^{i} (-)^{(i+j)\dim \tau_1}\, D_j\, \tau_1 \times T^{j}\, D_{i-j}\, \tau_2\quad.$$

Podemos considerar dos casos de acuerdo con la dimensión de τ_2:

(a) $\tau_2 = I$.

Sea $\tau_1 = \lambda^{\gamma}_{M}\, I^{n-1}$ entonces $\zeta = \lambda^{\gamma}_{M}\, I^{n}$. Por hipótesis $D_i \zeta = (\Lambda^{\gamma}_{M} \times \Lambda^{\gamma}_{M})$ $D_i\, I^{n-\nu(M)}$. Ahora

$$\mu \sum_{j=0}^{i} (-)^{(i+j)\dim \tau_1}\, D_j\, \tau_1 \times T^{j}\, D_{i-j}\, \tau_2 = \mu\ [D_i\, \tau_1 \times T^{i}\, D_o I + (-)^{\dim \tau_1}$$

$$D_{i-1}\tau_1 \times T^{i-1}\, D_1\, I] = \mu\ [(\Lambda^{\gamma}_{M} \times \Lambda^{\gamma}_{M})\, D_i\, I^{n-1-\nu(M)} \times T^{i}\, D_o I\ +$$

$$(-)^{\dim \tau_1}\, (\Lambda_M \times \Lambda_M)\, D_{i-1}\, I^{n-1-\nu(M)} \times T^{i-1}\, D_1 I] =$$

$$= (\Lambda^{\gamma}_{M} \times \Lambda^{\gamma}_{M})\ \mu' \,[D_i\, I^{n-1-\nu(M)} \times T^i D_o\, I + (-)^{\dim \tau_1} D_{i-1}\, I^{n-1-\nu(M)} \times T^{i-1} D_1 I]$$

$$= (\Lambda^{\gamma}_{M} \times \Lambda^{\gamma}_{M})\, D_i\, I^{n-\nu(M)} = D_i\, \zeta \quad .$$

(b) $\tau_2 = \varepsilon$

Sea $\tau_1 = \lambda^{\gamma}_{M}\, I^{n-1}$ entonces $\zeta = \lambda^{\gamma}_{M}\, \lambda^{\varepsilon}_{n}\, I^{n}$. Empleando 2.43 puede expresarse la hipótesis así:

$$D_i \zeta = (\Lambda^{\varepsilon}_{n} \times \Lambda^{\varepsilon}_{n})(\Lambda^{\gamma}_{M} \times \Lambda^{\gamma}_{M})\, D_i\, I^{n-\nu(M)-1} \quad .$$

Ahora

$$\mu \sum_{j=0}^{i} (-)^{(i+j)\dim \tau_1} D_j\, \tau_1 \times T^i D_{i-j}\, \tau_2 = \mu(D_i\, \tau_1 \times T^i D_o\, \varepsilon)$$

$$= (\Lambda^{\gamma}_{M} \times \Lambda^{\gamma}_{M})\ \mu' \,[\, D_i\, I^{n-1-\nu(M)} \times T^i D_o\, \varepsilon] = (\Lambda^{\gamma}_{M} \times \Lambda^{\gamma}_{M})\, D_i\, \lambda^{\varepsilon}_{n-\nu(M)}\, I^{n-\nu(M)}$$

$$= (\Lambda^{\gamma}_{M} \times \Lambda^{\gamma}_{M})(\Lambda^{\varepsilon}_{n-\nu(M)} \times \Lambda^{\varepsilon}_{n-\nu(M)})\, D_i\, I^{n-1-\nu(M)}$$

$$= (\Lambda^{\varepsilon}_{n} \times \Lambda^{\varepsilon}_{n})(\Lambda^{\gamma}_{M} \times \Lambda^{\gamma}_{M})\, D_i\, I^{n-1-\nu(M)} = D_i\, \zeta \quad .$$

La proposición siguiente es una consecuencia inmediata de (2.55):

Proposición 2.59: *Sea* $\{D_i\}$ *una familia admisible entonces lo es la familia* $\{TD_i\}$.

2.6 La última parte de este § comprende dos asuntos. El primero de ellos es la comparación entre las operaciones de una familia admisible arbitraria y las del mismo grado de la familia principal; el segundo es la descripción de las expresiones para $D_i\, I^n$ en una familia admisible y especialmente en la familia principal.

Las dos afirmaciones siguientes se demuestran por inducción; en estas demostraciones no hay dificultades esenciales y por ese motivo solo se bosquejarán.

Teorema 2.61: *Si* $\{D_i'\}$ ***es una familia arbitraria admisible y*** $\{D_i\}$ ***es la familia principal entonces***

o $D_i' = D_i$ *mod.2 para toda* i o $D_i' = T\,D_i$ *mod.2 para toda* i.

Demostración: En $\overline{T}$ las operaciones D_i' son de la forma (2.51); si a es impar $D_i' = D_i$ mod.2, si a es par $D_i' = TD_i$ mod.2. Ahora por inducción y usando (2.55), en $\overline{T}^n$ se obtiene en el primer caso $D_i' = D_i$ mod.2 y en el segundo $D_i' = T\,D_i$ mod.2.

