Vol. XI
Nos. 1 a 4

BOLETIN
de la
SOCIEDAD MATEMATICA MEXICANA

1954

LOS PRODUCTOS-i DE COCADENAS EN LA TEORIA SINGULAR CUBICA

R. Vázquez García

§1. INTRODUCCION.

Serre [2, p.441] definió un producto-0 (cup product) de cocadenas en la teoría singular cúbica. Recientemente MacLane [1, §5] demostró que la definición anterior concuerda con la del producto-0 de Cech-Alexander en la teoría singular simplicial. En este artículo se obtienen fórmulas explícitas para los productos-i (cup-i products) de cocadenas, módulo 2, en la teoría singular cúbica y se demuestra que los cuadrados, que estos productos-i definen en los grupos de cohomología, satisfacen las condiciones que impone Serre [3, p.222] para caracterizar a los cuadrados de Steenrod.

§2. PRELIMINARES.

Sea I el intervalo cerrado $[0,1]$, $I^n (n \geqslant 1)$ el producto topológico de n factores iguales a I. Designemos con $\overline{I}$ al complejo que se obtiene descomponiendo celularmente al intervalo $[0,1]$ del modo usual, esto es, $\overline{I}$ tiene una 1-célula, los dos vértices 0 y 1, y su orientación es tal que $dI = 1-0$, donde d es el operador frontera. Sea $\overline{I}^n$ el complejo producto de n factores iguales a $\overline{I}$. Una célula ζ de $\overline{I}^n$ es un producto topológico $\sigma_1 \times \sigma_2 \times \ldots \times \sigma_n$ donde σ_i es una célula de $\overline{I}$. Por definición

$$(2.1) \qquad d\zeta = \sum_{i=1}^{n} (-)^{\dim \sigma_1 + \dots + \dim \sigma_{i-1}} \sigma_1 \times \sigma_2 \times \dots \times \sigma_{i-1} \times d\sigma_i \times \sigma_{i+1} \times \dots \times \sigma_n$$

En este artículo usaremos de un modo sistemático la notación siguiente:

Las letras H, K, L, M denotarán conjuntos finitos de números enteros positivos; $\nu(H)$ será el número cardinal de H. Sea CH el complemento de H respecto al conjunto de los enteros positivos; φ_H representará a la función estrictamente creciente de CH sobre $H \cup CH$. Usaremos las letras $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ para designar funciones definidas en alguno de los conjuntos H, K, L, M y con valores en el conjunto $\{0,1\}$; ε será siempre un elemento de este último conjunto.

Toda célula $\zeta = \sigma_1 \times \dots \times \sigma_n$ de $\overline{I}^n$ determina biunívocamente al par (H,α) definido así: $i \in H$ si y solo si $\dim \sigma_i = 0$; $\alpha(i) = \sigma_i$ para $i \in H$. A(H,α) le llamaremos *el par* de ζ.

Sea K arbitrario y β definida en K. Si $C(\overline{I}^n)$ es el grupo de cocadenas enteras de $\overline{I}^n$ definimos un homomorfismo

$$(2.2) \qquad \lambda_K^\beta : C(\overline{I}^n) \to C(\overline{I}^n)$$

de este modo:

Sea ζ una célula de $\overline{I}^n$ y (H,α) su par, entonces

(a) Si $\varphi_H^{-1}(K) \subset \{1,\dots,n\}$ es $\lambda_K^\beta \zeta$ la célula de $\overline{I}^n$

cuyo par (L,γ) es tal que

$$L = H \cup \varphi_H^{-1}(K) \;;\quad \gamma(i) = \begin{cases} \alpha(i) & \text{si } i \in H \\ \beta\varphi_H(i) & \text{si } i \in \varphi_H^{-1}(K) \end{cases}$$

(b) Si $\varphi_H^{-1}(K) \not\subset \{1,\dots,n\}$ definimos $\lambda_K^{\beta}\zeta = 0$.

Son consecuencias inmediatas de esta definición:

(2.21) $$\zeta = \lambda_H^{\alpha}\, I^n \quad \text{si} \quad (H,\alpha) \text{ es el par de } \zeta.$$

(2.22) $$\lambda_L^{\gamma}\lambda_K^{\beta} = \lambda_M^{\delta}$$

donde

$$M = K \cup \varphi_K^{-1}(L) \; ; \qquad \delta(i) = \begin{cases} \beta(i) & \text{si} \quad i \in K \\ \gamma\varphi_K(i) & \text{si} \quad i \in \varphi_K^{-1}(L) \; . \end{cases}$$

Cuando α es constante y de valor ε se escribirá λ_H^{ε} en lugar de λ_H^{α}; si H contiene un solo elemento i se escribirá λ_i^{ε} en lugar de $\lambda_{\{i\}}^{\varepsilon}$.

Sea $\zeta = \sigma_1 \times \dots \times \sigma_n$ de par (H,α) y de dimensión q. Entonces por (2.1):

$$d\zeta = \sum_{i \notin H} (-)^{\dim\sigma_1 + \dots + \dim\sigma_{i-1}} [\sigma_1 \times \dots \times \sigma_{i-1} \times 1 \times \sigma_{i+1} \times \dots \times \sigma_n - \sigma_1 \times \dots \times \sigma_{i-1} \times 0 \times \sigma_{i+1} \times \dots \times \sigma_n]$$

$$= \sum_{i \notin H} (-)^{\varphi_H(i)} [\lambda^0_{\varphi_H(i)}\zeta - \lambda^1_{\varphi_H(i)}\zeta] \; .$$

Por consiguiente

(2.3) $$d\zeta = \sum_{i=1}^{q} (-)^i [\lambda_i^0 \zeta - \lambda_i^1 \zeta] \; .$$

Sea $1 \leq m \leq n$, $M \subset \{1,\dots,n\}$ tal que $\nu(M) = n\text{-}m$ y sea γ definida en M. Definimos un homomorfismo

(2.4) $$\Lambda_M^{\gamma} : C(\overline{I}^m) \to C(\overline{I}^n)$$

tal que.

(2.41) $$\Lambda^{\gamma}_{M}(\lambda^{\alpha}_{H}\, I^{m}) = \lambda^{\alpha}_{H}\lambda^{\gamma}_{M} I^{n}$$

Proposición 2.42: Λ^{γ}_{M} *sumerge* $C(\overline{I}^{m})$ *en* $C(\overline{I}^{n})$.

Demostración: Por (2.22) $\lambda^{\alpha}_{H}\lambda^{\gamma}_{M} I^{n} = \lambda^{\beta}_{K}\lambda^{\gamma}_{M} I^{n}$ implica $\lambda^{\alpha}_{H} I^{m} = \lambda^{\beta}_{K} I^{m}$ por lo tanto el núcleo de Λ^{γ}_{M} es cero. Además

$$\Lambda^{\gamma}_{M}(\lambda^{\varepsilon}_{i}\lambda^{\alpha}_{H}\, I^{m}) = \lambda^{\varepsilon}_{i}\lambda^{\alpha}_{H}\lambda^{\gamma}_{M} I^{n} = \lambda^{\varepsilon}_{i}\Lambda^{\gamma}_{M}(\lambda^{\alpha}_{H}\, I^{m})$$

Por consiguiente $\Lambda^{\gamma}_{M}\, d = d\, \Lambda^{\gamma}_{M}$.

