# UN CRITERIO COHOMOLÓGICO PARA DETERMINAR COMPOSICIONES ESENCIALES DE TRANSFORMACIONES

POR JOSÉ ADEM

## 1. Introducción

Una *operación cohomológica estable*, relativa a un grupo $G$ de coeficientes, es una colección de homomorfismos

$$\theta^\alpha : H^q(K, L; G) \to H^{q+\alpha}(K, L; G),$$

definidos para todo par $(K, L)$ y entero $q$, con la propiedad de conmutar con el operador cofrontera y con los homomorfismos inducidos por transformaciones.[1] Las potencias de Steenrod (cf. [15]) $\mathrm{Sq}^\alpha$, $\mathrm{Sq}^\alpha\mathrm{Sq}^\beta$, $\mathcal{P}^\alpha$, etc., son operaciones cohomológicas estables.

Por simplicidad, omitiremos el grupo $G$ de coeficientes, escribiendo $H^q(K, L)$ en lugar de $H^q(K, L; G)$. Designamos con $S : H^q(K, L) \approx H^{q+1}(SK, SL)$ el isomorfismo suspensión, definido como en [13; p. 305]. La suspensión determina un isomorfismo entre las sucesiones de cohomología de $(K, L)$ y $(SK, SL)$. Las operaciones cohomológicas estables conmutan con la suspensión, ya que $S$ se expresa como la composición de un operador cofrontera y homomorfismos inducidos por transformaciones.

Usando el método de Steenrod (cf. [14]) definimos, con cada transformación (continua) $f : X \to Y$, la operación cohomológica funcional $\theta_f^\alpha$ (cf. §4). El dominio de $\theta_f^\alpha$ es cierto subgrupo de cohomología y el contradominio un grupo cociente.

Sean $g : W \to X$, $f : X \to Y$ dos transformaciones y $\theta^\beta$, $\theta^\alpha$ dos operaciones relativas al mismo grupo de coeficientes. Con las hipótesis necesarias sobre $\theta_f^\alpha u$, se define la operación compuesta $'\theta_g^\beta(\theta_f^\alpha u)$, donde $'\theta_g^\beta$ es la operación inducida por $\theta_g^\beta$ pasando al cociente.

Si $f \simeq 0$, se tiene $\theta_f^\alpha = 0$. Por lo tanto, $\theta_f^\alpha u \neq 0$ para cierta $u$, implica que $f$ es esencial. Sin embargo, $'\theta_g^\beta\theta_f^\alpha u \neq 0$ no necesariamente implica que la composición $fg$ es esencial, como lo ilustra el ejemplo siguiente. Consideremos las transformaciones entre esferas, $g : S^{n+4} \to S^{n+1}$, $f : S^{n+2} \to S^n$, con $n \geqq 6$, que se obtienen mediante suspensiones de las transformaciones de Hopf, respectivamente, $S^7 \to S^4$, $S^3 \to S^2$. Si $u \in H^n(S^n)$ es un generador, resulta $\mathrm{Sq}_g^4\mathrm{Sq}_f^2 u \neq 0$ (cf. [14; p. 985]). Por otra parte, de acuerdo con Serre (cf. [10; p. 231]) y Toda (cf. [16; p. 43]), se tiene que $\pi_{n+4}(S^n) = 0$ para $n \geqq 6$. Por consiguiente $fg \simeq 0$.

El objeto principal de este trabajo es establecer un criterio que en ciertos casos permitirá, de $'\theta_g^\beta\theta_f^\alpha u \neq 0$, deducir que $fg$ es esencial.[2]

---

[1] En realidad se trata de toda una familia de operaciones cohomológicas en el sentido de Serre (cf. [10; p. 220]).

[2] En conexión con este problema, varios resultados interesantes han sido obtenidos por F. Peterson (Trabajo inédito).

