DE LAS SINGULARIDADES QUE APARECEN AL PROYECTAR VARIEDADES ALGEBRAICAS

Por Emilio Lluis

1. Introducción

En la clásica obra "Théorie des fonctions algébriques" de E. Picard y G. Simart se menciona la propiedad siguiente: a toda superficie algebraica (sin singularidades) se le puede asociar birracionalmente una superficie $F(X, Y, Z) = 0$ contenida en el espacio proyectivo tridimensional sin más singularidades que una curva doble con puntos triples, siendo estas singularidades las más generales en su género.

El objeto principal de este trabajo es el de estudiar las singularidades que aparecen al proyectar una variedad sin puntos singulares de un espacio proyectivo en otro, y aplicar estos resultados para transformar birracionalmente una variedad de dimensión cualquiera sin singularidades en una hipersuperficie introduciendo singularidades de tipo simple. Durante el estudio se encuentra que ciertas propiedades dependen de la característica del campo.

2. Algunos resultados preliminares

Lema 1. *Sea V una variedad del espacio proyectivo P^n definida sobre un campo k y L^{n-1} un hiperplano genérico sobre k. Si $V \cap L$ está contenida en una variedad lineal M de dimension $n-2$ entonces V está contenida en un subespacio P^{n-1} de P^n.*

Para $n = 2$ las hipótesis del lema implican que V es un punto o que V es una curva de grado uno, es decir, una recta. En ambos casos, $V \subset P^1$. Así pues haremos la demostración por inducción.

Si $V \cap L = \varnothing$, V es un punto y la conclusión es trivial. Si $V \cap L$ es un punto Q entonces V es una curva de grado uno, es decir, una recta y la conclusión es también cierta.

Supongamos pues que Q y Q' son dos puntos de $V \cap L$. Proyectando desde Q a un hiperplano N transversal a la recta QQ' resulta: $pr_N(V \cap L) \subset pr_N M$ y como L es unión de proyectantes, $pr_N(V \cap L) = pr_N V \cap pr_N L \subset pr_N M$, y dim $pr_N L = n - 2$, dim $pr_N M = n - 3$. Aplicando la hipótesis de inducción resulta que $pr_N V$ está en un espacio proyectivo de dimensión $n - 2$ y por consiguiente V está contenida en un espacio proyectivo P^{n-1}.

Aplicando sucesivamente este lema resulta el

Corolario 1. *Sea V una variedad de P^n definida sobre un campo k y L^{n-1} un hiperplano genérico sobre k. Si $V \cap L$ está contenida en una variedad lineal de dimensión q, entonces V está contenida en un subespacio P^{q+1} de P^n.*

Corolario 2. *Sea V una variedad de P^n definida sobre un campo k y L^t una variedad lineal genérica sobre k. Si $V \cap L^t$ está contenida en una variedad lineal de dimensión $t - 1$ entonces V está contenida en un subespacio P^{n-1} de P^n.*

La demostración se hace fácilmente si representamos L como intersección de hiperplanos y aplicamos el Corolario 1.

También el siguiente teorema es consecuencia del Lema 1:

TEOREMA 1. *Si V^r es una variedad algebraica de grado d, entonces V^r está contenida en un espacio proyectivo de dimensión $r + d - 1$.*

LEMA 2. *Sea C una curva sin singularidades de P^n tal que toda secante doble es triple. Entonces o bien todas las tangentes a C pasan por un punto, o bien la curva es plana.*

Sean (x), (x'), (y), (y') cuatro puntos genéricos de C sobre un campo k. Sea (z) un punto de intersección de la recta determinada por (x), (y) con C, (z') el de intersección de la recta (x'), (y) con C, correspondiente a (z), y finalmente (z'') el de intersección de la recta (x), (y') con C, también correspondiente a (z).

