L'ESPACE DES IDÉAUX D'UN ANNEAU LOCAL

PAR PIERRE SAMUEL

Soient $\mathfrak{o}$ un anneau local, $\mathfrak{m}$ son idéal maximal, et Φ l'ensemble des idéaux de $\mathfrak{o}$. Définissons V_n comme étant la partie de $\Phi \times \Phi$ formée des couples $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ d'idéaux de $\mathfrak{o}$ tels que $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{b} + \mathfrak{m}^n$ et $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{a} + \mathfrak{m}^n$. Il est clair que les V_n forment un système fondamental d'entourages d'une *structure uniforme* de Φ.[1]

THÉORÈME 1. *L'espace uniforme Φ est séparé.*

En effet, de $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \in \bigcap_{n=1}^{\infty} V_n$, nous déduisons $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{b} + \mathfrak{m}^n$ pour tout n, d'où $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{b}$ puisque $\mathfrak{b}$ est fermé. De même $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{a}$. CQFD.

Donc, si nous posons $d(\mathfrak{a}, \mathfrak{a}) = 0$ et (pour $\mathfrak{a} \neq \mathfrak{b}$) $d(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = 1/n$ lorsque $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \in V_n$ et $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \notin V_{n+1}$, la fonction d est une distance compatible avec la structure uniforme de Φ. Comme on a évidemment

$$d(\mathfrak{b}, \mathfrak{c}) \leqq \max\,(d(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}), d(\mathfrak{a}, \mathfrak{c}))$$

l'espace Φ est un espace *ultramétrique*.

THÉORÈME 2. *Soient $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ deux idéaux de $\mathfrak{o}$. Pour que $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \in V_n$ il faut et il suffit qu'il existe des systèmes de générateurs $(a_1, \cdots, a_q)$ de $\mathfrak{a}$ et $(b_1, \cdots, b_q)$ de $\mathfrak{b}$ tels que $a_i \equiv b_i$ (mod. $\mathfrak{m}^n$).*

La suffisance est évidente. Réciproquement, si $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \in V_n$, nous prenons des systèmes de générateurs $(a_1, \cdots, a_s)$, $(b_{s+1}, \cdots, b_q)$ de $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$, et, pour $1 \leqq i \leqq s$ (resp. $s + 1 \leqq j \leqq q$), nous choisissons b_i dans $\mathfrak{b}$ (resp. a_j dans $\mathfrak{a}$) tels que $b_i \equiv a_i$ (mod. $\mathfrak{m}^n$) (resp. $a_j \equiv b_j$ (mod. $\mathfrak{m}^n$)). CQFD.

REMARQUE 1. Dans le cas où $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ sont des idéaux principaux, on peut ainsi préciser le théorème 1: si $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \in V_n$, il existe des générateurs a de $\mathfrak{a}$ et b de $\mathfrak{b}$ tels que $a \equiv b$ (mod. $\mathfrak{m}^n$). En effet posons $\mathfrak{a} = \mathfrak{o}a'$ et $\mathfrak{b} = \mathfrak{o}b'$; par hypothèse il existe x, x' dans $\mathfrak{o}$ et m, m' dans $\mathfrak{m}^n$ tels que $a' = xb' + m$, $b' = x'a' + m'$; si x est inversible, nous prenons $a = a'$, $b = xb'$; de même si x' est inversible; enfin si x et x' sont non inversibles, la relation $a'(1 - x') \equiv b'(1 - x)$ (mod. $\mathfrak{m}^n$) montre que nous pouvons prendre $a = a'(1 - x')$ et $b = b'(1 - x)$.