## 2. Construcción de espacios asociados a transformaciones

Todos los espacios que consideramos en este trabajo son complejos con un número finito de celdas. Sea $X$ un tal complejo, $x_0$ uno de sus puntos tomado como punto base y $E^1$ el intervalo $-1 \leqq t \leqq 1$. Siguiendo [12] definimos $CX$, el *cono sobre* $X$, como el espacio que se obtiene de $X \times E^1$ al deformar $(X \times -1) \cup (x_0 \times E^1)$ en un punto. En forma análoga, $SX$, *la suspensión de* $X$, se define como el espacio que se obtiene de $X \times E^1$ al deformar $(X \times -1) \cup (x_0 \times E^1) \cup (X \times 1)$ en un punto. Designaremos con $(x, t)$ el punto de $CX$ o de $SX$ que corresponde al punto $(x, t)$ de $X \times E^1$. Con la identificación $x = (x, 1)$ resulta $X \subset CX$. Si $f: X \to Y$ es una transformación, definimos $Cf: CX \to CY$ como $Cf(x, t) = (f(x), t)$. En igual forma se define $Sf: SX \to SY$ *la suspensión de* $f$.

Formemos $CX \cup Y$, la unión de los espacios $CX$, $Y$, que suponemos ajenos. En forma análoga a la construcción de $Y_f$, el espacio de la transformación cilíndrica de $f$, definido en [14; p. 966], consideramos una descomposición de $CX \cup Y$ formada con los puntos $x$ de $CX - X$ y los conjuntos $y \cup f^{-1}(y) \times 1$. Esta descomposición es semi-contínua superiormente y el espacio identificación que resulta lo designamos con $CX \cup_f Y$. La transformación natural de $CX \cup Y$ en $CX \cup_f Y$, define

$$\bar{f}: (CX, X) \to (CX \cup_f Y, Y), \tag{2.1}$$

con $\bar{f} \mid X = f$. Decimos que $CX \cup_f Y$ se obtiene "pegando" $CX$ con $Y$ por medio de $f: X \to Y$.

Lema 2.2. *Los espacios* $S(CX \cup_f Y)$ *y* $(CSX) \cup_{Sf} (SY)$ *son homeomorfos.*

Demostración: Sean $E^1$, $E'^1$ dos copias del intervalo $[-1, 1]$, representando un elemento arbitrario respectivamente por $t$, $t'$. Si $x_0$ es el punto base de $X$, el punto base de $Y$ es $y_0 = f(x_0)$. Es fácil verificar que $S(CX \cup_f Y)$ se obtiene de $(X \times E^1 \times E'^1) \cup (Y \times E'^1)$, mediante la siguiente descomposición: los puntos $(x, t, t')$ con $x \in X - x_0$, $-1 < t < 1$, $-1 < t' < 1$; los conjuntos

$$(y \times t') \cup (f^{-1}(y) \times 1 \times t')$$

con $y \in Y - y_0$, $-1 < t' < 1$; y el conjunto que resulta de la unión de

$$(X \times E^1 \times \{-1, 1\}) \cup (X \times -1 \times E'^1) \cup (x_0 \times E^1 \times E'^1)$$

con $(f^{-1}(y_0) \times 1 \times E'^1) \cup (Y \times \{-1, 1\}) \cup (y_0 \times E'^1)$, donde $\{-1, 1\}$ es el conjunto cuyos únicos elementos con $-1$, $1$.

El homeomorfismo natural entre $X \times E^1 \times E'^1$ y $X \times E'^1 \times E^1$, que transforma $(x, t, t')$ en $(x, t', t)$, translada la descomposición al espacio

$$(X \times E'^1 \times E^1) \cup (Y \times E'^1).$$

Por otra parte, la descomposición así obtenida es la que define $(CSX) \cup_{Sf} (SY)$, donde $Sf$ resulta de $f \times 1: X \times E'^1 \to Y \times E'^1$ al hacer las identificaciones.

Luego, el homeomorfismo inducido, es un homeomorfismo entre $S(CX \cup_f Y)$ y $(CSX) \cup_{Sf} (SY)$, lo que demuestra 2.2.