Teorema 2.62: *Si* $\{D_i\}$ ***es una familia admisible entonces***

$$D_i\, I^n = \sum_{(H,K)} \rho_{HK}\ \lambda_K^{\beta}\, I^n \times \lambda_H^{\alpha}\, I^n \quad (i \leqslant n) \tag{2.63}$$

donde H ***y*** K ***son subconjuntos de*** $\{1,\ldots,n\}$ ***y:***

(a) ρ_{HK} ***es un número entero.***

(b) $H \cap K = 0$.

(c) $\nu(H \cup K) = n\text{-}i$.

Si $\{D_i\}$ ***es la familia principal se tiene además:***

(d) $|\rho_{HK}| = 1$

(e) ***La suma*** (2.63) ***contiene uno y solo un término para cada par ordenado*** (H,K) ***que satisfaga*** (b) ***y*** (c).

(f) ***Sea*** $j = r\text{-}\nu[(H \cup K) \cap \{1,\ldots,r\}]$, $\eta(j) = 0$ ***si*** j ***es par,*** $\eta(j) = 1$ ***si*** j ***es impar.***

Si $r \in K$, $\beta(r) = \eta(j)$; ***si*** $r \in H$, $\alpha(r) = 1\text{-}\eta(j)$.

Demostración: Se comprueba inmediatamente la validez de (b) a (f) para $n = 1$. Para $n > 1$ pongamos $I^n = I^{n-1} \times I$ y apliquemos (2.55); por inducción se demuestran (b), (c), (d), (e), y si la familia es la principal se deduce:

Para i par: si $n \in K$, $\beta(n) = 0$; si $n \in H$, $\alpha(n) = 1$.

Para i impar: si $n \in K$, $\beta(n) = 1$; si $n \in H$, $\alpha(n) = 0$.

Consideremos ahora un término arbitrario $\lambda_K^{\beta}\, I^n \times \lambda_H^{\alpha}\, I^n$ en (2.63). Sea

$1 \leq r \leq n$, $L = H \cap \{1,\dots,r\}$, $M = K \cap \{1,\dots,r\}$, γ y δ restricciones de α y β en L y M respectivamente. Entonces $\lambda^{\delta}_{M}\, \overline{I^r} \times \lambda^{\gamma}_{L}\, I^r$ es un término de $D_i\, I^r$ donde $i = r-\nu(L \cup M)$, así pues (f) vale.

§3. LOS PRODUCTOS-i.

3.1 Sea X un espacio topológico. Un cubo singular n-dimensional de X es una función continua $u : I^n \to X$. Un cubo u de dimensión $n > 0$ es degenerado si $u(t_1,\dots,t_n) = u(t_1,\dots,t_{n-1},t'_n)$ cualesquiera que sean los valores de $t_1,\dots,t_{n-1}, t_n, t'_n$. Sea $Q_n(X)$ el grupo abeliano libre generado por los n-cubos de X, $D_n(X)$ el subgrupo de $Q_n(X)$ generado por los n-cubos degenerados; se definen $Q(X)$ y $D(X)$ como las sumas directas de los grupos $Q_n(X)$ y $D_n(X)$ respectivamente.

Para K arbitrario y β definida en K definimos un homomorfismo

$$\lambda^{\beta}_{K} : Q(X) \to Q(X) \tag{3.11}$$

de este modo:

Sea u un n-cubo de X, entonces

(a) Si $K \subset \{1,\dots,n\}$, $\lambda^{\beta}_{K} u$ es el cubo de dimensión $m = n-\nu(K)$ tal que

$$\lambda^{\beta}_{K} u(t_1,\dots,t_m) = u(y_1,\dots,y_n) \ , \qquad \text{donde} \quad y_i = \begin{cases} \beta(i) & \text{si} \quad i \in K \\ t_{\varphi_K(i)} & \text{si} \quad i \notin K \end{cases}$$

(b) Si $K \not\subset \{1,\dots,n\}$ definimos $\lambda^{\beta}_{K} u = 0$.

Esta definición es análoga a (2.2) y tiene la misma propiedad formal, a saber:

$$\lambda^{\gamma}_{L}\, \lambda^{\beta}_{K} = \lambda^{\delta}_{M} \tag{3.12}$$

$$\text{donde} \quad M = K \cup \varphi^{-1}_{M}(L)\ ; \qquad \delta(i) = \begin{cases} \beta(i) & \text{si} \quad i \in K \\ \gamma\varphi_K(i) & \text{si} \quad i \in \varphi^{-1}_{K}(L). \end{cases}$$

Haremos también las mismas convenciones de notación, esto es, se escribirá $\lambda^{\varepsilon}_{H}$ en lugar de λ^{α}_{H} cuando α es constante y $\lambda^{\varepsilon}_{i}$ en lugar de $\lambda^{\varepsilon}_{\{i\}}$.
Al cubo $\lambda^{\beta}_{K}u$ le llamaremos *cara de* u.