Proposición 2.43: *Sea* $C(\overline{I}^{m}) \xrightarrow{\Lambda^{\gamma}_{M}} C(\overline{I}^{n}) \xrightarrow{\Lambda^{\beta}_{L}} C(\overline{I}^{p})$. *Entonces* $\Lambda^{\beta}_{L}\Lambda^{\gamma}_{M} = \Lambda^{\delta}_{K}$ *donde el par* (K,δ) *está determinado por la condición* $\lambda^{\gamma}_{M}\lambda^{\beta}_{L} = \lambda^{\delta}_{K}$.

La demostración de (2.43) es trivial.

El homomorfismo Λ^{γ}_{M} induce una inmersión

(2.44) $$\Lambda^{\gamma}_{M}\times\Lambda^{\gamma}_{M} : C(\overline{I}^{m}\times\overline{I}^{m}) \to C(\overline{I}^{n}\times\overline{I}^{n})$$

definida del modo siguiente:

(2.45) $$(\Lambda^{\gamma}_{M}\times\Lambda^{\gamma}_{M})(\sigma_1\times\sigma_2) = (\Lambda^{\gamma}_{M}\sigma_1)\times(\Lambda^{\gamma}_{M}\sigma_2)\quad ,\quad \sigma_1,\sigma_2 \in \overline{I}^{m}\quad .$$

Estudiaremos ahora, en el caso particular de los complejos $\overline{I}^{n}$, a las operaciones D_i de grado i (i entero no negativo) definidas en [4]. Previamente recordemos algunas definiciones.

Si ζ es una célula de $\overline{I}^{n}$ sea $\overline{\zeta}$ el subcomplejo de $\overline{I}^{n}$ cuyas células - son las caras de ζ. Sea $C : \overline{I}^{n} \to \overline{I}^{n}\times\overline{I}^{n}$ el portador diagonal: $C(\zeta) = \overline{\zeta}\times\overline{\zeta}$.

$$e, T : \overline{I}^{n}\times\overline{I}^{n} \to \overline{I}^{n}\times\overline{I}^{n}$$

son las transformaciones de cadena* definidas así: e = identidad;

*Traducimos así el término "chain mapping".

$T(\zeta_1 \times \zeta_2) = (-)^{p_1 p_2} \zeta_1 \times \zeta_2$ donde $\zeta_i \in \overline{I}^n$ y $p_i = \dim \zeta_i$.

Definición: Una operación de grado i de $\overline{I}^n \times \overline{I}^n$ es un homomorfismo

$$D_i : C(\overline{I}^n) \to C(\overline{I}^n \times \overline{I}^n)$$

tal que $D_i\, C_q(\overline{I}^n) \subset C_{q+i}(\overline{I}^n \times \overline{I}^n)$.

Definición 2.5: A una sucesión $\{D_i\}$, $i = 0,1,2,\ldots,$ de operaciones de $\overline{I}^n$ en $\overline{I}^n \times \overline{I}^n$ llamaremos aquí ***sucesión-S en*** $\overline{I}^n$ si:

(a) D_i tiene el portador C.

(b) D_o es una transformación de cadena.

(c) $dD_i + (-)^{i+1} D_i d = (T + (-)^i e)\, D_{i-1}$, $i \geq 1$.

Nota: En [4] se demuestra la existencia de sucesiones-S en circunstancias mucho más generales que las consideradas aquí.

Se deduce inmediatamente que los términos no nulos de toda sucesión-S en $\overline{I}$ son de la siguiente forma:

(2.51) $$D_o \varepsilon = \varepsilon \times \varepsilon \quad ;$$

$$D_o I = a(0 \times I + I \times 1) + (1-a)\, T(0 \times I + I \times 1) \quad ;$$

$$D_1 I = (2a-1)\, I \times I \quad ;$$

donde a es un entero cualquiera.

Definición 2.52: Llamaremos ***sucesión princial en*** $\overline{I}$ a la sucesión-S correspondiente al valor 1 de a, esto es, aquella en la cual

$$D_o I = 0 \times I + I \times 1 \ ; \qquad D_1 I = I \times I \quad .$$

Sean m y n dos enteros positivos. Definimos

(2.53) $$\mu : (\overline{I}^m)^2 \times (\overline{I}^n)^2 \to (\overline{I}^m \times \overline{I}^n)^2$$

tal que

$$\mu[(\sigma_1 \times \sigma_2) \times (\tau_1 \times \tau_2)] = (-)^{p_2 q_1} (\sigma_1 \times \tau_1) \times (\sigma_2 \times \tau_2)$$

donde $\sigma_1, \sigma_2 \in \overline{T}^m$, $\tau_1, \tau_2 \in \overline{T}^n$; $p_2 = \dim \sigma_2$, $q_1 = \dim \tau_1$.

Se prueba fácil mente que μ es una transformación de cadena.

La proposición que sigue es un caso particular de un resultado bien conocido.

Proposición 2.54: *Si* $\{D_i'\}$, $\{D_i''\}$ *son dos sucesiones*-S *en* $\overline{T}^m, \overline{T}^n$ ***respectivamente entonces es*** $\{D_i\}$ *una sucesión*-S *en* $\overline{T}^{m+n}$ *si*

$$D_i\ (\sigma \times \tau) = \mu \sum_{j=0}^{i} (-)^{p(i+j)}\ D_j' \sigma \times T^j D_{i-j}'' \tau\ , \tag{2.55}$$

donde $\sigma \in \overline{T}^m$, $\tau \in \overline{T}^n$, $p = \dim \sigma$.

(2.56) Tenemos ahora las siguientes definiciones:

La sucesión $\{D_i\}$ en $\overline{T}^{m+n}$ dada por (2.55) se llamará producto de las sucesiones $\{D_i'\}$, $\{D_i''\}$ en $\overline{T}^m, \overline{T}^n$ respectivamente.

Una familia-S es una colección de sucesiones-S donde existe para cada n una y solo una sucesión-S en $\overline{T}^n$.

Una familia admisible es una familia-S donde la sucesión en $\overline{T}^{m+n}$ es el producto de las sucesiones en $\overline{T}^m$, $\overline{T}^n$ respectivamente. En este caso se dirá que la sucesión-S en $\overline{T}$ genera a la familia admisible.

La familia principal es la familia admisible generada por la sucesión principal (2.52) en $\overline{T}$.

Demostraremos ahora la existencia de familias admisibles y de la familia principal.

Teorema 2.57: ***Toda sucesión*-S *en* $\overline{T}$ *genera a una familia admisible.***

Demostración: Sea $\{D_i\}$ una sucesión-S arbitraria en $\overline{T}$. Obtenemos una familia-S definiendo inductivamente:

Si $n > 1$ la sucesión-S en $\overline{T}^n$ es el producto de la sucesión en $\overline{T}^{n-1}$ por la sucesión en $\overline{T}$.