La especialización $(x') \to (x)$ sobre k determina de modo único un lugar del campo $k(x, y, z, x', z')$ sobre $k(x, y, z)$. En este lugar, la secante determinada por (x), (x') se especializa en la tangente $T(x)$ a C en el punto (x), la secante determinada por (z), (z') se especializa en $T(z)$ y el plano determinado por (x), (y), (x') en cierto plano π_1 (aquí hay que excluir el caso cuando $T(y)$ es igual a la recta (x), (y), (z) pero esto implica que $C = T(y)$). Así pues, π_1 es un plano que contiene $T(x)$, $T(z)$ y la recta (x), (y), (z). Análogamente con la especialización $(y') \to (y)$ sobre k, obtenemos un plano π_2 tal que contiene $T(y)$, $T(z)$ y la recta (x), (y), (z). De aquí se ve que $\pi_1 = \pi_2$ y por lo tanto $T(x) \cap T(y) \neq \emptyset$. Sea $Q = T(x) \cap T(y)$, (u) un punto genérico de C sobre $k(x, y)$ y $T(u)$ la tangente. Si $T(u)$ pasa por Q esto implica que todas las tangentes pasan por Q. Si no, $T(u)$ intersecta a $T(x)$ y $T(y)$, es decir, $T(u)$ está en el plano π determinado por $T(x)$, $T(y)$, de donde resulta que la curva es plana.

COROLARIO. *Si C está definida sobre un campo de característica cero y toda secante doble es triple entonces la curva C es plana.*

Esto se debe a que en característica cero las únicas curvas cuyas tangentes pasan por un punto fijo son las rectas.

LEMA 3. *Sea V^r una variedad del espacio P^n definida sobre un campo k de característica cero tal que toda variedad lineal de dimensión q $(q + 1 \leqq n - r)$ que pasa por $q + 1$ puntos de V pase por $q + 2$. Entonces V está contenida en un subespacio P^{n-1} de P^n.*

Sea M una variedad lineal genérica de P^n sobre k de dimensión $n - r + 1$ y C la curva $V \cap M$. Sean $Q_1, \cdots, Q_{q+1}$ puntos genéricos independientes de C sobre K, siendo K la cerradura algebraica del campo obtenido de k adjuntando los coeficientes de las ecuaciones de M. Sea finalmente N la variedad lineal de dimensión $q - 2$ determinada por estos puntos (en caso de que $Q_1, \cdots, Q_{q-1}$ generasen una variedad lineal de dimensión menor que $q - 2$, la afirmación es inmediata si se toma en cuenta el Corolario 2 del Lema 1). Por esta misma razón podemos también suponer que Q_q, $Q_{q+1} \notin N$. En M vamos a proyectar C desde N a un subespacio proyectivo P^s, con $s = n - r - q + 2$. Debido a nuestras hipótesis, $s \geqq 3$. Sea R^q la variedad lineal generada por el centro de proyección N y la recta L^1 determinada por los puntos Q_r y Q_{r+1}. Como R pasa por $r + 1$ puntos de V, por la hipótesis, R pasa por otro punto Q_{r+2} el cual forzosamente está en C. Sea $C' = pr_{P^s}C$ y $L' = pr_{P^s}L$. L' es una secante doble genérica de C' y como $Q_{r+2} \in M$, $pr_{P^s}Q_{r+2} \in L'$. Por lo tanto C' satisface las condiciones del Corolario al Lema 2, de donde C' es plana. Por lo tanto C está en un espacio proyectivo de dimensión $(n - r + 1) - (s - 2)$ y como $s > 2$, se puede aplicar el Corolario 2 del Lema 1, obteniendo que V está en un P^{n-1}.

Lema 4. *Sean A y D dos subvariedades de una variedad V y sea G un grupo algebraico transitivo de transformaciones de V. Entonces existe un elemento s en G tal que el ciclo $s(A)\cdot D$ está definido.*

Siendo a, d, r, g las dimensiones de A, D, V, G respectivamente, demostraremos primero que si el lema es cierto para $a + d < r$, lo es también para $a + d \geqq r$. En efecto, supongamos $a + d \geqq r$. Sea entonces L una variedad lineal genérica sobre un campo común de definición de nuestras variedades y de dimensión $n - (a + d - r + 1)$, donde n es la dimensión del espacio ambiente. Entonces, siendo $D' = L\cdot D$, resulta que el ciclo $s(A)\cdot D$ está definido si y sólo si $s(A)\cdot D'$ lo está, siendo aquí $a + \dim D' < r$, q.e.d.

Supondremos pues ahora que $a + d < r$ y demostraremos el lema por reducción al absurdo, suponiendo que para toda $s \in G$, $s(A) \cap D \neq \emptyset$.