3.13 El operador frontera

$$d : Q(X) \to Q(X)$$

se define por la condición

$$(3.14) \qquad du = \sum_{i=1}^{n} (-)^{i} (\lambda^{0}_{i} u - \lambda^{1}_{i} u) , \qquad n = \dim u .$$

Se deduce fácilmente que (3.12) implica $dd = 0$. El grupo $D(X)$ es un subgrupo estable* del grupo diferencial $Q(X)$ entonces $C(X) = Q(X)\ D(X)$ es un grupo diferencial; es, por definición el grupo de las cadenas cúbicas singulares de X. Se denota con $C_n(X)$ al grupo $Q_n(X)\ D_n(X)$ y se tiene $C(X) = \sum_n C_n(X)$; $C_n(X)$ es el grupo de las n-cadenas y es un grupo libre con una base cuyos elementos están en correspondencia biunívoca con los n-cubos no degenerados de X. Si G es un grupo abeliano $C^n(X;G)$ es el grupo $\mathrm{Hom}(C_n(X),G)$ y se llama el grupo de las n-cocadenas cúbicas de X con valores en G. Si A es un subconjunto de X el grupo $C^n(X,A;G)$ es el subgrupo de $C^n(X;G)$ cuyos elementos se anulan en los cubos de A. El grupo $C^n(X,A;G)$ puede identificarse canónicamente con el subgrupo de $\mathrm{Hom}(Q_n(X),G)$ cuyos elementos se anulan en los cubos de A y en los cubos degenerados de X. Aquí consideraremos solo el caso en el que $G = Z_2$ = grupo de los enteros módulo 2.

3.15 Diremos que un cubo es *regular* si sus caras son diferentes entre sí. Es fácil ver que en X existen cubos regulares de cualquier dimensión si y solo si X posee una arco-componente (componente según arcos) que no es un punto. Si todas las arco-componentes de X son puntos la cohomología de X es trivial; en lo que sigue supondremos que no se da este caso.

3.2 Podemos introducir conceptos análogos a los definidos en §2:

3.21 El grupo $J(X) = Q(X) \otimes Q(X)$ es un grupo diferencial graduado -

---

* D(X) contiene a su imagen segun d.

con el operador frontera (que también designaremos con la letra d):

(3.22) $$d(u \otimes v) = du \otimes v + (-)^p u \otimes dv , \qquad p = \dim u$$

y está graduado por los grupos $J_n(X) = \sum_{p+q=n} Q_p(X) \otimes Q_q(X)$.

(3.23) $$T : J(X) \to J(X)$$

es el homomorfismo tal que $T(u \otimes v) = (-)^{pq} v \otimes u$ donde $p = \dim u$, $q = \dim v$. A la identidad en $J(X)$ la denotaremos con e.

3.24 Si u es un cubo de X denotemos con $Q[u]$ al subgrupo de $Q(X)$ generado por todas las caras de u; $Q[u]$ es un subgrupo estable y sumando directo de $Q(X)$. Sea $J[u] = Q[u] \otimes Q[u]$; puede considerarse $J[u]$ como subgrupo estable de $J(X)$.

3.25 Sean s y u dos cubos de X de dimensiones m y n respectivamente y supongamos $1 \leqslant m \leqslant n$. Sea $M \subset \{1,\ldots,n\}$ tal que $\nu(M) = n-m$ y γ definida en M. Si s es regular definimos dos homomorfismos

$$\Lambda^\gamma_M : Q[s] \to Q[u] \ ; \quad \Lambda^\gamma_M \otimes \Lambda^\gamma_M : J[s] \to J[u]$$

por las condiciones

$$\Lambda^\gamma_M(\lambda^a_H s) = \lambda^a_H \lambda^\gamma_M u \ ; \quad (\Lambda^\gamma_M \otimes \Lambda^\gamma_M)(s' \otimes s'') = \Lambda^\gamma_M s' \otimes \Lambda^\gamma_M s'' .$$

3.26 Una operación de grado i de $Q(X)$ en $J(X)$ es un homomorfismo

$$D_i : Q(X) \to J(X)$$

que satisface la condición

$$D_i Q_n(X) \subset J_{n+i}(X)$$

3.27 Una sucesión-S en X es una sucesión de operaciones $\{D_i\}$

$i = 0,1,2,\ldots$ de $Q(X)$ en $J(X)$ tales que:

(a) $D_i u \in J[u]$

(b) D_o *es una transformación de cadena.*

(c) $dD_i + (-)^{i+1} D_i d = (T + (-)^i e) D_{i-1}$, $i \geqslant 1$.

(d) Son conmutativos los diagramas (véase 3.25)

$$\begin{tikzcd} Q[s] \arrow[r, "\Lambda^{\gamma}_M"] \arrow[d, "D_i"'] & Q[u] \arrow[d, "D_i"] \\ J[s] \arrow[r, "\Lambda^{\gamma}_M \otimes \Lambda^{\gamma}_M"] & J[u] \end{tikzcd}$$

3.3 En este párrafo obtendremos algunas proposiciones que permitirán demostrar que toda familia admisible determina una sucesión -S en X y recíprocamente.

Para cada n-cubo u de X, $n \geqslant 1$, definimos un homomorfismo

(3.31) $$u_{\#} : C(\overline{I}^n) \to Q(X)$$

por la condición

(3.32) $$u_{\#}(\lambda^{\alpha}_H I^n) = \lambda^{\alpha}_H u$$

Proposición 3.33: $u_{\#}$ *es una transformación de cadena.*

Demostración: Evidentemente $u_{\#}$ conserva el índice de las cadenas de dimensión cero. El resto de la proposición es consecuencia inmediata de (2.3) y (3.14).