Demostraremos por inducción que esta familia es admisible; la inducción se hará respecto a la dimensión de los complejos $\overline{T}^n$. Si $n = 2$ la sucesión en $\overline{T}^n$ es el producto de la sucesión en $\overline{T}$ por sí misma por definición. Supongamos ahora que para $2 < n < p + q$, donde p y q son enteros positivos, la sucesión en $\overline{T}^n$ es el producto de las sucesiones en $\overline{T}^k$, $\overline{T}^m$ donde $k + m = n$. Consideremos $\overline{T}^{p+q}$, $q > 1$. Sean

$$\mu : (\overline{T}^{p+q-1})^2 \times \overline{T}^2 \to (\overline{T}^{p+q})^2$$

$$\mu_1 : (\overline{T}^{p})^2 \times (\overline{T}^{q-1})^2 \to (\overline{T}^{p+q-1})^2$$

$$\mu_2 : (\overline{T}^{q-1})^2 \times \overline{T}^2 \to (\overline{T}^{q})^2$$

$$\mu_3 : (\overline{T}^{p})^2 \times (\overline{T}^{q})^2 \to (\overline{T}^{p+q})^2$$

las transformaciones de cadena definidas en (2.53). Sea $\zeta \in \overline{T}^{p+q}$ entonces $\zeta = \tau_1 \times \tau_2$ donde $\tau_1 \in \overline{T}^{p+q-1}$, $\tau_2 \in \overline{T}$. Por definición

$$\begin{aligned} D_i \zeta &= \mu \sum_{j=0}^{i} (-)^{(i+j)\dim \tau_1} D_j \tau_1 \times T^j D_{i-j} \tau_2 \\ &= \mu \left[D_i \tau_1 \times T^i D_o \tau_2 + (-)^{\dim \tau_1} D_{i-1} \tau_1 \times T^{i-1} D_1 \tau_2 \right] . \end{aligned}$$

Pero $\tau_1 = \sigma_1 \times \sigma_2$ donde $\sigma_1 \in \overline{T}^p$, $\sigma_2 \in \overline{T}^{q-1}$, entonces por la hipótesis de la inducción tenemos:

$$D_i \tau_1 = \mu_1 \sum_{j=0}^{i} (-)^{(i+j)\dim \sigma_1} D_j \sigma_1 \times T^j D_{i-j} \sigma_2 \ .$$

Por consiguiente

$$\mu(D_i\tau_1 \times T^iD_o\tau_2) = \mu \sum_{j=0}^{i} (-)^{(i+j)\dim \sigma_1} [\mu_1(D_j \sigma_1 \times T^j D_{i-j} \sigma_2)] \times T^i D_o \tau_2$$

$$= \mu_3 \sum_{j=0}^{i} (-)^{(i+j)\dim \sigma_1} D_j \sigma_1 \times \mu_2 (T^j D_{i-j} \sigma_2 \times T^i D_o \tau_2)$$

$$= \mu_3 \sum_{j=0}^{i} (-)^{(i+)\dim \sigma_1} D_j \sigma_1 \times T^j \mu_2(D_{i-j} \sigma_2 \times T^{i-j} D_o \tau_2)$$

Análogamente:

$$D_{i-1}\tau_1 = \mu_1 \sum_{j=0}^{i-1} (-)^{(i+j-1)\dim \sigma_1} D_j \sigma_1 \times T^j D_{i-j-1} \sigma_2 ,$$

$$\mu(D_{i-1} \tau_1 \times T^{i-1} D_1 \tau_2) = \mu \sum_{j=0}^{i-1} (-)^{(i+j-1)\dim \sigma_1} [\mu_1(D_j\sigma_1 \times T^j D_{i-j-1}\sigma_2] \times T^{i-1}D_1\tau_2$$

$$= \mu_3 \sum_{j=0}^{i} (-)^{(i+j-1)\dim \sigma_1} D_j \sigma_1 \times T^j \mu_2 (D_{i-j-1} \sigma_2 \times T^{i-j-1} D_1\tau_2)$$

Por lo tanto

$$D_i\zeta = \mu_3 \sum_{j=0}^{i} (-)^{(i+j)\dim \sigma_1} D_j \sigma_1 \times T^j \mu_2 [D_{i-j} \sigma_2 \times T^{i-j} D_o \tau_2 +$$

$$+ (-)^{\dim \sigma_1 + \dim \tau_1} D_{i-j-1} \sigma_2 \times T^{i-j-1} D_1 \tau_2]$$

$$= \mu_3 \sum_{j=0}^{i} (-)^{(i+j)\dim \sigma_1} D_j \sigma_1 \times T^j D_{i-j} (\sigma_2 \times \tau_2) ,$$

lo que significa que la sucesión en Γ^{p+q} es el producto de las sucesiones en - Γ^p e Γ^q. Así pues el teorema está demostrado.

Podemos caracterizar a las familias admisibles del siguiente modo:

Teorema 2.58: ***Una condición necesaria y suficiente para que una familia-S sea admisible es la conmutatividad de los diagramas***

$$\begin{array}{ccc} C(\overline{I}^m) & \xrightarrow{\Lambda^\gamma_M} & C(\overline{I}^n) \\ D_i \downarrow & & \downarrow D_i \\ C(\overline{I}^m \times \overline{I}^m) & \xrightarrow{\Lambda^\gamma_M \times \Lambda^\gamma_M} & C(\overline{I}^n \times \overline{I}^n) \end{array} .$$

Demostración:

(1º) La condición es necesaria.

Debido a 2.43 basta demostrar $D_i(\lambda^\gamma_M I^n) = (\Lambda^\gamma_M \times \Lambda^\gamma_M) D_i I^m$ lo que haremos por inducción respecto a n. Si $n = 2$ se comprueba sin dificultad la validez de la proposición; supongamos pues $n > 2$. Sean p y q enteros positivos tales que $p + q = n$; pongamos

$$H = M \cap \{1,\dots,p\}, \qquad K = M \cap \{p+1,\dots,n\}, \qquad L = \psi(K)$$

donde $\psi : \{p+1,\dots,n\} \to \{1,\dots,q\}$ es estrictamente creciente.

Definimos α y β en H y L respectivamente de este modo:

$$\alpha(i) = \gamma(i) \quad \text{para} \quad i \in H; \qquad \beta\psi(j) = \gamma(j) \quad \text{para} \quad j \in K .$$

Se tiene:
$$\lambda^\gamma_M I^n = \lambda^\alpha_H I^p \times \lambda^\beta_L I^p .$$

Si $\nu(M) < n-1$ se puede suponer $\nu(H) \leq p-1$, $\nu(L) \leq q-1$. Ahora por (2.55) y utilizando la hipótesis de la inducción

$$D_i \lambda^\gamma_M I^n = \mu \sum_{j=0}^{i} (-)^{(p-\nu(H))(i+j)} D_j \lambda^\alpha_H I^p \times T^j D_{i-j} \lambda^\beta_L I^q$$

$$= \mu \sum_{j=0}^{i} (-)^{(p-\nu(H))(i+j)} (\Lambda^\alpha_H \times \Lambda^\alpha_H) D_j I^{p-\nu(H)} \times (\Lambda^\beta_L \times \Lambda^\beta_L) T^j D_{i-j} I^{q-\nu(L)}$$

$$= (\Lambda^\gamma_K \times \Lambda^\gamma_K)(\Lambda^\alpha_H \times \Lambda^\alpha_H) \mu' \sum_{j=0}^{i} (-)^{(p-\nu(H))(i+j)} D_j I^{p-\nu(H)} \times T^j D_{i-j} I^{q-\nu(L)}$$

$$= (\Lambda^\gamma_M \times \Lambda^\gamma_M) D_i I^m .$$

Si $\nu(M) = n-1$ entonces una de las dos células $\lambda^{\alpha}_{H}\, I^{p}, \lambda^{\beta}_{L}\, I^{q}$ es cero dimensional. Si $\lambda^{\alpha}_{H}\, I^{p}$, lo es