Para (x), (y) en V, designaremos con $G(x, y)$ el conjunto de elementos $s \in G$ tales que $s(x) = (y)$. Así, $G(x, x) = G(x)$ es el estabilizador de (x). Estos, son subgrupos algebraicos de G. Como $G(x, y) = s_{xy}G(x) = G(y)s_{xy}$, estos conjuntos algebraicos son isomorfos. Demostraremos que su dimensión es $g - r$. En efecto, sea $M \subset G \times V \times V$ la gráfica de la operación de $G \times V$ en V. Debido a la transitividad, $pr_{V\times V}M = V \times V$ y por consiguiente, siendo $(\bar{x}, \bar{y})$ genérico de $V \times V$ sobre el campo considerado, tenemos $\dim (M \cap (G \times (\bar{x}) \times (\bar{y})) = r + g - 2r = g - r$. Como $M \cap (G \times (\bar{x}) \times (\bar{y})) = G(\bar{x}, \bar{y})$, tenemos, según lo anterior,

$$\dim G(x, y) = g - r. \tag{1}$$

Sea $N = M \cap (G \times A \times V)$. Es fácil ver que la condición $s(A) \cap D \neq \emptyset$ para toda s de G equivale a $pr_G(N^{-1}(D)) = G$. Así pues, debido a nuestra hipótesis, tenemos

$$\dim (N^{-1}(D)) \geqq g. \tag{2}$$

Por otro lado, para $(x) \in V$, $(G \times A \times (x)) \cap N = \bigcup_{(y)\in A} G(y, x)$, y por consiguiente, según (1), $\dim ((G \times A \times (x)) \cap N) = a + g - r$. Además, como

$N^{-1}(D) = (G \times A \times D) \cap N = \bigcup_{(x) \in D} ((G \times A \times (x)) \cap N)$ tenemos, según lo anterior, que

$$\dim (N^{-1}(D)) = d + a + g - r. \tag{3}$$

De (2) y (3), llegamos a la contradicción de que $d + a \geqq r$, con lo que queda demostrado el lema.[1]

Corolario. *Sean $A, D_1, \cdots, D_q$ subvariedades de una variedad V y sea G un grupo algebraico transitivo de transformaciones de V. Entonces, si s es un elemento genérico de G, los ciclos $s(A) \cdot D_i$ ($1 \leqq i \leqq q$) están todos definidos.*

3. Sobre las ramas analíticas

Teorema 2. *Sea V una variedad del espacio proyectivo P^n y V' la imagen de V en un espacio P^m según una proyección birracional de centro ajeno a V. Si el punto Q' de V' es imagen de μ puntos simples $Q_1, \cdots, Q_\mu$ de V, entonces en Q' hay μ ramas. Además si la variedad lineal tangente a un punto de estos no intersecta al centro de proyección, entonces la rama correspondiente es lineal.*

Supondremos que P^m tiene por ecuaciones: $X_{m+1} = 0, \cdots, X_n = 0$, y que el centro de proyección es la variedad lineal al infinito de ecuaciones $X_1 = 0, \cdots, X_m = 0$. Supondremos también que Q_1 y Q' son los orígenes de P^n y P^m respectivamente. Si $(x_1, \cdots, x_n)$ es un punto génerico de V sobre un campo k, los anillos locales de Q_1 y Q' en V y V' son respectivamente

$$\mathfrak{o} = k[x_1, \cdots, x_n]_{\mathfrak{X}}, \qquad \mathfrak{o}' = k[x_1, \cdots, x_m]_{\mathfrak{X}'},$$

siendo $\mathfrak{X}$ el ideal generado por $(x_1, \cdots, x_n)$ en $k[x_1, \cdots, x_n]$ y $\mathfrak{X}'$ el generado por $(x_1, \cdots, x_m)$ en $k[x_1, \cdots, x_m]$. Evidentemente $\mathfrak{o}'$ se identifica canónicamente a un subanillo de $\mathfrak{o}$. Designaremos con $\mathfrak{m}$ y $\mathfrak{m}'$ los ideales máximos de $\mathfrak{o}$ y $\mathfrak{o}'$.