THÉORÈME 3. *Les applications $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \to \mathfrak{a}\mathfrak{b}$ et $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \to \mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ de $\Phi \times \Phi$ dans Φ sont uniformément continues.*

En effet les relations $(\mathfrak{a}, \mathfrak{a}') \in V_n$, $(\mathfrak{b}, \mathfrak{b}') \in V_n$ impliquent $\mathfrak{a}' \subset \mathfrak{a} + \mathfrak{m}^n$, $\mathfrak{b}' \subset \mathfrak{b} + \mathfrak{m}^n$; d'où $\mathfrak{a}'\mathfrak{b}' \subset \mathfrak{a}\mathfrak{b} + \mathfrak{m}^n$. De même $\mathfrak{a}\mathfrak{b} \subset \mathfrak{a}'\mathfrak{b}' + \mathfrak{m}^n$, ce qui démontre

[1] Voir N. Bourbaki, Topologie Générale, Chapitre II, "Structures Uniformes" (Paris (Hermann), 1940). On notera que la structure uniforme que nous décrivons ici est celle induite sur Φ par la structure uniforme définie dans loc. cit., §2, exerc. 7, sur l'ensemble des parties fermées de $\mathfrak{o}$.

l'uniforme continuité de la multiplication. Raisonnement analogue pour l'addition. CQFD.

REMARQUE 2. L'application $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \to \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$ n'est *pas* continue. Prenons en effet pour $\mathfrak{o}$ l'anneau de séries formelles $\mathfrak{o} = K[[X, Y]]$, $\mathfrak{a} = \mathfrak{b} = (X)$ et $\mathfrak{a}_n = (X + Y^n)$; aucun des idéaux $\mathfrak{b} \cap \mathfrak{a}_n = (X^2 + XY^n)$ n'est voisin de $\mathfrak{b} \cap \mathfrak{a} = (X)$. Lorsque $\mathfrak{o}$ est complet et qu'on s'est donné $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$, le fait que l'intersection des idéaux $(\mathfrak{a} + \mathfrak{m}^n) \cap (\mathfrak{b} + \mathfrak{m}^n)$ est $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$ montre qu'il existe une fonction $s(n)$ tendant vers l'infini avec n telle que $(\mathfrak{a} + \mathfrak{m}^n) \cap (\mathfrak{b} + \mathfrak{m}^n) \subset (\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) + \mathfrak{m}^{s(n)2}$; alors les relations $(\mathfrak{a}, \mathfrak{a}') \in V_n$ et $(\mathfrak{b}, \mathfrak{b}') \in V_n$ impliquent $\mathfrak{a}' \cap \mathfrak{b}' \subset (\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) + \mathfrak{m}^{s(n)}$ (mais non point $(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) \subset (\mathfrak{a}' \cap \mathfrak{b}') + \mathfrak{m}^{t(n)}$ avec $t(n)$ tendant vers l'infini, comme le montre l'exemple ci dessus).

THÉORÈME 4. *Pour tout idéal $\mathfrak{a}$ de $\mathfrak{o}$, notons $d(\mathfrak{a})$ la dimension de l'anneau local $\mathfrak{o}/\mathfrak{a}$. L'application d de Φ dans l'ensemble des entiers est semi continue supérieurement.*

En effet l'assertion que $d(\mathfrak{a}) \leqq q$ équivaut à dire qu'il existe des éléments $z_1, \cdots, z_q$ de $\mathfrak{o}$ et un entier s tels que $\mathfrak{a} + (z_1, \cdots, z_q)$ contienne $\mathfrak{m}^s$, c'est à dire soit primaire pour $\mathfrak{m}$. Prenons un idéal $\mathfrak{b}$ tel que $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \in V_{s+1}$. Alors la relation $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{b} + \mathfrak{m}^{s+1}$ implique $\mathfrak{b} + \mathfrak{m}^{s+1} + (z_1, \cdots, z_q) \subset \mathfrak{m}^s$. Posons $\mathfrak{q} = \mathfrak{b} + (z_1, \cdots, z_q)$. La relation $\mathfrak{m}^s \subset \mathfrak{q} + \mathfrak{m}^{s+1}$ implique, par un raisonnement classique, $\mathfrak{m}^s \subset \mathfrak{q} + \mathfrak{m}(\mathfrak{q} + \mathfrak{m}^{s+1}) = \mathfrak{q} + \mathfrak{m}^{s+2}$, d'où $\mathfrak{m}^s \subset \mathfrak{q} + \mathfrak{m}^{s+n}$ pour tout n et $\mathfrak{m}^s \subset \mathfrak{q}$ puisque $\mathfrak{q}$ est un idéal fermé. Par conséquent $\mathfrak{b} + (z_1, \cdots, z_q)$ est primaire pour $\mathfrak{m}$, ce qui montre que $d(\mathfrak{b}) \leqq q$. CQFD.