$$D_i\, \lambda^{\gamma}_{M}\, I^{n} = \mu(D_o\, \lambda^{\alpha}_{H}\, I^{p} \times D_i\, \lambda^{\beta}_{L}\, I^{q})$$

$$= (\Lambda^{\gamma}_{K} \times \Lambda^{\gamma}_{K})\ \mu'\ (D_o\, \lambda^{\alpha}_{H}\, I^{p} \times D_i\, I^{q-\nu(L)})$$

$$= (\Lambda^{\gamma}_{K} \times \Lambda^{\gamma}_{K})\, D_i\, \lambda^{\alpha}_{H}\, I^{p+q-\nu(L)} = (\Lambda^{\gamma}_{K} \times \Lambda^{\gamma}_{K})(\Lambda^{\alpha}_{H} \times \Lambda^{\alpha}_{H})\, D_i\, I^{m}$$

$$= (\Lambda^{\gamma}_{M} \times \Lambda^{\gamma}_{M})\, D_i\, I^{m}\,.$$

Si $\lambda^{\beta}_{L}\, I^{q}$ es la de dimensión cero, el razonamiento es análogo.

(2º) La condición es suficiente.

Sea $\zeta \in \overline{I}^{n}$, $\zeta = \tau_1 \times \tau_2$ donde $\tau_1 \in \overline{I}^{n-1}$, $\tau_2 \in \overline{I}$. Basta demostrar

$$D_i\, \zeta = \mu \sum_{j=0}^{i} (-)^{(i+j)\dim \tau_1}\, D_j\, \tau_1 \times T^{j}\, D_{i-j}\, \tau_2 \quad .$$

Podemos considerar dos casos de acuerdo con la dimensión de τ_2:

(a) $\tau_2 = I$.

Sea $\tau_1 = \lambda^{\gamma}_{M}\, I^{n-1}$ entonces $\zeta = \lambda^{\gamma}_{M}\, I^{n}$. Por hipótesis $D_i \zeta = (\Lambda^{\gamma}_{M} \times \Lambda^{\gamma}_{M})\, D_i\, I^{n-\nu(M)}$. Ahora

$$\mu \sum_{j=0}^{i} (-)^{(i+j)\dim \tau_1}\, D_j\, \tau_1 \times T^{j}\, D_{i-j}\, \tau_2 = \mu\, [D_i\, \tau_1 \times T^{i}\, D_o I + (-)^{\dim \tau_1}$$

$$D_{i-1}\tau_1 \times T^{i-1}\, D_1\, I] = \mu\, [(\Lambda^{\gamma}_{M} \times \Lambda^{\gamma}_{M})\, D_i\, I^{n-1-\nu(M)} \times T^{i}\, D_o I +$$

$$(-)^{\dim \tau_1}\, (\Lambda_{M} \times \Lambda_{M})\, D_{i-1}\, I^{n-1-\nu(M)} \times T^{i-1}\, D_1 I] =$$

$$= (\Lambda^\gamma_M \times \Lambda^\gamma_M)\ \mu'\ [D_i\ I^{n-1-\nu(M)} \times T^i\ D_o\ I + (-)^{dim\ \tau_1}\ D_{i-1}\ I^{n-1-\nu(M)} \times T^{i-1} D_1 I]$$

$$= (\Lambda^\gamma_M \times \Lambda^\gamma_M)\ D_i\ I^{n-\nu(M)} = D_i\ \zeta \quad .$$

(b) $\tau_2 = \varepsilon$

Sea $\tau_1 = \lambda^\gamma_M\ I^{n-1}$ entonces $\zeta = \lambda^\gamma_M\ \lambda^\varepsilon_n\ I^n$. Empleando 2.43 puede expresarse la hipótesis así:

$$D_i \zeta = (\Lambda^\varepsilon_n \times \Lambda^\varepsilon_n)(\Lambda^\gamma_M \times \Lambda^\gamma_M)\ D_i\ I^{n-\nu(M)-1} \quad .$$

Ahora

$$\mu \sum_{j=0}^{i} (-)^{(i+j) dim\ \tau_1}\ D_j\ \tau_1 \times T^i\ D_{i-j}\ \tau_2 = \mu(D_i\ \tau_1 \times T^i\ D_o\ \varepsilon)$$

$$= (\Lambda^\gamma_M \times \Lambda^\gamma_M)\ \mu'\ [\ D_i\ I^{n-1-\nu(M)} \times T^i\ D_o\ \varepsilon] = (\Lambda^\gamma_M \times \Lambda^\gamma_M)\ D_i\ \lambda^\varepsilon_{n-\nu(M)}\ I^{n-\nu(M)}$$

$$= (\Lambda^\gamma_M \times \Lambda^\gamma_M)(\Lambda^\varepsilon_{n-\nu(M)} \times \Lambda^\varepsilon_{n-\nu(M)})\ D_i\ I^{n-1-\nu(M)}$$

$$= (\Lambda^\varepsilon_n \times \Lambda^\varepsilon_n)(\Lambda^\gamma_M \times \Lambda^\gamma_M)\ D_i\ I^{n-1-\nu(M)} = D_i\ \zeta \quad .$$

La proposición siguiente es una consecuencia inmediata de (2.55):

Proposición 2.59: ***Sea*** $\{D_i\}$ ***una familia admisible entonces lo es la familia*** $\{TD_i\}$.

2.6 La última parte de este § comprende dos asuntos. El primero de ellos es la comparación entre las operaciones de una familia admisible arbitraria y las del mismo grado de la familia principal; el segundo es la descripción de las expresiones para $D_i\ I^n$ en una familia admisible y especialmente en la familia principal.

Las dos afirmaciones siguientes se demuestran por inducción; en estas demostraciones no hay dificultades esenciales y por ese motivo solo se bosquejarán.

Teorema 2.61: *Si* $\{D_i'\}$ ***es una familia arbitraria admisible y*** $\{D_i\}$ ***es la familia principal entonces***

o $D_i' = D_i$ *mod.2 para toda* i o $D_i' = T\,D_i$ *mod.2 para toda* i.

Demostración: En $\overline{T}$ las operaciones D_i' son de la forma (2.51); si a es impar $D_i' = D_i$ mod.2, si a es par $D_i' = TD_i$ mod.2. Ahora por inducción y usando (2.55), en $\overline{T}^n$ se obtiene en el primer caso $D_i' = D_i$ mod.2 y en el segundo $D_i' = T\,D_i$ mod.2.

Teorema 2.62: ***Si*** $\{D_i\}$ ***es una familia admisible entonces***

$$D_i\, I^n = \sum_{(H,K)} \rho_{HK}\ \lambda_K^{\beta}\, I^n \times \lambda_H^{a}\, I^n \quad (i \leqslant n) \tag{2.63}$$

donde H ***y*** K ***son subconjuntos de*** $\{1,\ldots,n\}$ ***y:***

(a) ρ_{HK} ***es un número entero.***

(b) $H \cap K = 0$.

(c) $\nu(H \cup K) = n-i$.

Si $\{D_i\}$ ***es la familia principal se tiene además:***

(d) $|\rho_{HK}| = 1$

(e) ***La suma*** (2.63) ***contiene uno y solo un término para cada par ordenado*** (H,K) ***que satisfaga*** (b) ***y*** (c).