Consideremos los homomorfismos $\Lambda^{\gamma}_M : C(\overline{I}^m) \to C(\overline{I}^n)$; $u_{\#} : C(\overline{I}^n) \to Q(X)$; $(\lambda^{\gamma}_M u)_{\#} : C(\overline{I}^m) \to Q(X)$ donde $M \subset \{1,\ldots,n\}$, $\nu(M) = n-m$ y γ está definida en M. Se tiene la

Proposición 3.34: $u_{\#} \Lambda^{\gamma}_M = (\lambda^{\gamma}_M u)_{\#}$

Demostración: Por las definiciones anteriores

$$u_\# \Lambda^\gamma_M (\lambda^\alpha_H I^m) = u_\#(\lambda^\alpha_H \lambda^\gamma_M I^n) = \lambda^\alpha_H \lambda^\gamma_M u = (\lambda^\gamma_M u)_\# (\lambda^\alpha_H I^m) \quad .$$

El homomorfismo $u_\#$ induce una transformación de cadena

$$u_\# \otimes u_\# : C(\overline{I}^n \times \overline{I}^n) \to J(X) \tag{3.35}$$

definida por la condición

$$(u_\# \otimes u_\#)(\sigma \times \tau) = u_\#(\sigma) \otimes u_\#(\tau) \ ; \qquad \sigma, \tau \in \overline{I}^n \quad . \tag{3.36}$$

Nota: La imagen de $u_\#$ está contenida en el subgrupo $Q[u]$ de $Q(X)$. Por ese motivo usaremos también el símbolo $u_\#$ para indicar el homomorfismo de $C(\overline{I}^n)$ en $Q[u]$ inducido por (3.31). Para $u_\# \otimes u_\#$ haremos una consideración semejante.

Es inmediata la

Proposición 3.37: *Los siguientes diagramas son conmutativos*

$$\begin{tikzcd} C(\overline{I}^n \times \overline{I}^n) \arrow[r, "u_\# \otimes u_\#"] \arrow[d, "T"'] & J(X) \arrow[d, "T"] \\ C(\overline{I}^n \times \overline{I}^n) \arrow[r, "u_\# \otimes u_\#"] & J(X) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} C(\overline{I}^m \times I^m) \arrow[r, "s_\# \otimes s_\#"] \arrow[d, "\Lambda^\gamma_M \times \Lambda^\gamma_M"'] & J[s] \arrow[d, "\Lambda^\gamma_M \otimes \Lambda^\gamma_M"'] \\ C(\overline{I}^n \times \overline{I}^n) \arrow[r, "u_\# \otimes u_\#"] & J[u] \end{tikzcd}$$

Definición* 3.38: Si $\{D_i\}$ es una *familia admisible* definimos una sucesión de operaciones $\{D_i\}$ de $Q(X)$ en $J(X)$ del modo siguiente:

Sea u un n-cubo de X entonces

$$(3.39) \qquad \begin{aligned} &D_i u = (u_\# \otimes u_\#)\, D_i I^n && \text{si} \quad n > 0 \\ &D_o u = u \otimes u\,, \quad D_i\, u = 0 \quad \text{para} \quad i > 0\,, && \text{si} \quad n = 0. \end{aligned}$$

*Esta definición es consecuencia de una sugestión del Dr. José Adem.

Teorema 3.4: *La sucesión definida en* 3.38 *es una sucesión*-S *en* X.

Demostración: 3.27(a) es una consecuencia inmediata de (3.36) y (2.63). Tomemos un n-cubo u de X. Si $n = 0$ es evidente que se satisfacen las condiciones restantes de 3.27. Si $n > 0$ y M es arbitrario se tiene

$$D_i \lambda^\gamma_M u = (u_\# \otimes u_\#) D_i \lambda^\gamma_M I^n \quad .$$

En efecto: Si $n \geq 2$, $M \subset \{1,\dots,n\}$ tal que $\nu(M) < n-1$, apliquemos 3.34 y (2.58); se obtiene

$$D_i \lambda^\gamma_M u = (\lambda^\gamma_M u)_\# \otimes (\lambda^\gamma_M u)_\# \, D_i I^{n-\nu(M)} = (u_\# \otimes u_\#)(\Lambda^\gamma_M \times \Lambda^\gamma_M) D_i I^{n-\nu(M)}$$

$$= (u_\# \otimes u_\#) D_i \lambda^\gamma_M I^n \quad .$$

En los casos restantes se obtiene directamente este resultado.

Así pues para $1 \leq i \leq n$ es $D_i \lambda^\varepsilon_i u = (u_\# \otimes u_\#) D_i \lambda^\varepsilon_i I^n$. Por consiguiente $D_i du = (u_\# \otimes u_\#) D_i dI^n$. Ahora en 2.5(b) y (c) apliquemos el homomorfismo $u_\# \otimes u_\#$ a ambos miembros de las igualdades correspondientes; por (3.35 y 3.37 resultan 3.27(b) y (c).

Demostremos ahora 3.27(d):

$$D_i \Lambda^\gamma_M (\lambda^\alpha_H s) = D_i (\lambda^\alpha_H \lambda^\gamma_M u) = (u_\# \otimes u_\#) D_i \lambda^\alpha_H \lambda^\gamma_M I^n \quad .$$

Por 3.37:

$$(\Lambda^\gamma_M \otimes \Lambda^\gamma_M) D_i \lambda^\alpha_H s = (\Lambda^\gamma_M \otimes \Lambda^\gamma_M)(s_\# \otimes s_\#) D_i \lambda^\alpha_H I^m$$

$$= (u_\# \otimes u_\#)(\Lambda^\gamma_M \times \Lambda^\gamma_M) D_i \lambda^\alpha_H I^m$$

$$= (u_\# \otimes u_\#) D_i \lambda^\alpha_H \lambda^\gamma_M I^n$$

Por consiguiente $D_i\,\Lambda^{\gamma}_{M}(\lambda^{\alpha}_{H}s) = (\Lambda^{\gamma}_{M} \otimes \Lambda^{\gamma}_{M})\, D_i(\lambda^{\alpha}_{H}s)$, y 3.27(d) está demostrado.