Como el centro de proyección no intersecta a la variedad, $x_{m+1}, \cdots, x_n$ son enteros sobre el anillo $k[x_1, \cdots, x_m]$ y por consiguiente sobre $\mathfrak{o}'$. De aquí resulta que el anillo $\mathfrak{A} = \mathfrak{o}'[x_{m+1}, \cdots, x_n]$ es un $\mathfrak{o}'$—módulo finito. Esto implica que $\mathfrak{A}$ es un anillo semilocal. Sean $\mathfrak{m}_1, \cdots, \mathfrak{m}_h$ los distintos ideales máximos de $\mathfrak{A}$ y sean

$$\mathfrak{p}_i = \mathfrak{m}_i \cap k[x_1, \cdots, x_n], \qquad i = 1, \cdots, h.$$

Demostraremos que los ideales $\mathfrak{p}_1, \cdots, \mathfrak{p}_h$ son distintos. En efecto, sea $i \neq j$. Entonces, como $\mathfrak{m}_i \neq \mathfrak{m}_j$ existe un elemento α tal que $\alpha \in \mathfrak{m}_j$ y $\alpha \notin \mathfrak{m}_i$. El elemento α es un polinomio en $x_{m+1}, \cdots, x_n$ con coeficientes en $\mathfrak{o}'$. Sean a_ν/b_ν estos coeficientes, con $a_\nu, b_\nu \in k[x_1, \cdots x_m]$ y $b \notin \mathfrak{X}'$. Sea $b = \prod_\nu b_\nu$. Tenemos

$$\mathfrak{m}_i \cap k[x_1, \cdots x_m] = (\mathfrak{o}' \cap \mathfrak{m}_i) \cap k[x_1, \cdots, x_m] = \mathfrak{m}' \cap k[x_1, \cdots, x_m] = \mathfrak{X}'.$$

Como $b \in k[x_1, \cdots, x_n]$ y $b \notin \mathfrak{X}'$ resulta que $b \notin \mathfrak{m}_i$ y $b \notin \mathfrak{m}_j$. Así pues, $b\alpha \in k[x_1, \cdots, x_n]$, $b\alpha \in \mathfrak{m}_j$, $b\alpha \notin \mathfrak{m}_i$ y de aquí, $b\alpha \notin \mathfrak{p}_i$, $b\alpha \in \mathfrak{p}_j$, es decir, $\mathfrak{p}_i \neq \mathfrak{p}_j$, q.e.d.

Además, como $\mathfrak{p}_i \cap k[x_1, \cdots, x_m] = \mathfrak{X}'$ es un ideal máximo y $k[x_1, \cdots, x_n]$

[1] Esta demostración se ha tomado de las conferencias que P. Samuel sustentó durante el verano de 1955 en la Universidad de México.

es entero sobre $k[x_1, \cdots, x_m]$ resulta que (ver por ejemplo [2]) $\mathfrak{p}_1, \cdots, \mathfrak{p}_h$ son ideales máximos. Por lo tanto son los ideales, en el anillo de coordenadas $k[x_1, \cdots, x_n]$, de h puntos distintos de V que se proyectan en Q', de donde resulta que $h \leqq \mu$.

Inversamente, sea $\mathfrak{p}^*$ un ideal máximo del anillo de coordenadas $k[x_1, \cdots, x_n]$ tal que $\mathfrak{p}^* \cap k[x_1, \cdots, x_m] = \mathfrak{X}'$, es decir, el ideal de un punto que se proyecte en Q'. Si $\mathfrak{p}^*\mathfrak{A} = \mathfrak{A}$ entonces tendríamos $1 = \sum p_i\alpha_i$ con $p_i \in \mathfrak{p}^*$, $\alpha_i \in \mathfrak{A}$. Escribiendo α_i en forma de polinomio en $x_{m+1}, \cdots, x_n$ con coeficientes a_ν/b_ν en $\mathfrak{o}'(a_\nu, b_\nu \in k[x_1, \cdots, x_m], b_\nu \notin \mathfrak{X}')$ y multiplicando la relación $1 = \sum p_i\alpha_i$ por el producto $b = \prod_\nu b_\nu$ resulta que $b \in \mathfrak{p}^* \cap k[x_1, \cdots, x_m]$ y $b \notin \mathfrak{X}'$. Así pues queda demostrado que $\mathfrak{p}^*\mathfrak{A} \neq \mathfrak{A}$. Entonces $\mathfrak{p}^*\mathfrak{A}$ está contenido en un ideal máximo de $\mathfrak{A}$, digamos $\mathfrak{m}_1$. Por consiguiente,

$$\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{m}_1 \cap k[x_1, \cdots, x_n] \supset \mathfrak{p}^*\mathfrak{A} \cap k[x_1, \cdots, x_n] \supset \mathfrak{p}^*,$$

de donde $\mathfrak{p}^* = \mathfrak{p}_1$, es decir, $h \geqq \mu$.