(f) ***Sea*** $j = r-\nu[(H \cup K) \cap \{1,\ldots,r\}]$, $\eta(j) = 0$ ***si*** j ***es par,*** $\eta(j) = 1$ ***si*** j ***es impar.***

Si $r \in K$, $\beta(r) = \eta(j)$; ***si*** $r \in H$, $\alpha(r) = 1-\eta(j)$.

Demostración: Se comprueba inmediatamente la validez de (b) a (f) para $n = 1$. Para $n > 1$ pongamos $I^n = I^{n-1} \times I$ y apliquemos (2.55); por inducción se demuestran (b), (c), (d), (e), y si la familia es la principal se deduce:

Para i par: si $n \in K$, $\beta(n) = 0$; si $n \in H$, $\alpha(n) = 1$.

Para i impar: si $n \in K$, $\beta(n) = 1$; si $n \in H$, $\alpha(n) = 0$.

Consideremos ahora un término arbitrario $\lambda_K^{\beta}\, I^n \times \lambda_H^{a}\, I^n$ en (2.63). Sea

$1 \leq r \leq n$, $L = H \cap \{1,\dots,r\}$, $M = K \cap \{1,\dots,r\}$, γ y δ restricciones de α y β en L y M respectivamente. Entonces $\lambda^{\delta}_{M} \overline{I^r} \times \lambda^{\gamma}_{L} I^r$ es un término de $D_i\, I^r$ donde $i = r - \nu(L \cup M)$, así pues (f) vale.

§3. LOS PRODUCTOS-i.

3.1 Sea X un espacio topológico. Un cubo singular n-dimensional de X es una función continua $u : I^n \to X$. Un cubo u de dimensión $n > 0$ es degenerado si $u(t_1,\dots,t_n) = u(t_1,\dots,t_{n-1},t'_n)$ cualesquiera que sean los valores de $t_1,\dots,t_{n-1}, t_n, t'_n$. Sea $Q_n(X)$ el grupo abeliano libre generado por los n-cubos de X, $D_n(X)$ el subgrupo de $Q_n(X)$ generado por los n-cubos degenerados; se definen $Q(X)$ y $D(X)$ como las sumas directas de los grupos $Q_n(X)$ y $D_n(X)$ respectivamente.

Para K arbitrario y β definida en K definimos un homomorfismo

$$\lambda^{\beta}_{K} : Q(X) \to Q(X) \tag{3.11}$$

de este modo:

Sea u un n-cubo de X, entonces

(a) Si $K \subset \{1,\dots,n\}$, $\lambda^{\beta}_{K} u$ es el cubo de dimensión $m = n - \nu(K)$ tal que

$$\lambda^{\beta}_{K} u(t_1,\dots,t_m) = u(y_1,\dots,y_n) \ , \qquad \text{donde} \quad y_i = \begin{cases} \beta(i) & \text{si} \quad i \in K \\ t_{\varphi_K(i)} & \text{si} \quad i \notin K \end{cases}$$

(b) Si $K \not\subset \{1,\dots,n\}$ definimos $\lambda^{\beta}_{K} u = 0$.

Esta definición es análoga a (2.2) y tiene la misma propiedad formal, a saber:

$$\lambda^{\gamma}_{L} \lambda^{\beta}_{K} = \lambda^{\delta}_{M} \tag{3.12}$$

$$\text{donde} \quad M = K \cup \varphi^{-1}_{M}(L) \ ; \qquad \delta(i) = \begin{cases} \beta(i) & \text{si} \quad i \in K \\ \gamma\varphi_K(i) & \text{si} \quad i \in \varphi^{-1}_{K}(L). \end{cases}$$

Haremos también las mismas convenciones de notación, esto es, se escribirá $\lambda^{\varepsilon}_{H}$ en lugar de λ^{α}_{H} cuando α es constante y $\lambda^{\varepsilon}_{i}$ en lugar de $\lambda^{\varepsilon}_{\{i\}}$. Al cubo $\lambda^{\beta}_{K}u$ le llamaremos *cara de* u.

3.13 El operador frontera

$$d : Q(X) \to Q(X)$$

se define por la condición

$$du = \sum_{i=1}^{n} (-)^{i} (\lambda^{0}_{i} u - \lambda^{1}_{i} u) , \qquad n = \dim u . \tag{3.14}$$

Se deduce fácilmente que (3.12) implica $dd = 0$. El grupo $D(X)$ es un subgrupo estable* del grupo diferencial $Q(X)$ entonces $C(X) = Q(X) \ D(X)$ es un grupo diferencial; es, por definición el grupo de las cadenas cúbicas singulares de X. Se denota con $C_n(X)$ al grupo $Q_n(X) \ D_n(X)$ y se tiene $C(X) = \sum_n C_n(X)$; $C_n(X)$ es el grupo de las n-cadenas y es un grupo libre con una base cuyos elementos están en correspondencia biunívoca con los n-cubos no degenerados de X. Si G es un grupo abeliano $C^n(X;G)$ es el grupo $\mathrm{Hom}(C_n(X),G)$ y se llama el grupo de las n-cocadenas cúbicas de X con valores en G. Si A es un subconjunto de X el grupo $C^n(X,A;G)$ es el subgrupo de $C^n(X;G)$ cuyos elementos se anulan en los cubos de A. El grupo $C^n(X,A;G)$ puede identificarse canónicamente con el subgrupo de $\mathrm{Hom}(Q_n(X),G)$ cuyos elementos se anulan en los cubos de A y en los cubos degenerados de X. Aquí consideraremos solo el caso en el que $G = Z_2$ = grupo de los enteros módulo 2.

3.15 Diremos que un cubo es *regular* si sus caras son diferentes entre sí. Es fácil ver que en X existen cubos regulares de cualquier dimensión si y solo si X posee una arco-componente (componente según arcos) que no es un punto. Si todas las arco-componentes de X son puntos la cohomología de X es trivial; en lo que sigue supondremos que no se da este caso.

3.2 Podemos introducir conceptos análogos a los definidos en §2:

3.21 El grupo $J(X) = Q(X) \otimes Q(X)$ es un grupo diferencial graduado

---

* $D(X)$ contiene a su imagen segun d.

con el operador frontera (que también designaremos con la letra d):

(3.22) $$d(u \otimes v) = du \otimes v + (-)^p u \otimes dv , \qquad p = \dim u$$

y está graduado por los grupos $J_n(X) = \sum_{p+q=n} Q_p(X) \otimes Q_q(X)$.

(3.23) $$T : J(X) \to J(X)$$

es el homomorfismo tal que $T(u \otimes v) = (-)^{pq} v \otimes u$ donde $p = \dim u$, $q = \dim v$. A la identidad en $J(X)$ la denotaremos con e.

3.24 Si u es un cubo de X denotemos con $Q[u]$ al subgrupo de $Q(X)$ generado por todas las caras de u; $Q[u]$ es un subgrupo estable y sumando directo de $Q(X)$. Sea $J[u] = Q[u] \otimes Q[u]$; puede considerarse $J[u]$ como subgrupo estable de $J(X)$.