Teorema 3.41: ***Toda sucesión-S en X se obtiene de una familia admisible por medio de*** (3.39).

Demostración: Sea $\{D_i\}$ una sucesión-S arbitraria en X. Para cada $n \geq 1$ elijamos un n-cubo s regular; los homomorfismos $s_{\#}\colon C(\overline{I}^n) \to Q[s]$ y $s_{\#} \otimes s_{\#}\colon C(\overline{I}^n \times \overline{I}^n) \to J[s]$ son isomorfismos y por medio de sus inversos trasladamos a $\overline{I}^n$ las operaciones D_i restringidas a $Q[s]$. Se obtiene así en $\overline{I}^n$ una sucesión $\{D_i\}$ de operaciones y 3.27(a), (b) y (c) implican que esta es una sucesión-S; 3.27(d) implica que la sucesión en $\overline{I}^n$ no depende del n-cubo regular elegido. Obtenemos así una familia-S. Sea ahora $v = \lambda^{\gamma}_{M}s$ donde $M \subset \{1,\dots,n\}$ es tal que $n-\nu(M) \geq 1$. Pongamos $m = n-\nu(M)$. Se tiene el diagrama conmutativo.

$$\begin{array}{ccccccc}
C(\overline{I}^m) & \xrightarrow{v_{\#}} & Q[v] & \xrightarrow{\Lambda^{\gamma}_{M}} & Q[s] & \xrightarrow{s_{\#}^{-1}} & C(\overline{I}^n) \\
D_i \downarrow & & D_i \downarrow & & D_i \downarrow & & \downarrow D_i \\
C(\overline{I}^m \times I^m) & \xrightarrow{v_{\#} \otimes v_{\#}} & J[v] & \xrightarrow{\Lambda^{\gamma}_{M} \otimes \Lambda^{\gamma}_{M}} & J[s] & \xrightarrow{(s_{\#} \otimes s_{\#})^{-1}} & C(\overline{I}^n \times \overline{I}^n)
\end{array}$$

La composición de los homomorfismos en el primer renglón es Λ^{γ}_{M} y en el segundo es $\Lambda^{\gamma}_{M} \times \Lambda^{\gamma}_{M}$. Por 2.58 la familia-S definida antes es admisible. Ahora sea u un n-cubo arbitrario con $n > 0$. Denotemos con Λ_o, $\Lambda_o \otimes \Lambda_o$ a los homomorfismos, definidos en 3.25, de $Q[s]$ en $Q[u]$ y $J[s]$ en $J[u]$ respectivamente. Se tiene el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc}
C(\overline{I}^n) & \xrightarrow{s_{\#}} & Q[s] & \xrightarrow{\Lambda_o} & Q[u] \\
D_i \downarrow & & D_i \downarrow & & \downarrow D_i \\
C(\overline{I}^n \times \overline{I}^n) & \xrightarrow{s_{\#} \otimes s_{\#}} & J[s] & \xrightarrow{\Lambda_o \otimes \Lambda_o} & J[u]
\end{array}$$

La composición de los homomorfismos en el primer renglón es $u_\#$ y en el segundo es $u_\# \otimes u_\#$, por consiguiente $D_i u = (u_\# \otimes u_\#) D_i I^n$. En consecuencia la sucesión-S en X se obtiene de una familia admisible por medio de (3.39)

Definición 3.42: ***La sucesión principal en*** X es la sucesión-S en X que se obtiene de la familia principal por medio de (3.39).

Los teoremas 2.61 y 2.62 implican a los dos teoremas siguientes:

Teorema 3.43: ***Si en*** X ***es*** $\{D_i'\}$ ***una sucesión***-S ***arbitraria y*** $\{D_i\}$ ***es la sucesión principal:***

o $D_i' = D_i'$ *mod 2 para toda* i o $D_i' = TD_i$ *mod 2 para toda* i.

Teorema 3.44: ***Si*** $\{D_i\}$ ***es una sucesión***-S ***en*** X ***y*** u ***es un*** n-***cubo, se tiene:***

$$D_i u = \sum_{(H,K)} \rho_{HK}\, \lambda_K^\beta u \otimes \lambda_H^\alpha u \qquad (i \leqslant n)$$

donde se satisfacen las condiciones (a), (b) y (c) ***de*** 2.62. ***Si*** $\{D_i\}$ ***es la sucesión principal se cumplen además las condiciones*** (d) ,(e) y (f) **de** 2.62.

3.5 Sean $f \in C^p(X,A;Z_2)$, $g \in C^q(X,A;Z_2)$. Definimos

$$f \otimes g \in \mathrm{Hom}(J_{p+q}(X), Z_2)$$

por las condiciones siguientes:

Si u y v son dos cubos de X tales que $\dim u + \dim v = p + q$ entonces

$$(3.51) \quad \begin{cases} (f \otimes g)(u \otimes v) = f(u)\cdot g(v) & \text{si } p = \dim u,\ q = \dim v \\ (f \otimes g)(u \otimes v) = 0 & \text{en los casos restantes.} \end{cases}$$

Se obtiene de este modo un apareamiento bilineal de $C^p(X,A;Z_2)$ y $C^q(X,A;Z_2)$ en $\mathrm{Hom}(J_{p+q}(X), Z_2)$.