Así pues hemos demostrado que $h = \mu$.

Sea $\mathfrak{A} = a_1\mathfrak{o}' + \cdots + a_\lambda\mathfrak{o}'(a_i \in \mathfrak{A})$. Entonces ([1], Prop. 7) $\bar{\mathfrak{A}} = a_1\bar{\mathfrak{o}}' + \cdots + a_\lambda\bar{\mathfrak{o}}'$ y los elementos de $\bar{\mathfrak{o}}'$ que no son divisores de cero en $\bar{\mathfrak{o}}'$ tampoco lo son en $\bar{\mathfrak{A}}$. Llamando pues $\mathfrak{S}$ el conjunto de elementos de $\bar{\mathfrak{o}}'$ que no son divisores de cero, puede construirse $\bar{\mathfrak{A}}_\mathfrak{S}$.

Demostraremos que $\bar{\mathfrak{o}}'_\mathfrak{S} = \bar{\mathfrak{A}}_\mathfrak{S}$. Evidentemente $\bar{\mathfrak{o}}'_\mathfrak{S} \subset \bar{\mathfrak{A}}_\mathfrak{S}$. Inversamente, como $\mathfrak{A}$ está contenido en el campo de cocientes de $\mathfrak{o}'$, sea $a_i = b_i/c_i$, con $b_i, c_i \in \mathfrak{o}'$, $c_i \neq 0$. Tenemos $c_i \in \mathfrak{S}$, de donde $a_i = b_i/c_i \in \bar{\mathfrak{o}}'_\mathfrak{S}$, y de aquí, $\bar{\mathfrak{A}}_\mathfrak{S} \subset \bar{\mathfrak{o}}'_\mathfrak{S}$, q.e.d.

Supongamos que el número de ramas en Q' es s. Esto quiere decir que la descomposición en primos del ideal (0) de $\bar{\mathfrak{o}}'$ es:

$$(0)\bar{\mathfrak{o}}' = \mathfrak{n}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{n}_s.$$

Sabemos por otro lado que

$$\bar{\mathfrak{A}} = \bar{\mathfrak{A}}_{\mathfrak{m}_1} + \cdots + \bar{\mathfrak{A}}_{\mathfrak{m}_\mu}$$

siendo la suma directa. Sea $\mathfrak{a}_i$ el conjunto de elementos de esta suma directa de la forma $(a_1, \cdots, a_{i-1}, 0, a_{i+1}, \cdots, a_\mu)$. El ideal $\mathfrak{a}_i$ es un ideal primo de $\bar{\mathfrak{A}}$ debido al hecho de que $\bar{\mathfrak{A}}_{\mathfrak{m}_i}$ no tiene divisores de cero, por ser $\mathfrak{A}_{\mathfrak{m}_i}$ isomorfo a $k[x_1, \cdots, x_n]_{\mathfrak{p}_i}$, anillo local del punto simple Q_i en V. Tenemos pues la suma directa

$$\bar{\mathfrak{A}} = \mathfrak{a}_1 + \cdots + \mathfrak{a}_\mu.$$

Para demostrar el teorema necesitamos ver primero que $s = \mu$. En efecto: Del hecho de que si un ideal primo de $\bar{\mathfrak{o}}'$, intersecta a $\mathfrak{S}$ entonces no es ideal primo *mínimo* de (0), resulta que los únicos primos tales que no intersectan a $\mathfrak{S}$ son los ideales $\mathfrak{n}_i (i = 1, \cdots, s)$. Por consiguiente en $\bar{\mathfrak{o}}'_\mathfrak{S}$ los únicos ideales primos son $\bar{\mathfrak{o}}'_\mathfrak{S}\mathfrak{n}_i$. Además $\mathfrak{a}_i \cap \mathfrak{S} = \emptyset$ de donde $\mathfrak{a}_i\bar{\mathfrak{A}}_\mathfrak{S}$ son ideales primos (y distintos) de $\bar{\mathfrak{A}}_\mathfrak{S} = \bar{\mathfrak{o}}'_\mathfrak{S}$. De aquí resulta que $s \geqq \mu$. Consideremos ahora $\bar{\mathfrak{n}}_i = \bar{\mathfrak{o}}'_\mathfrak{S}\mathfrak{n}_i \subset \bar{\mathfrak{A}}_\mathfrak{S}$. El ideal $\bar{\mathfrak{n}}_i \cap \bar{\mathfrak{A}}$ es primo, y contiene un primo mínimo, digamos $\mathfrak{a}_i$