REMARQUE 3. L'exemple de la suite d'idéaux (X, Y^n) de $K[[X, Y]]$, qui tend vers (X), montre que l'application d n'est pas continue. Plus généralement n'importe quel voisinage de n'importe quel idéal $\mathfrak{a}$ contient des idéaux primaires pour $\mathfrak{m}$ (par exemple un idéal $\mathfrak{a} + \mathfrak{m}^n$).

THÉORÈME 5. *Soit $\mathfrak{o}$ un anneau local complet. Alors l'espace Φ des idéaux de $\mathfrak{o}$ est complet.*

Comme Φ est métrisable, il nous suffit de montrer que toute suite de Cauchy $(\mathfrak{a}_n)$ admet une limite. On a par hypothèse $(\mathfrak{a}_n, \mathfrak{a}_{n+1}) \in V_{s(n)}$ où $s(n)$ tend vers l'infini avec n. Appelons cohérentes les suites (a_n) d'éléments de $\mathfrak{o}$ telles que $a_n \in \mathfrak{a}_n$ et que $a_{n+1} - a_n \in \mathfrak{m}^{s(n)}$; il en existe, ne serait ce que la suite $(0, \cdots, 0, \cdots)$. Ce sont des suites de Cauchy; elles admettent donc des limites puisque $\mathfrak{o}$ est complet. Désignons par $\mathfrak{v}$ l'ensemble de ces limites. Si (a_n) et (b_n) sont des suites cohérentes, $(a_n + b_n)$ et (xa_n) $(x \in \mathfrak{o})$ sont aussi des suites cohérentes; par conséquent $\mathfrak{v}$ est un *idéal* de $\mathfrak{o}$. Montrons que $\mathfrak{v}$ est la limite de la suite $(\mathfrak{a}_n)$.

Si $a \in \mathfrak{v}$, c'est la limite d'une suite cohérente (a_n). On a donc $a - a_n \in \mathfrak{m}^{t(n)}$ où $t(n) = \inf_{q \geqq n}(s(q))$. Par conséquent on a $\mathfrak{v} \subset \mathfrak{a}_n + \mathfrak{m}^{t(n)}$, où $t(n)$ tend vers l'infini avec n.

[2] P. Samuel, Algèbre Locale (Mem. Sci. Math. n° 123, Paris 1953), chap. I, n° 3 prop. 2.

Inversement, étant donné un élément x_n de $\mathfrak{a}_n$, la relation $\mathfrak{a}_n \subset \mathfrak{a}_{n+1} + \mathfrak{m}^{s(n)}$ montre qu'il existe x_{n+1} dans $\mathfrak{a}_{n+1}$ tel que $x_{n+1} - x_n \in \mathfrak{m}^{s(n)}$, et la relation $\mathfrak{a}_n \subset \mathfrak{a}_{n-1} + \mathfrak{m}^{s(n-1)}$ montre qu'il existe x_{n-1} dans $\mathfrak{a}_{n-1}$ tel que $x_n - x_{n-1} \in \mathfrak{m}^{s(n-1)}$. Par applications répètées dans les deux directions nous obtenons une suite cohérente $(x_1, \cdots, x_{n-1}, x_n, x_{n+1}, \cdots, x_{n+q}, \cdots)$. Soit $x \in \mathfrak{v}$ sa limite. On a $x - x_n \in \mathfrak{m}^{t(n)}$, d'où $\mathfrak{a}_n \subset \mathfrak{v} + \mathfrak{m}^{t(n)}$. CQFD.

Remarque 4. Une grande partie des résultats donnés ici (théorèmes 1, 2, 3, et théorème 5 si l'on suppose $\mathfrak{o}$ complet) s'étendent aussitôt au cas d'un anneau de Zariski (loc. cit.[2], chap. I).

Université de Clermont-Ferrand