Sea $\tilde{Y}_f$ el espacio que resulta de $Y_f$ al deformar $x_0 \times [0, 1]$ en el punto $y_0 = f(x_0)$. En $\tilde{Y}_f$, igual que en $Y_f$, el espacio $X$ se indentifica con la sección $X \times 0$. Obviamente, las relaciones establecidas en [14; p. 966] entre $X$, $Y$, $Y_f$, se tienen también con $\tilde{Y}_f$. Esto es, si $i: X \subset \tilde{Y}_f$, $k: Y \subset \tilde{Y}_f$ son las inclusiones respectivas, $\tilde{f}: \tilde{Y}_f \to Y$ es la transformación natural que comprime $\tilde{Y}_f$ en $Y$, resulta $\tilde{f}i = f$, $\tilde{f}k =$ identidad, $k\tilde{f} \simeq$ identidad; por lo tanto, el par $\tilde{f}$, $k$ constituye una equivalencia homotópica entre $\tilde{Y}_f$ y $Y$.

Sea $C_1X$ el sub-espacio de $CX$ que corresponde al sub-espacio $X \times [-1, 0]$ de $X \times E^1$. Claramente, se tiene $CX \cup_f Y = C_1X \cup \tilde{Y}_f$.

LEMA 2.3. *Si $f$, $g$ son dos transformaciones homotópicas de $X \to Y$, los espacios $CX \cup_f Y$, $CX \cup_g Y$ resultan del mismo tipo de homotopía.*

Omitiremos la demostración, ya que esencialmente es la dada en [14; teorema 10.1].

### 3. Una sucesión exacta

Consideremos el siguiente diagrama conmutativo de espacios y transformaciones

$$\begin{tikzcd}
(\tilde{Y}_f, X) \arrow[d, "m"] & \tilde{Y}_f \arrow[l, "j"'] \arrow[r, "\tilde{f}"] \arrow[d, "l"] & Y \arrow[dl, "k"] \\
(CX \cup_f Y, C_1X) & CX \cup_f Y \arrow[l, "n"'] &
\end{tikzcd}$$

donde $j$, $k$, $l$, $m$, $n$ son las respectivas inclusiones. El correspondiente diagrama conmutativo en cohomología es

$$\begin{tikzcd}
H^q(\tilde{Y}_f, X) \arrow[r, "j^*"] & H^q(\tilde{Y}_f) & H^q(Y) \arrow[l, "\tilde{f}^*"'] \\
H^q(CX \cup_f Y, C_1X) \arrow[u, "m^*"] \arrow[r, "n^*"] & H^q(CX \cup_f Y) \arrow[u, "l^*"] \arrow[ur, "k^*"'] &
\end{tikzcd}$$

donde $\tilde{f}^*$, $m^*$, $n^*$ son isomorfismos. El primero por ser $\tilde{f}$ una equivalencia homotópica; $m^*$ por ser $m$ una excisión; $n^*$ por ser $n$ una inclusión con $C_1X$ deformable en sí mismo a un punto.

Si escribimos $\nu = m^* n^{*-1}$, y combinamos con la sucesión de cohomología del par $(\tilde{Y}_f, X)$, se obtiene

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & H^{q-1}(X) \arrow[r, "\delta"] & H^q(\tilde{Y}_f, X) \arrow[r, "j^*"] & H^q(Y_f) \arrow[r, "i^*"] & H^q(X) \arrow[r] & \cdots \\
& & H^q(CX \cup_f Y) \arrow[u, "\nu"'] \arrow[r, "k^*"] & H^q(Y) \arrow[u, "\tilde{f}^*"'] & &
\end{tikzcd}$$

con $\nu$, $\tilde{f}^*$ isomorfismos. Este diagrama define la sucesión exacta

$$(3.1) \qquad \cdots \longrightarrow H^{q-1}(X) \xrightarrow{\mu} H^q(CX \cup_f Y) \xrightarrow{k^*} H^q(Y) \xrightarrow{f^*} H^q(X) \longrightarrow \cdots$$

donde $\mu = \nu^{-1}\delta$, $f^* = i^*\tilde{f}^*$. Obviamente, se tiene un isomorfismo natural entre esta sucesión y la sucesión de cohomología de $(Y_f, X)$.