(con un posible cambio de numeración). Así pues

$$\mathfrak{n}_i = \bar{\mathfrak{n}}_i \cap \bar{\mathfrak{o}}' = (\bar{\mathfrak{n}}_i \cap \bar{\mathfrak{A}}) \cap \bar{\mathfrak{o}}' \supset \mathfrak{a}_i \cap \bar{\mathfrak{o}}'$$

y por lo tanto $\mu \geqq s$, es decir, $\mu = s$ y con una numeración conveniente

$$\mathfrak{n}_i = \mathfrak{a}_i \cap \bar{\mathfrak{o}}' \qquad (i = 1, \cdots, \mu).$$

Con esto quedó demostrada la primera parte del teorema.

Es fácil ver que si el centro de proyección no intersecta a la variedad lineal tangente a V en un punto, digamos Q_1, entonces la variedad lineal proyectante es transversal a dicha variedad lineal tangente, e inversamente. Por lo tanto, $\mathfrak{m}'\mathfrak{o} = \dot{\mathfrak{m}}$ ([7], pag 68) (un sistema de ecuaciones de la proyectante es $X_{m+1} = 0, \cdots, X_n = 0$).

Para demostrar que la rama correspondiente a Q_1 es lineal, demostraremos que $\bar{\mathfrak{o}}'/\mathfrak{n}_i$ es regular, [5].

Como $\bar{\mathfrak{o}}' \cap \mathfrak{a}_1 = \mathfrak{n}_1$, el anillo $\bar{\mathfrak{o}}'/\mathfrak{n}_1$ es isomorfo a un subanillo de $\bar{\mathfrak{A}}/\mathfrak{a}_1 = \bar{\mathfrak{A}}_{\mathfrak{m}_1} = \bar{\mathfrak{o}}$, el cual es regular. Además, los campos residuales de $\bar{\mathfrak{o}}'/\mathfrak{n}_i$ y de $\bar{\mathfrak{o}}$ son iguales, debido a la birracionalidad de la proyección y finalmente, la extensión del ideal máximo de $\bar{\mathfrak{o}}'/\mathfrak{n}_1$ es igual al ideal máximo de $\bar{\mathfrak{o}}$, debido a que $\mathfrak{m} = \mathfrak{o}\mathfrak{m}'$. Estas tres condiciones implican que $\bar{\mathfrak{o}}'/\mathfrak{n}_1 = \bar{\mathfrak{o}}$, con lo que queda demostrada la última parte del Teorema 2.

Observación. Aquí no solamente hemos demostrado que la rama correspondiente a un punto simple cuya variedad lineal tangente no intersecta al centro de proyección es lineal, sino que se ha demostrado que $\bar{\mathfrak{o}}'/\mathfrak{n}_1 = \bar{\mathfrak{o}}$, es decir, que la proyección es una transformación *analítica* de la vecindad del punto, en la rama correspondiente. Según una observación de P. Samuel, la propiedad inversa también es cierta, es decir, si la transformación es analítica, la variedad lineal tangente no intersecta al centro de proyección.

4. Singularidades de inmersión por proyección

Sea V^r una variedad sin singularidades del espacio P^n definida sobre un campo k. Se quiere proyectar birracionalmente V^r en un espacio P^m, $m < n$, introduciendo un mínimo de singularidades. Supondremos que V no está contenida en ningún subespacio proyectivo propio de P^n. Para simplificar el lenguage expresaremos este hecho diciendo que V^r está contenida *efectivamente en* P^n. También supondremos desde luego que $m \geqq r + 1$.

Como las variedades lineales proyectantes van a ser de dimensión $q = n - m$, nos serán útiles las subvariedades de la grassmanniana $G(q, n)$ de variedades lineales de dimensión q en P^n que vamos a definir.