Dada una sucesión-S $\{D_i\}$ en X consideremos el dual de D_i:

$$D_i^{\#} : \mathrm{Hom}\,(J(X),Z_2) \to \mathrm{Hom}(Q(X),Z_2).$$

Obsérvese que este homomorfismo proyecta $\mathrm{Hom}(J_n(X),Z_2)$ en $\mathrm{Hom}(Q_{n-i}(X),Z_2)$.

Definición 3.52: El producto-i, $f \underset{i}{\vee} g$, de f y g según la sucesión $\{D_i\}$ está definido por las igualdades

(3.53)
$$f \underset{i}{\vee} g = D_i^{\#}\ (f \otimes g)\ , \qquad i \geqslant 0$$
$$f \underset{i}{\vee} g = 0 \quad , \qquad i < 0\ .$$

3.54 Si la sucesión $\{D_i\}$ es la principal escribiremos $f \underset{i}{\smile} g$ en lugar de $f \underset{i}{\vee} g$.

Por la condición (b) de 3.44 se deduce $(f \underset{i}{\vee} g)(u) = 0$ si u es un cubo degenerado; por 3.37(a) $(f \underset{i}{\vee} g)(u) = 0$ si u es un cubo de A. Por consiguiente $f \underset{i}{\vee} g \in C^{p+q-i}(X,A;Z_2)$.

Proposición 3.55: *El producto-i es bilineal y se tiene la fórmula*

$$d(f \underset{i}{\vee} g) = df \underset{i}{\vee} g + f \underset{i}{\vee} dg + f \underset{i-1}{\vee} g + g \underset{i-1}{\vee} f$$

Demostración: Là bilinealidad del apareamiento de $C^p(X,A;Z_2)$ y $C^q(X,A;Z_2)$ en $\mathrm{Hom}(J_{p+q}(X),Z_2)$ implica la misma propiedad para el producto-i. Para demostrar la segunda parte de la proposición basta emplear a los duales de - 3.27(b) y (c).

Observación: El Teorema 3.43 implica: ó $f \underset{i}{\vee} g = f \underset{i}{\smile} g$ para toda i ó $f \underset{i}{\vee} g = g \underset{i}{\smile} f$ para toda i. Por lo tanto es suficiente considerar únicamente al producto $\underset{i}{\smile}$.

Por (3.51) y 3.44 se obtiene inmediatamente la siguiente descripción del producto $\underset{i}{\smile}$:

Teorema 3.56: *Si* $f \in C^p(X,A;Z_2)$, $g \in C^q(X,A;Z_2)$, $i \leq p+q$, y u *es un* $(p+q-i)$*-cubo de* X:

$$(3.57) \qquad (f \underset{i}{\smile} g)(u) = \sum_{(H,K)} f(\lambda_K^{\beta} u)\cdot g(\lambda_H^{\alpha} u)$$

donde H *y* K *son subconjuntos de* $\{1,\ldots,p+q-i\}$ *y:*

(a) $H \cap K = 0$.

(b) $\nu(H) = p-i$; $\nu(K) = q-i$.

(c) ***La suma en*** (3.57) ***contiene uno y solo un término para cada par ordenado*** (H,K) ***que satisfaga*** (a) *y* (b).

(d) ***Sea*** $j = r-\nu[(H \cup K) \cap \{1,\ldots,r\}]$, $\eta(j) = 0$ ***si*** j ***es par,*** $\eta(j) = 1$ ***si*** j ***es impar.***

Si $r \in K$, $\beta(r) = \eta(j)$; ***si*** $r \in H$, $\alpha(r) = 1-\eta(j)$.

§4. LOS CUADRADOS-i

Sea $H^n(X,A;Z_2)$ el n-grupo de cohomología de (X,A) con el grupo de coeficientes Z_2. En este § δ será el operador cofrontera $H^n(A;Z_2) \to H^{n+1}(X,A;Z_2)$. Una función continua $F:(X,A) \to (Y,B)$ induce un homomorfismo $F_{\#}: Q(X) \to Q(Y)$ cuyo valor en el cubo u de X es el cubo Fu de Y; se deduce inmediatamente la propiedad: $\lambda_M^{\gamma}(F_{\#}u) = F_{\#}(\lambda_M^{\gamma}u)$ donde (M,γ) es arbitrario. El homomorfismo $F^{\#}$, dual de $F_{\#}$, proyecta $C^n(Y,B;Z_2)$ en $C^n(X,A;Z_2)$ e induce el homomorfismo $F^*:H^n(Y,B;Z_2) \to H^n(X,A;Z_2)$ asociado a la función F. Si f es un cociclo denotaremos con $\{f\}$ su clase de cohomología.

Por 3.55 existen homomorfismos

$$(4.1) \qquad Sq_i : H^n(X,A;Z_2) \to H^{2n-i}(X,A;Z_2)$$

tales que

$$(4.2) \qquad Sq_i\{f\} = \{f \underset{i}{\smile} f\} \quad .$$

4.3 A continuación se demuestra que los homomorfismos (4.1) satisfacen las condiciones de la caracterización de Serre [3,p.222] .