LEMA 3.2. *Sea $t^*: H^q(SX) \to H^q(CX \cup_f Y)$ el homomorfismo inducido por la transformación natural $t: CX \cup_f Y \to SX$, que se obtiene al identificar $Y$ con el punto $x_0$ de $X$. Si $S: H^{q-1}(X) \to H^q(SX)$ es el isomorfismo suspensión, resulta $\mu = -t^*S$.*

DEMOSTRACIÓN: Observamos primero que $(CX \cup_f Y;\ C_1X,\ \tilde{Y}_f)$ es una terna propia (cf. [5; p. 34]) con $X = C_1X \cap \tilde{Y}_f$. Luego formamos el siguiente exágono de grupos y homomorfismos

$$\begin{tikzcd}
& H^q(CX \cup_f Y) & \\
H^q(CX \cup_f Y, C_1X) \arrow[ur, "n^*"] \arrow[dr, "j_1^*"] \arrow[dd, "m^*"'] & & H^q(CX \cup_f Y, \tilde{Y}_f) \arrow[ul, "n_1^*"'] \arrow[dl, "j_2^*"'] \arrow[dd, "m_1^*"] \\
& H^q(CX \cup_f Y, X) \arrow[uu, "j_3^*"] \arrow[dl, "i_2^*"'] \arrow[dr, "i_1^*"] & \\
H^q(\tilde{Y}_f, X) & & H^q(C_1X, X) \\
& H^{q-1}(X) \arrow[ul, "\delta"] \arrow[ur, "\delta"'] \arrow[uu, "\delta"] &
\end{tikzcd}$$

donde todos los homomorfismos, con excepción de $\delta$, son los inducidos por las transformaciones de inclusión. Como la terna es propia, el diagrama satisface las hipótesis del "lema exagonal" (cf. [5; p. 38]), y por lo tanto

$$\mu = n^*m^{*-1}\delta = -n_1^*m_1^{*-1}\delta.$$

En lo que sigue identificaremos $n_1^*m_1^{*-1}\delta$ con $t^*S$. Consideramos

$$H^{q-1}(X) \xrightarrow{\delta} H^q(CX, X) \xleftarrow{r^*} H^q(SX),$$

donde $r^*$ es el homomorfismo inducido por la transformación natural

$$r: (CX, X) \to (SX, x_0),$$

que identifica $X$ con el punto $x_0$. Obviamente, $\delta$, $r^*$ son isomorfismos y el isomorfismo suspensión se define como $S = r^{*^{-1}}\delta$. Formamos el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
H^{q-1}(X) \arrow[r, "\delta"] & H^q(C_1X, \tilde{X}) & H^q(CX \cup_f Y, \tilde{Y}_f) \arrow[l, "m_1^*"'] \arrow[r, "n_1^*"] \arrow[d, "l^*"] & H^q(CX \cup_f Y) \\
& & H^q(CX \cup_f Y, Y) \arrow[u, "k^*"'] & H^q(SX) \arrow[l, "t_1^*"'] \arrow[u, "t^*"']
\end{tikzcd}$$

donde $k^*$, $l^*$ son los homomorfismos inducidos por las respectivas inclusiones y $t_1^*$ por la transformación $t_1$ que se deriva de $t$. Claramente, $l^*$, $t_1^*$ son isomorfismos y $S = t_1^{*-1} l^* m_1^{*-1}\delta$. Luego $t^*S = n_1^* m_1^{*-1}\delta$, y el lema queda demostrado.