Sea $0 \leqq i \leqq q$ y L^i una variedad lineal de dimensión i definida sobre un campo K. Sea $\Delta(L^i)$ la subvariedad de $G(q, n)$ formada por aquellas variedades lineales de dimensión q que contienen a L^i. $\Delta(L^i)$ está definida sobre $K(L^i)$ y se tiene:

$$\dim \Delta(L^i) = \dim G(q - (i + 1), \quad n - (i + 1)) = (q - i)(n - q).$$

Sea ahora $0 \leqq i \leqq q$ y D_i la subvariedad de $G(q, n)$ formada por las variedades lineales de dimensión q que pasen por al menos $(i + 1)$ puntos de V^r. Se tiene:

$$\dim D_i \leqq (q - i)(n - q) + (i + 1)r.$$

En efecto, sean $Q_1, \cdots, Q_{i+1}$, puntos genéricos de V^r independientes sobre k y L^i la variedad lineal que generan. L^i está definida sobre $K = k(Q_1, \cdots, Q_{i+1})$. Si Λ es un punto genérico de $\Delta(L^i)$ sobre K, tenemos $\dim D_i = \dim_k \Lambda \leqq \dim_K \Lambda + \dim_k K = \dim \Delta(L^i) + (i + 1)r$.

Con estas notaciones pasaremos ahora a demostrar el siguiente teorema.

Teorema 3. *Sea V^r una variedad sin singularidades contenida efectivamente en el espacio proyectivo P^n y sea m un entero ($n > m \geqq r + 1$). Entonces existe un modelo birracional V_0 de V contenido en P^m y obtenido por proyección, en el cual hay una cadena descendente de subconjuntos algebraicos V_i ($1 \leqq i \leqq n - m$) de dimensión menor o igual a $r - i(m - r)$ tal que los puntos de $\{V_{i-1}\} - \{V_i\}$ tienen i ramas, las cuales son lineales excepto por subvariedades de dos dimensiones menos. Si además la característica es cero los puntos de V_q, excepto subvariedades, tienen $q + 1$ ramas.*

El centro de proyección será una variedad lineal L^{q-1} y las proyectantes serán las variedades de $\Delta(L^{q-1})$. Considerando como grupo transitivo de transformaciones de $G(q, n)$ el correspondiente al de las transformaciones proyectivas de P^n, según el Corolario del Lema 4, casi para toda $\Delta(L^{q-1})$, las intersecciones $\Delta(L^{q-1}) \cap D_i$, $(0 \leqq i \leqq q)$, tienen todas sus componentes propias. En otras palabras, casi para toda L^{q-1} de P^n, la dimensión del ciclo $\Delta(L^{q-1}) \cdot D_i$ es igual a

$$\begin{aligned} &\dim \Delta(L^{q-1}) + \dim D_i - \dim G(q, n) \\ &\leqq (q - q + 1)(n - q) + (q - i)(n - q) + (i + 1)r - (q + 1)(n - q) \\ &= r - i(n - q - r) = r - i(m - r). \end{aligned}$$

Así pues, proyectando desde una L^{q-1} genérica, obtenemos un modelo birracional V_0 de V ($m \geqq r + 1$) en el cual los ciclos $(L^{q-1}) \cdot D_i$ nos determinan subconjuntos algebraicos V_i $(0 \leqq i \leqq q)$ y tenemos

$$\dim V_i = \dim \Delta(L^{q-1}) \cdot D_i \leqq r - i(m - r).$$

Como $n - q \geqq r + 1$, V^r no intersecta al centro L^{q-1} y como los puntos de $\{V_{i-1}\} - \{V_i\}$ son imagen de i puntos, del Teorema 2 se sigue que dichos puntos tienen i ramas. Además, ya que el conjunto de puntos de V_i cuyas variedades lineales tangentes intersectan el centro de proyección está contenido en un conjunto algebraico de dimensión menor o igual a $r - 2$, resulta que, excepto por subconjuntos algebraicos de dos dimensiones menos, dichas ramas son lineales, debido a que, según la última parte del Teorema 2, la proyección es analítica. La última parte del Teorema es consecuencia del Lema 3.

El siguiente teorema es un caso particular del anterior, si tomamos en cuenta que toda variedad sin singularidades tiene un modelo birracional *efectivamente* contenido en P^{2r+1}.