3.25 Sean s y u dos cubos de X de dimensiones m y n respectivamente y supongamos $1 \leqslant m \leqslant n$. Sea $M \subset \{1,\ldots,n\}$ tal que $\nu(M) = n-m$ y γ definida en M. Si s es regular definimos dos homomorfismos

$$\Lambda^{\gamma}_{M} : Q[s] \to Q[u] \; ; \quad \Lambda^{\gamma}_{M} \otimes \Lambda^{\gamma}_{M} : J[s] \to J[u]$$

por las condiciones

$$\Lambda^{\gamma}_{M}(\lambda^{a}_{H}\, s) = \lambda^{a}_{H}\lambda^{\gamma}_{M}\, u \; ; \quad (\Lambda^{\gamma}_{M} \otimes \Lambda^{\gamma}_{M})(s' \otimes s'') = \Lambda^{\gamma}_{M}\, s' \otimes \Lambda^{\gamma}_{M}\, s'' \; .$$

3.26 Una operación de grado i de $Q(X)$ en $J(X)$ es un homomorfismo

$$D_i : Q(X) \to J(X)$$

que satisface la condición

$$D_i\, Q_n(X) \subset J_{n+i}(X)$$

3.27 Una sucesión-S en X es una sucesión de operaciones $\{D_i\}$

$i = 0,1,2,\ldots$ de $Q(X)$ en $J(X)$ tales que:

(a) $D_i u \in J[u]$

(b) D_o *es una transformación de cadena.*

(c) $dD_i + (-)^{i+1} D_i d = (T + (-)^i e) D_{i-1}$, $i \geq 1$.

(d) Son conmutativos los diagramas (véase 3.25)

$$\begin{array}{ccc} Q[s] & \xrightarrow{\Lambda^\gamma_M} & Q[u] \\ {\scriptstyle D_i}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle D_i} \\ J[s] & \xrightarrow{\Lambda^\gamma_M \otimes \Lambda^\gamma_M} & J[u] \end{array}$$

3.3 En este párrafo obtendremos algunas proposiciones que permitirán demostrar que toda familia admisible determina una sucesión -S en X y recíprocamente.

Para cada n-cubo u de X, $n \geq 1$, definimos un homomorfismo

(3.31) $$u_\# : C(\overline{I}^n) \to Q(X)$$

por la condición

(3.32) $$u_\#(\lambda^\alpha_H I^n) = \lambda^\alpha_H u$$

Proposición 3.33: $u_\#$ *es una transformación de cadena.*

Demostración: Evidentemente $u_\#$ conserva el índice de las cadenas de dimensión cero. El resto de la proposición es consecuencia inmediata de (2.3) y (3.14).

Consideremos los homomorfismos $\Lambda^\gamma_M : C(\overline{I}^m) \to C(\overline{I}^n)$; $u_\# : C(\overline{I}^n) \to Q(X)$; $(\lambda^\gamma_M u)_\# : C(\overline{I}^m) \to Q(X)$ donde $M \subset \{1,\ldots,n\}$, $\nu(M) = n-m$ y γ está definida en M. Se tiene la

Proposición 3.34: $u_\# \Lambda^\gamma_M = (\lambda^\gamma_M u)_\#$

Demostración: Por las definiciones anteriores

$$u_\# \Lambda^\gamma_M (\lambda^\alpha_H I^m) = u_\#(\lambda^\alpha_H \lambda^\gamma_M I^n) = \lambda^\alpha_H \lambda^\gamma_M u = (\lambda^\gamma_M u)_\# (\lambda^\alpha_H I^m) \quad .$$

El homomorfismo $u_\#$ induce una transformación de cadena

$$(3.35) \qquad u_\# \otimes u_\# : C(\overline{I}^n \times \overline{I}^n) \to J(X)$$

definida por la condición

$$(3.36) \qquad (u_\# \otimes u_\#)(\sigma \times \tau) = u_\#(\sigma) \otimes u_\#(\tau) \; ; \qquad \sigma, \tau \in \overline{I}^n \quad .$$

Nota: La imagen de $u_\#$ está contenida en el subgrupo $Q[u]$ de $Q(X)$. Por ese motivo usaremos también el símbolo $u_\#$ para indicar el homomorfismo de $C(\overline{I}^n)$ en $Q[u]$ inducido por (3.31). Para $u_\# \otimes u_\#$ haremos una consideración semejante.

Es inmediata la

Proposición 3.37: *Los siguientes diagramas son conmutativos*

$$\begin{tikzcd}
C(\overline{I}^n \times \overline{I}^n) \arrow[r, "u_\# \otimes u_\#"] \arrow[d, "T"'] & J(X) \arrow[d, "T"] \\
C(\overline{I}^n \times \overline{I}^n) \arrow[r, "u_\# \otimes u_\#"] & J(X)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
C(\overline{I}^m \times I^m) \arrow[r, "s_\# \otimes s_\#"] \arrow[d, "\Lambda^\gamma_M \times \Lambda^\gamma_M"'] & J[s] \arrow[d, "\Lambda^\gamma_M \otimes \Lambda^\gamma_M"'] \\
C(\overline{I}^n \times \overline{I}^n) \arrow[r, "u_\# \otimes u_\#"] & J[u]
\end{tikzcd}$$

Definición* 3.38: Si $\{D_i\}$ es una *familia admisible* definimos una sucesión de operaciones $\{D_i\}$ de $Q(X)$ en $J(X)$ del modo siguiente:

Sea u un n-cubo de X entonces

$$(3.39) \qquad \begin{cases} D_i u = (u_\# \otimes u_\#) D_i I^n & \text{si} \quad n > 0 \\ D_o u = u \otimes u, \quad D_i u = 0 \quad \text{para} \quad i > 0, & \text{si} \quad n = 0. \end{cases}$$

---

*Esta definición es consecuencia de una sugestión del Dr. José Adem.

Teorema 3.4: *La sucesión definida en 3.38 es una sucesión-S en* X.

Demostración: 3.27(a) es una consecuencia inmediata de (3.36) y (2.63). Tomemos un n-cubo u de X. Si $n = 0$ es evidente que se satisfacen las condiciones restantes de 3.27. Si $n > 0$ y M es arbitrario se tiene

$$D_i \lambda^\gamma_M u = (u_\# \otimes u_\#) D_i \lambda^\gamma_M I^n \quad .$$

En efecto: Si $n \geqslant 2$, $M \subset \{1,\dots,n\}$ tal que $\nu(M) < n-1$, apliquemos 3.34 y (2.58); se obtiene

$$D_i \lambda^\gamma_M u = (\lambda^\gamma_M u)_\# \otimes (\lambda^\gamma_M u)_\# \; D_i I^{n-\nu(M)} = (u_\# \otimes u_\#)(\Lambda^\gamma_M \times \Lambda^\gamma_M) D_i I^{n-\nu(M)}$$

$$= (u_\# \otimes u_\#) D_i \lambda^\gamma_M I^n \quad .$$

En los casos restantes se obtiene directamente este resultado.

Así pues para $1 \leqslant i \leqslant n$ es $D_i \lambda^\varepsilon_i u = (u_\# \otimes u_\#) D_i \lambda^\varepsilon_i I^n$. Por consiguiente $D_i du = (u_\# \otimes u_\#) D_i dI^n$. Ahora en 2.5(b) y (c) apliquemos el homomorfismo $u_\# \otimes u_\#$ a ambos miembros de las igualdades correspondientes; por (3.35 y 3.37 resultan 3.27(b) y (c).

