Vol. XI
Nos. 1 a 4

BOLETIN
de la
SOCIEDAD MATEMATICA MEXICANA

1954

SOBRE LOS IDEALES ABIERTOS EN ANILLOS DE ZARISKI*

Emilio Lluis Riera

En esta nota, llamaremos anillo de Zariski a un $\mathfrak{m}$-anillo $\mathfrak{o}$ tal que $\mathfrak{m}$ esté contenido en la intersección de todos los ideales máximos de $\mathfrak{o}$,[1]. Designaremos con $\hat{\mathfrak{o}}$ la completación del anillo de Zariski $\mathfrak{o}$ y con $\hat{\mathfrak{m}}$ el ideal $\hat{\mathfrak{o}}\mathfrak{m}$ de $\hat{\mathfrak{o}}$. Como de costumbre, si $\mathfrak{a}$ es un ideal de $\mathfrak{o}$, llamaremos extensión de $\mathfrak{a}$ al ideal $\hat{\mathfrak{o}}\mathfrak{a}$ de $\hat{\mathfrak{o}}$.

Recordamos que un ideal $\mathfrak{a}$ del anillo de Zariski $\mathfrak{o}$ es abierto si y sólo si $\mathfrak{a}$ contiene una potencia del ideal $\mathfrak{m}$.

El objeto de esta nota es de demostrar la siguiente propiedad:

TEOREMA. *Si $\mathfrak{o}$ es un anillo de Zariski y $\hat{\mathfrak{o}}$ su completación, entonces la extensión induce una correspondencia biunívoca entre el conjunto de todos los ideales abiertos de $\mathfrak{o}$ y el conjunto de todos los ideales abiertos de $\hat{\mathfrak{o}}$.*

En primer lugar, la extensión de un ideal abierto de $\mathfrak{o}$ es un ideal abier

* Recibido el 25 de febrero de 1954.

[1] En una nota anterior (Bol.Soc.Mat.Mexicana, Vol. 10, Nos. 3,4 (1953)) a estos anillos los llamamos "semilocales generalizados".

to de $\hat{\mathfrak{o}}$. En efecto, si $\mathfrak{a}$ es abierto, $\mathfrak{a} \supset \mathfrak{m}^n$ de donde $\mathfrak{a}\hat{\mathfrak{o}} \supset \mathfrak{m}^n\hat{\mathfrak{o}} = \hat{\mathfrak{m}}^n$, es decir, $\mathfrak{a}\hat{\mathfrak{o}}$ es abierto.

La fórmula $\mathfrak{a}\hat{\mathfrak{o}} \cap \mathfrak{o} = \mathfrak{a}$ implica que la correspondencia inducida por la extensión es una correspondencia biunívoca entre el conjunto de todos los ideales abiertos de $\mathfrak{o}$ y sus imágenes en $\hat{\mathfrak{o}}$ que como indicamos arriba son también ideales abiertos.

Entonces falta solamente demostrar que esta correspondencia es s o b r e. Evidentemente si $\hat{\mathfrak{a}}$ es un ideal abierto de $\hat{\mathfrak{o}}$, su contracción $\hat{\mathfrak{a}} \cap \mathfrak{o}$ es un ideal abierto de $\mathfrak{o}$, ya que si $\hat{\mathfrak{a}} \supset \hat{\mathfrak{m}}^n$, $\hat{\mathfrak{a}} \cap \mathfrak{o} \supset \hat{\mathfrak{m}}^n \cap \mathfrak{o} = \mathfrak{m}^n$. Demostraremos que la extensión de este ideal $\hat{\mathfrak{a}} \cap \mathfrak{o}$ es precisamente $\hat{\mathfrak{a}}$, es decir, que $(\hat{\mathfrak{a}} \cap \mathfrak{o})\hat{\mathfrak{o}} = \hat{\mathfrak{a}}$. Para ello bastará demostrar que $(\hat{\mathfrak{a}} \cap \mathfrak{o})\hat{\mathfrak{o}} \supset \hat{\mathfrak{a}}$. Supongamos que $\hat{\mathfrak{a}} \supset \hat{\mathfrak{m}}^n$ y por lo tanto que $\hat{\mathfrak{a}} \cap \mathfrak{o} \supset \mathfrak{m}^n$. Sea $\hat{a}$ un elemento de $\hat{\mathfrak{a}}$. Entonces existe $a \in \mathfrak{o}$ tal que $a \equiv \hat{a}(\mathfrak{m}^n)$, de donde $\hat{a} - a \in \hat{\mathfrak{m}} \subset \hat{\mathfrak{a}}$ y por lo tanto $a \in \hat{\mathfrak{a}}$, es decir, $a \in \hat{\mathfrak{a}} \cap \mathfrak{o}$. Por otro lado, $\hat{a} - a \in \mathfrak{m}^n \mathfrak{o} \subset (\hat{\mathfrak{a}} \cap \mathfrak{o})\hat{\mathfrak{o}}$. Las dos relaciones obtenidas demuestran que $\hat{a} \in (\hat{\mathfrak{a}} \cap \mathfrak{o})\hat{\mathfrak{o}}$, con lo que queda demostrado el teorema.

INSTITUTO DE MATEMATICAS DE LA
UNIVERSIDAD NACIONAL DE MEXICO

INSTITUTO NACIONAL DE LA
INVESTIGACION CIENTIFICA