Combinando 3.1 con 3.2 se obtiene la siguiente sucesión exacta

$$\cdots \to H^q((CSX) \cup_{Sf} (SY)) \xrightarrow{(Sk)^*} H^q(SY) \xrightarrow{(Sf)^*}$$
$$H^q(SX) \xrightarrow{t^*} H^q(CX \cup_f Y) \xrightarrow{k^*} H^q(Y) \to \cdots$$

## 4. Operaciones cohomológicas funcionales

Sea $\theta^\alpha$ una operación cohomológica estable, relativa a un grupo $G$ de coeficientes (cf. §1). Con la sucesión 3.1 formamos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
H^{n-1}(X) \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "\theta^\alpha"] & H^n(CX \cup_f Y) \arrow[r, "k^*"] \arrow[d, "\theta^\alpha"] & H^n(Y) \arrow[r, "f^*"] \arrow[d, "\theta^\alpha"] & H^n(X) \arrow[d, "\theta^\alpha"] \\
H^{n+\alpha-1}(X) \arrow[r, "\mu"] & H^{n+\alpha}(CX \cup_f Y) \arrow[r, "k^*"] & H^{n+\alpha}(Y) \arrow[r, "f^*"] & H^{n+\alpha}(X)
\end{tikzcd}$$

Con este diagrama, empleando el mismo método usado en [14; p. 978] para definir los cuadrados funcionales, se construye la operación cohomológica funcional $\theta_f^\alpha$. Así, sea $K^n(f^*, \theta^\alpha)$ el subgrupo de $H^n(Y)$ que se obtiene como la intersección de los núcleos de $f^*$ y $\theta^\alpha$. Sea

$$L^{n+\alpha-1}(f^*, \theta^\alpha) = f^*H^{n+\alpha-1}(Y) + \theta^\alpha H^{n-1}(X),$$

el menor subgrupo de $H^{n+\alpha-1}(X)$ que contiene las imágenes de $f^*$ y $\theta^\alpha$. Si $u \in K^n(f^*, \theta^\alpha)$, entonces $f^*u = 0$, $\theta^\alpha u = 0$. Por la exactitud de la sucesión superior existe $u' \in H^n(CX \cup_f Y)$ tal que $k^*u' = u$. Formamos $\theta^\alpha u'$. Puesto que $k^*\theta^\alpha u' = \theta^\alpha u = 0$, la exactitud de la sucesión inferior implica que existe $u'' \in H^{n+\alpha-1}(X)$ tal que $\mu(u'') = \theta^\alpha u'$. Las elecciones de $u'$, $u''$ sólo pueden alterarse sumándoseles elementos arbitrarios, respectivamente en $\mu H^{n-1}(X)$, $f^*H^{n+\alpha-1}(Y)$. Luego, la clase de $u''$ módulo $L^{n+\alpha-1}(f^*, \theta^\alpha)$ es única y determina $\theta_f^\alpha u$. Se tiene

$$\theta_f^\alpha : K^n(f^*, \theta^\alpha) \to H^{n+\alpha-1}(X)/L^{n+\alpha-1}(f^*, \theta^\alpha).$$

Obviamente, la operación $\theta_f^\alpha$ es equivalente a la que se deriva utilizando la sucesión de cohomología de $(Y_f, X)$, en lugar de la sucesión 3.1.

Consideremos ahora, otra operación cohomológica $\theta^\beta$, relativa al mismo grupo $G$ de coeficientes y sea $\theta^\beta\theta^\alpha$ la composición de $\theta^\alpha$ con $\theta^\beta$. Claramente, $K^q(f^*, \theta^\alpha) \subset K^q(f^*, \theta^\beta\theta^\alpha)$ y $\theta^\beta$ transforma $L^q(f^*, \theta^\alpha)$ en $L^{q+\beta}(f^*, \theta^\beta\theta^\alpha)$ y por lo tanto, pasando al cociente, $\theta^\beta$ define

$$^{\#}\theta^\beta : H^q(X)/L^q(f^*, \theta^\alpha) \to H^{q+\beta}(X)/L^{q+\beta}(f^*, \theta^\beta\theta^\alpha).$$

Con la inclusión $L^q(f^*, \theta^\beta\theta^\alpha) \subset L^q(f^*, \theta^\beta)$ definimos

$$\lambda : H^q(X)/L^q(f^*, \theta^\beta\theta^\alpha) \to H^q(X)/L^q(f^*, \theta^\beta),$$

como el homomorfismo natural.