Los homomorfismos (4.1) satisfacen las condiciones siguientes:

(4.31) $\quad F^*Sq_i = Sq_i\, F^* \qquad$ donde $F:(X,A) \to (Y,B)$

(4.32) $\quad \delta Sq_i = Sq_{i+1}\, \delta \qquad$ donde $\delta: H^n(A;Z_2) \to H^{n+1}(X,A;Z_2)$

(4.33) $\quad Sq_o x = x^2 \qquad$ donde x^2 es el "cup product" de x

(4.34) $\quad Sq_i\, x = 0 \qquad$ si $\dim x < i$.

Demostración de (4.34): Sea u un cubo de dimensión 2n-i; si $i > n$, por (3.39) se deduce $D_i\, u = 0$. Por consiguiente $f \smile_i f = 0$ si $\dim f < i$. Así pues se satisface (4.34).

Demostración de (4.31): Sea f un n-cociclo de (Y,B) y u un cubo de X de dimensión 2n-i. Por (4.34) podemos suponer $i \leq n$. Por el teorema 3.56 tenemos

$$[F^\#(f \smile_i f)]\,(u) = (f \smile_i f)(F_\# u) = \sum_{(H,K)} f(\lambda^\beta_K F_\# u)\cdot f(\lambda^\alpha_H F_\# u)$$

$$= \sum_{(H,K)} F^\# f(\lambda^\beta_K u)\cdot F^\# f(\lambda^\alpha_H u) = (F^\# f \smile_i F^\# f)(u) \;,$$

lo que implica (4.31).

Demostración de (4.32): Sea f un n-cociclo de A y $\overline{f} \in H^n(A;Z_2)$ su clase de cohomología. La cocadena df es un cociclo de (X,A) y su clase de cohomología es $\delta\overline{f}$ por definición. Se tiene $Sq_{i+1}\delta\overline{f} = \{df \smile_{i+1} df\}$. Ahora por 3.55: $d(f \smile_i f) + d(f \smile_{i+1} df) = df \smile_{i+1} df$. Ya que $f \smile_{i+1} df$ es una cocadena de (X,A), se obtiene (4.32).

Demostración de (4.33): Sea f un n-cociclo de (X,A). Por 3.56 se tiene para $i = 0$:

$$(f \smile f)(u) = \sum_{(H,K)} f(\lambda^o_K u)\cdot f(\lambda^1_H u)$$

donde H y K son complementarios y H recorre la familia de subconjuntos con n elementos de $\{1,\ldots,2n\}$. Esta es la fórmula del cup product, definida en [2,p.441], para el caso particular en el cual el grupo de coeficientes es Z_2.

BIBLIOGRAFIA

[1] S.Mac Lane: ***The homology products in*** $K(\Pi,n)$. Proceedings of the American Mathematical Society. Vol. **5**, pp 642-651 (1954).

[2] J.P. Serre: ***Homologie singulière des espaces fibrés, applications.*** Annals of Mathematics, Vol. **54**, pp 425-505 (1951).

[3] ——— ***Cohomologie modulo 2 des complexes d'Eilemberg-Mac Lane.*** Comentarii Mathematici Helvetici. Vol. **27**, pp 198-232 (1953).

[4] N.E. Steenrod: ***Reduced Powers of Cohomology Classes.*** Annals of Mathematics. Vol. **56**, pp 47-67 (1952).

INSTITUTO DE MATEMATICAS DE LA
UNIVERSIDAD NACIONAL DE MEXICO

INSTITUTO NACIONAL DE LA
INVESTIGACION CIENTIFICA

Vol. XI
Nos. 1 a 4

BOLETIN
de la
SOCIEDAD MATEMATICA MEXICANA

1954

SOBRE LOS IDEALES ABIERTOS EN ANILLOS DE ZARISKI*

Emilio Lluis Riera

En esta nota, llamaremos anillo de Zariski a un $\mathfrak{m}$-anillo $\mathfrak{o}$ tal que $\mathfrak{m}$ esté contenido en la intersección de todos los ideales máximos de $\mathfrak{o}$, [1]. Designaremos con $\hat{\mathfrak{o}}$ la completación del anillo de Zariski $\mathfrak{o}$ y con $\hat{\mathfrak{m}}$ el ideal $\hat{\mathfrak{o}}\mathfrak{m}$ de $\hat{\mathfrak{o}}$. Como de costumbre, si $\mathfrak{a}$ es un ideal de $\mathfrak{o}$, llamaremos extensión de $\mathfrak{a}$ al ideal $\hat{\mathfrak{o}}\mathfrak{a}$ de $\hat{\mathfrak{o}}$.

Recordamos que un ideal $\mathfrak{a}$ del anillo de Zariski $\mathfrak{o}$ es abierto si y sólo si $\mathfrak{a}$ contiene una potencia del ideal $\mathfrak{m}$.

El objeto de esta nota es de demostrar la siguiente propiedad:

TEOREMA. *Si $\mathfrak{o}$ es un anillo de Zariski y $\hat{\mathfrak{o}}$ su completación, entonces la extensión induce una correspondencia biunívoca entre el conjunto de todos los ideales abiertos de $\mathfrak{o}$ y el conjunto de todos los ideales abiertos de $\hat{\mathfrak{o}}$.*

En primer lugar, la extensión de un ideal abierto de $\mathfrak{o}$ es un ideal abier

* Recibido el 25 de febrero de 1954.