Demostremos ahora 3.27(d):

$$D_i \Lambda^\gamma_M (\lambda^a_H s) = D_i (\lambda^a_H \lambda^\gamma_M u) = (u_\# \otimes u_\#) D_i \lambda^a_H \lambda^\gamma_M I^n \quad .$$

Por 3.37:

$$(\Lambda^\gamma_M \otimes \Lambda^\gamma_M) D_i \lambda^a_H s = (\Lambda^\gamma_M \otimes \Lambda^\gamma_M)(s_\# \otimes s_\#) D_i \lambda^a_H I^m$$

$$= (u_\# \otimes u_\#)(\Lambda^\gamma_M \times \Lambda^\gamma_M) D_i \lambda^a_H I^m$$

$$= (u_\# \otimes u_\#) D_i \lambda^a_H \lambda^\gamma_M I^n$$

Por consiguiente $D_i\,\Lambda^{\gamma}_{M}(\lambda^{\alpha}_{H}s) = (\Lambda^{\gamma}_{M} \otimes \Lambda^{\gamma}_{M})\,D_i(\lambda^{\alpha}_{H}s)$, y 3.27(d) está demostrado.

Teorema 3.41: ***Toda sucesión-S en*** X ***se obtiene de una familia admisible por medio de*** (3.39).

Demostración: Sea $\{D_i\}$ una sucesión-S arbitraria en X. Para cada $n \geqslant 1$ elijamos un n-cubo s regular; los homomorfismos $s_{\#}: C(\overline{I}^n) \to Q[s]$ y $s_{\#} \otimes s_{\#}: C(\overline{I}^n \times \overline{I}^n) \to J[s]$ son isomorfismos y por medio de sus inversos trasladamos a $\overline{I}^n$ las operaciones D_i restringidas a $Q[s]$. Se obtiene así en $\overline{I}^n$ una sucesión $\{D_i\}$ de operaciones y 3.27(a), (b) y (c) implican que esta es una sucesión-S; 3.27(d) implica que la sucesión en $\overline{I}^n$ no depende del n-cubo regular elegido. Obtenemos así una familia-S. Sea ahora $v = \lambda^{\gamma}_{M}s$ donde $M \subset \{1,\dots,n\}$ es tal que $n-\nu(M) \geqslant 1$. Pongamos $m = n-\nu(M)$. Se tiene el diagrama conmutativo.

$$\begin{tikzcd}
C(\overline{I}^m) \arrow[r, "v_{\#}"] \arrow[d, "D_i"'] & Q[v] \arrow[r, "\Lambda^{\gamma}_{M}"] \arrow[d, "D_i"'] & Q[s] \arrow[r, "s_{\#}^{-1}"] \arrow[d, "D_i"'] & C(\overline{I}^n) \arrow[d, "D_i"] \\
C(\overline{I}^m \times I^m) \arrow[r, "v_{\#} \otimes v_{\#}"] & J[v] \arrow[r, "\Lambda^{\gamma}_{M} \otimes \Lambda^{\gamma}_{M}"] & J[s] \arrow[r, "(s_{\#} \otimes s_{\#})^{-1}"] & C(\overline{I}^n \times \overline{I}^n)
\end{tikzcd}$$

La composición de los homomorfismos en el primer renglón es Λ^{γ}_{M} y en el segundo es $\Lambda^{\gamma}_{M} \times \Lambda^{\gamma}_{M}$. Por 2.58 la familia-S definida antes es admisible. Ahora sea u un n-cubo arbitrario con $n > 0$. Denotemos con Λ_o, $\Lambda_o \otimes \Lambda_o$ a los homomorfismos, definidos en 3.25, de $Q[s]$ en $Q[u]$ y $J[s]$ en $J[u]$ respectivamente. Se tiene el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
C(\overline{I}^n) \arrow[r, "s_{\#}"] \arrow[d, "D_i"'] & Q[s] \arrow[r, "\Lambda_o"] \arrow[d, "D_i"'] & Q[u] \arrow[d, "D_i"] \\
C(\overline{I}^n \times \overline{I}^n) \arrow[r, "s_{\#} \otimes s_{\#}"] & J[s] \arrow[r, "\Lambda_o \otimes \Lambda_o"] & J[u]
\end{tikzcd}$$

La composición de los homomorfismos en el primer renglón es $u_{\#}$ y en el segundo es $u_{\#} \otimes u_{\#}$, por consiguiente $D_i u = (u_{\#} \otimes u_{\#}) D_i I^n$. En consecuencia la sucesión-S en X se obtiene de una familia admisible por medio de (3.39)

Definición 3.42: ***La sucesión principal en*** X es la sucesión-S en X que se obtiene de la familia principal por medio de (3.39).

Los teoremas 2.61 y 2.62 implican a los dos teoremas siguientes:

Teorema 3.43: *Si en* X ***es*** $\{D_i'\}$ ***una sucesión***-S ***arbitraria y*** $\{D_i\}$ ***es la sucesión principal:***

o $D_i' = D_i'$ *mod 2 para toda* i o $D_i' = TD_i$ *mod 2 para toda* i.

Teorema 3.44: ***Si*** $\{D_i\}$ ***es una sucesión***-S ***en*** X ***y*** u ***es un*** n-***cubo, se tiene:***

$$D_i u = \sum_{(H,K)} \rho_{HK} \lambda_K^{\beta} u \otimes \lambda_H^{\alpha} u \qquad (i \leq n)$$

donde se satisfacen las condiciones (a), (b) y (c) ***de 2.62. Si*** $\{D_i\}$ ***es la sucesión principal se cumplen además las condiciones*** (d), (e) y (f) **de 2.62.**

3.5 Sean $f \in C^p(X,A;Z_2)$, $g \in C^q(X,A;Z_2)$. Definimos

$$f \otimes g \in \mathrm{Hom}(J_{p+q}(X), Z_2)$$

por las condiciones siguientes:

Si u y v son dos cubos de X tales que $\dim u + \dim v = p + q$ entonces

$$\text{(3.51)} \quad \begin{cases} (f \otimes g)(u \otimes v) = f(u) \cdot g(v) & \text{si } p = \dim u,\ q = \dim v \\ (f \otimes g)(u \otimes v) = 0 & \text{en los casos restantes.} \end{cases}$$

Se obtiene de este modo un apareamiento bilineal de $C^p(X,A;Z_2)$ y $C^q(X,A;Z_2)$ en $\mathrm{Hom}(J_{p+q}(X), Z_2)$.

Dada una sucesión-S $\{D_i\}$ en X consideremos el dual de D_i:

$$D_i^{\#} : \mathrm{Hom}\,(J(X), Z_2) \to \mathrm{Hom}(Q(X), Z_2).$$

Obsérvese que este homomorfismo proyecta $\mathrm{Hom}(J_n(X), Z_2)$ en $\mathrm{Hom}(Q_{n-i}(X), Z_2)$.

Definición 3.52: El producto-i, $f \underset{i}{\vee} g$, de f y g según la sucesión $\{D_i\}$ está definido por las igualdades

(3.53)
$$f \underset{i}{\vee} g = D_i^{\#}\ (f \otimes g)\ , \qquad i \geqslant 0$$
$$f \underset{i}{\vee} g = 0 \qquad , \qquad i < 0\ .$$

3.54 Si la sucesión $\{D_i\}$ es la principal escribiremos $f \underset{i}{\smile} g$ en lugar de $f \underset{i}{\vee} g$.

Por la condición (b) de 3.44 se deduce $(f \underset{i}{\vee} g)(u) = 0$ si u es un cubo degenerado; por 3.37(a) $(f \underset{i}{\vee} g)(u) = 0$ si u es un cubo de A. Por consiguiente $f \underset{i}{\vee} g \in C^{p+q-i}(X,A;Z_2)$.