TEOREMA 4. *Toda variedad sin singularidades V^r es birracionalmente equivalente a una hipersuperficie V_0^r en P^{r+1} en la cual existe una cadena descendente de subconjuntos algebraicos V_i $(1 \leqq i \leqq r)$ de dimensión menor o igual a $r - i$, tal que los puntos de $\{V_{i-1}\} - \{V_i\}$ tienen i ramas, las cuales son lineales excepto por subvariedades de dos dimensiones menos. Además si la característica es cero, los puntos de V_r son puntos con $r + 1$ ramas.*

Este teorema nos dice, por ejemplo, que toda curva sin singularidades (y después del teorema de reducción de singularidades, toda curva) sobre un campo de característica cero tiene un modelo birracional plano con un número finito de puntos dobles. Si la característica es distinta de cero, hay curvas, como por ejemplo $X = t$, $Y = t^p$, $Z = t^{p^2}$, tales que toda recta que corte la curva en 2 puntos, la corta en p puntos (p = caract.). El autor ignora si puede ocurrir esto cuando no hay singularidades.

Para superficies sin singularidades los resultados anteriores nos aseguran la existencia de un modelo birracional birregular en P^5, un modelo birracional en P^4 con un número finito de puntos dobles $(p = 0)$ y un modelo birracional en P^3 con una "curva doble" con un número finito de puntos triples $(p = 0)$.

5. Observación acerca de las tangentes

Finalmente vamos a demostrar que para $i \leqq q$, los puntos de V_{i-1} tales que las variedades lineales tangentes a sus i ramas lineales no son todas distintas, forman un conjunto algebraico de dimensión estrictamente menor que $r - (i - 1)(m - r)$.

En efecto, supongamos lo contrario y sea C la correspondencia entre $V \times \cdots \times V$ (i factores) y $G(q - 1, n)$, formada por el conjunto de $(Q_1, \cdots, Q_i, L^{q-1})$ tales que un L^q de $\Delta(L^{q-1})$ pasa por los i puntos $Q_1, \cdots, Q_i$ de V. Esta correspondencia es no degenerada pues supondremos que la dimensión de V_{i-1} es $r - (i - 1)(m - r)$. Por esta misma razón, dim $C^{-1}(L^{q-1}) = r - (i - 1)(m - r)$, para L^{q-1} genérica. Sean Q_1 y Q_2 dos de los puntos de V tales que las ramas lineales correspondientes en la proyección tengan la misma variedad lineal tangente y sean T_1 y T_2 las variedades lineales tangentes a V en Q_1 y Q_2. Entonces, según nuestra hipótesis, L^{q-1} genera la misma variedad lineal M^{r+q} con T_1 que con T_2. Por consiguiente, dim $C^{-1}(Q_1, \cdots, Q_i) = (q - i + 1)r + q$ (es decir igual a dim $\Delta(L^{i-1})$ en M^{r+q}, más dim $G(q - 1, q)$). De aquí,

$$ri + (q - i + 1)r + q = q(n - q + 1) + r - (i - 1)(n - q - r),$$

de donde resulta $(i - 1 - q)(n - q - r) = 0$ lo cual es una contradicción a los hechos que $m \geqq r + 1$, $i \leqq q$.

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO E
INSTITUTO NACIONAL DE LA INVESTIGACIÓN CIENTÍFICA

BIBLIOGRAFIA

[1] CHEVALLEY, C. On the Theory of Local Rings. Ann. of Math. 44 (1943), 690–708.

[2] COHEN, I. C. and SEIDENBERG, A. Prime Ideals and Integral Dependence. Bull. Am. Math. Soc. 52 (1946), 252–261.

[3] LEFSCHETZ, S. Algebraic Geometry, Princeton Math. Series. (1953).

[4] LLUIS, E. Sur l'immersion des variétés algébriques. Ann. of Math. 62 (1955) 120–127.

[5] NORTHCOTT, D. G. Some results concerning the local analytic branches of an algebraic variety. Proc. Camb. Phil. Soc. 49 (1953) 386–396.

[6] SAMUEL, P. Algèbre Locale, Gauthier-Villars, (1953).

[7] SAMUEL, P. Méthodes d'Algèbre Abstraite en Géométrie Algébrique, Ergebnisse der Mathematik. Springer-Verlag (1955).

[8] WEIL, A. Foundations of Algebraic Geometry. Am. Math. Soc. Colloquium Publications (1946).