[1] En una nota anterior (Bol.Soc.Mat.Mexicana, Vol. 10, Nos. 3,4 (1953)) a estos anillos los llamamos "semilocales generalizados".

to de $\hat{\mathfrak{o}}$. En efecto, si $\mathfrak{a}$ es abierto, $\mathfrak{a} \supset \mathfrak{m}^n$ de donde $\mathfrak{a}\hat{\mathfrak{o}} \supset \mathfrak{m}^n\hat{\mathfrak{o}} = \hat{\mathfrak{m}}^n$, es decir, $\mathfrak{a}\hat{\mathfrak{o}}$ es abierto.

La fórmula $\mathfrak{a}\hat{\mathfrak{o}} \cap \mathfrak{o} = \mathfrak{a}$ implica que la correspondencia inducida por la extensión es una correspondencia biunívoca entre el conjunto de todos los ideales abiertos de $\mathfrak{o}$ y sus imágenes en $\hat{\mathfrak{o}}$ que como indicamos arriba son también ideales abiertos.

Entonces falta solamente demostrar que esta correspondencia es **s o b r e**. Evidentemente si $\hat{\mathfrak{a}}$ es un ideal abierto de $\hat{\mathfrak{o}}$, su contracción $\hat{\mathfrak{a}} \cap \mathfrak{o}$ es un ideal abierto de $\mathfrak{o}$, ya que si $\hat{\mathfrak{a}} \supset \hat{\mathfrak{m}}^n$, $\hat{\mathfrak{a}} \cap \mathfrak{o} \supset \hat{\mathfrak{m}}^n \cap \mathfrak{o} = \mathfrak{m}^n$. Demostraremos que la extensión de este ideal $\hat{\mathfrak{a}} \cap \mathfrak{o}$ es precisamente $\hat{\mathfrak{a}}$, es decir, que $(\hat{\mathfrak{a}} \cap \mathfrak{o})\hat{\mathfrak{o}} = \hat{\mathfrak{a}}$. Para ello bastará demostrar que $(\hat{\mathfrak{a}} \cap \mathfrak{o})\hat{\mathfrak{o}} \supset \hat{\mathfrak{a}}$. Supongamos que $\hat{\mathfrak{a}} \supset \hat{\mathfrak{m}}^n$ y por lo tanto que $\hat{\mathfrak{a}} \cap \mathfrak{o} \supset \mathfrak{m}^n$. Sea $\hat{a}$ un elemento de $\hat{\mathfrak{a}}$. Entonces existe $a \in \mathfrak{o}$ tal que $a \equiv \hat{a}(\mathfrak{m}^n)$, de donde $\hat{a} - a \in \hat{\mathfrak{m}} \subset \hat{\mathfrak{a}}$ y por lo tanto $a \in \hat{\mathfrak{a}}$, es decir, $a \in \hat{\mathfrak{a}} \cap \mathfrak{o}$. Por otro lado, $\hat{a} - a \in \mathfrak{m}^n \mathfrak{o} \subset (\hat{\mathfrak{a}} \cap \mathfrak{o})\hat{\mathfrak{o}}$. Las dos relaciones obtenidas demuestran que $\hat{a} \in (\hat{\mathfrak{a}} \cap \mathfrak{o})\hat{\mathfrak{o}}$, con lo que queda demostrado el teorema.

INSTITUTO DE MATEMATICAS DE LA
UNIVERSIDAD NACIONAL DE MEXICO

INSTITUTO NACIONAL DE LA
INVESTIGACION CIENTIFICA

PUBLICACIONES DE LA SOCIEDAD MATEMATICA MEXICANA

1. ¿Qué es la aritmética?. Ensayo de crítica didáctica. Por Francisco Zubieta Russi. $ 3.00

2. Representaciones del grupo de rotaciones del espacio tridimensional y sus aplicaciones. Por I. M. Gelfand y Z. Y. Shapiro. Traducción del ruso por E. Lluis Riera. Edición en Ditto.

   (Del Indice.) Grupo de rotaciones del espacio tridimensional (grupo ortogonal). Rotaciones infinitamente pequeñas de las representaciones irreducibles del grupo de rotaciones. Funciones esféricas y representaciones del grupo de rotaciones.

   (Del prólogo.) "La teoría de las representaciones, en particular, de las representaciones del grupo tridimensional de rotaciones se usa profusamente en la mecánica cuántica. Aquí se ha reunido el material fundamentalmente necesario para las aplicaciones a la mecánica cuántica."

   En preparación

3. Clasificación homotópica de las transformaciones de la esfera-(n+2) en la esfera-n. Por L. S. Pontraiguin. Traducción del ruso por E. Lluis Riera.

   En preparación.

4. Clasificación de las transformaciones de la esfera-(n+1) en un poliedro, cuyos grupos fundamental y de Betti, de dimensiones 2, . . ., (n-1) son triviales. Por L. S. Pontriaguin. Traducción del ruso por E. Lluis Riera.

   En preparación.

5. Clasificación de las transformaciones continuas de un complejo de dimensión N + 1 en un espacio topológico que es aesférico en dimensiones menores que N. or PM. M. Postnikov. Traducción del ruso por E. Lluis Riera.

   En preparación.