Proposición 3.55: ***El producto-i es bilineal y se tiene la fórmula***

$$d(f \underset{i}{\vee} g) = df \underset{i}{\vee} g + f \underset{i}{\vee} dg + f \underset{i-1}{\vee} g + g \underset{i-1}{\vee} f$$

Demostración: Là bilinealidad del apareamiento de $C^p(X,A;Z_2)$ y $C^q(X,A;Z_2)$ en $\mathrm{Hom}(J_{p+q}(X), Z_2)$ implica la misma propiedad para el producto-i. Para demostrar la segunda parte de la proposición basta emplear a los duales de - 3.27(b) y (c).

Observación: El Teorema 3.43 implica: ó $f \underset{i}{\vee} g = f \underset{i}{\smile} g$ para toda i ó $f \underset{i}{\vee} g = g \underset{i}{\smile} f$ para toda i. Por lo tanto es suficiente considerar únicamente al producto $\underset{i}{\smile}$.

Por (3.51) y 3.44 se obtiene inmediatamente la siguiente descripción del producto $\underset{i}{\smile}$:

Teorema 3.56: ***Si*** $f \in C^p(X,A;Z_2)$, $g \in C^q(X,A;Z_2)$, $i \leqslant p+q$, ***y*** u ***es un*** $(p+q-i)$***-cubo de*** X:

$$(f \underset{i}{\smile} g)(u) = \sum_{(H,K)} f(\lambda^{\beta}_{K} u) \cdot g(\lambda^{\alpha}_{H} u) \tag{3.57}$$

donde H *y* K *son subconjuntos de* $\{1,\ldots,p+q-i\}$ *y:*

(a) $H \cap K = 0$.

(b) $\nu(H) = p\text{-}i$; $\nu(K) = q\text{-}i$.

(c) ***La suma en* (3.57) *contiene uno y solo un término para cada par ordenado*** (H,K) ***que satisfaga*** (a) *y* (b).

(d) ***Sea*** $j = r\text{-}\nu[(H \cup K) \cap \{1,\ldots,r\}]$, $\eta(j) = 0$ ***si*** j ***es par,*** $\eta(j) = 1$ ***si*** j ***es impar.***

Si $r \in K$, $\beta(r) = \eta(j)$; ***si*** $r \in H$, $\alpha(r) = 1\text{-}\eta(j)$.

§4. LOS CUADRADOS-i

Sea $H^n(X,A;Z_2)$ el n-grupo de cohomología de (X,A) con el grupo de coeficientes Z_2. En este § δ será el operador cofrontera $H^n(A;Z_2) \to H^{n+1}(X,A;Z_2)$. Una función continua $F:(X,A) \to (Y,B)$ induce un homomorfismo $F_{\#}: Q(X) \to Q(Y)$ cuyo valor en el cubo u de X es el cubo Fu de Y; se deduce inmediatamente la propiedad: $\lambda^{\gamma}_{M}(F_{\#}u) = F_{\#}(\lambda^{\gamma}_{M}u)$ donde (M,γ) es arbitrario. El homomorfismo $F^{\#}$, dual de $F_{\#}$, proyecta $C^n(Y,B;Z_2)$ en $C^n(X,A;Z_2)$ e induce el homomorfismo $F^*:H^n(Y,B;Z_2) \to H^n(X,A;Z_2)$ asociado a la función F. Si f es un cociclo denotaremos con $\{f\}$ su clase de cohomología.

Por 3.55 existen homomorfismos

$$Sq_i : H^n(X,A;Z_2) \to H^{2n-i}(X,A;Z_2) \tag{4.1}$$

tales que

$$Sq_i \{f\} = \{f \underset{i}{\smile} f\} \quad . \tag{4.2}$$

4.3 A continuación se demuestra que los homomorfismos (4.1) satisfacen las condiciones de la caracterización de Serre [3,p.222] .

Los homomorfismos (4.1) satisfacen las condiciones siguientes:

(4.31) $F^*Sq_i = Sq_i\, F^*$ donde $F:(X,A) \to (Y,B)$

(4.32) $\delta Sq_i = Sq_{i+1}\, \delta$ donde $\delta: H^n(A;Z_2) \to H^{n+1}(X,A;Z_2)$

(4.33) $Sq_o x = x^2$ donde x^2 es el "cup product" de x

(4.34) $Sq_i\, x = 0$ si $\dim x < i$.

Demostración de (4.34): Sea u un cubo de dimensión 2n-i; si $i > n$, por (3.39) se deduce $D_i\, u = 0$. Por consiguiente $f \smile_i f = 0$ si $\dim f < i$. Así pues se satisface (4.34).

Demostración de (4.31): Sea f un n-cociclo de (Y,B) y u un cubo de X de dimensión 2n-i. Por (4.34) podemos suponer $i \leq n$. Por el teorema 3.56 tenemos

$$[F^\#(f \smile_i f)]\,(u) = (f \smile_i f)(F_\# u) = \sum_{(H,K)} f(\lambda^\beta_K F_\# u)\cdot f(\lambda^\alpha_H F_\# u)$$

$$= \sum_{(H,K)} F^\# f(\lambda^\beta_K u)\cdot F^\# f(\lambda^\alpha_H u) = (F^\# f \smile_i F^\# f)(u) \;,$$

lo que implica (4.31).

Demostración de (4.32): Sea f un n-cociclo de A y $\overline{f} \in H^n(A;Z_2)$ su clase de cohomología. La cocadena df es un cociclo de (X,A) y su clase de cohomología es $\delta\overline{f}$ por definición. Se tiene $Sq_{i+1}\delta\overline{f} = \{df \smile_{i+1} df\}$. Ahora por 3.55: $d(f \smile_i f) + d(f \smile_{i+1} df) = df \smile_{i+1} df$. Ya que $f \smile_{i+1} df$ es una cocadena de (X,A), se obtiene (4.32).

Demostración de (4.33): Sea f un n-cociclo de (X,A). Por 3.56 se tiene para $i = 0$:

$$(f \smile f)(u) = \sum_{(H,K)} f(\lambda^0_K u)\cdot f(\lambda^1_H u)$$

donde H y K son complementarios y H recorre la familia de subconjuntos con n elementos de $\{1,\ldots,2n\}$. Esta es la fórmula del cup product, definida en [2,p.441], para el caso particular en el cual el grupo de coeficientes es Z_2.

BIBLIOGRAFIA

[1] S.Mac Lane: ***The homology products in*** $K(\Pi,n)$. Proceedings of the American Mathematical Society. Vol. **5**, pp 642-651 (1954).

[2] J.P. Serre: ***Homologie singulière des espaces fibrés, applications.*** Annals of Mathematics, Vol. **54**, pp 425-505 (1951).

[3] ———— ***Cohomologie modulo 2 des complexes d'Eilemberg-Mac Lane.*** Comentarii Mathematici Helvetici. Vol. **27**, pp 198-232 (1953).

[4] N.E. Steenrod: ***Reduced Powers of Cohomology Classes.*** Annals of Mathematics. Vol. **56**, pp 47-67 (1952).

INSTITUTO DE MATEMATICAS DE LA
UNIVERSIDAD NACIONAL DE MEXICO

INSTITUTO NACIONAL DE LA
INVESTIGACION CIENTIFICA