Lema 4.1. *Si $u \in K^n(f^*, \theta^\alpha)$ entonces $\theta_f^\alpha u$, $(\theta^\beta\theta^\alpha)_f u$ están definidos y $(\theta^\beta\theta^\alpha)_f u = {}^{\#}\theta^\beta(\theta_f^\alpha u)$.*

Lema 4.2. *Si $u \in K^n(f^*, \theta^\beta\theta^\alpha)$ entonces $\theta_f^\beta(\theta^\alpha u)$, $(\theta^\beta\theta^\alpha)_f u$ están definidos y $\lambda(\theta^\beta\theta^\alpha)_f u = \theta_f^\beta(\theta^\alpha u)$.*

Las demostraciones de 4.1, 4.2 son inmediatas a partir de las definiciones.

Consideremos los espacios $W$, $X$, $Y$, y las transformaciones $g: W \to X$, $f: X \to Y$. Con $\theta^\beta$, $\theta^\alpha$ formamos las operaciones funcionales $\theta_g^\beta$, $\theta_f^\alpha$. Suponemos que

$$L^{n+\alpha-1}(f^*, \theta^\alpha) \subset K^{n+\alpha-1}(g^*, \theta^\beta),$$

y definimos

$$\bar{K}^{n+\alpha-1}(g^*, \theta^\beta) = K^{n+\alpha-1}(g^*, \theta^\beta)/L^{n+\alpha-1}(f^*, \theta^\alpha).$$

Sea $'\theta_g^\beta$ la operación que se obtiene de $\theta_g^\beta$ pasando al cociente. Resulta

$$'\theta_g^\beta : \bar{K}^{n+\alpha-1}(g^*, \theta^\beta) \to [H^{n+\alpha+\beta-2}(W)/L^{n+\alpha+\beta-2}(g^*, \theta^\beta)]/\theta_g^\beta L^{n+\alpha-1}(f^*, \theta^\alpha).$$

Si para cierta $u \in K^n(f^*, \theta^\alpha)$ se tiene que $\theta_f^\alpha u \in \bar{K}^{n+\alpha-1}(g^*, \theta^\beta)$, entonces podemos definir $'\theta_g^\beta\theta_f^\alpha u$.

## 5. Algunos lemas auxiliares

Si $A$ es un sub-espacio cerrado de $X$, designaremos con $\bar{X}$ el espacio que resulta al identificar $A$ con un punto $a_0$ de $A$. Se tiene la transformación natural $j: (X, A) \to (\bar{X}, a_0)$.

Lema 5.1. *Sea $f: (X, A) \to (Y, B)$ una transformación, $j: (X, A) \to (\bar{X}, a_0)$, $k: (Y, B) \to (\bar{Y}, b_0)$ las transformaciones naturales, obtenidas al identificar $A$ con $a_0 \in A$, $B$ con $b_0 \in B$. Si $\bar{x} = j(x)$, definimos $f': (\bar{X}, a_0) \to (\bar{Y}, b_0)$ como $f'(\bar{x}) = kf(x)$. Entonces, $f'j = kf$, $f'$ es contínua y si $f \simeq g$ resulta $f' \simeq g'$.*

La demostración de este lema es elemental.

Lema 5.2. *Sean $g: W \to X$, $f: X \to Y$ dos transformaciones tales que su composición $fg \simeq 0$. Sea $t: CX \cup_f Y \to SX$ la transformación natural que se obtiene al identificar $Y$ con el punto $x_0$ de $X$. Entonces, existe una transformación $h: SW \to CX \cup_f Y$, tal que $Sg \simeq th$.*

Demostración: Con $g, f$ construímos $Cg, \bar{f}$ (cf. §2),

$$(CW, W) \xrightarrow{Cg} (CX, X) \xrightarrow{\bar{f}} (CX \cup_f Y, Y).$$

Se tiene, $fg = \bar{f}Cg \mid W \simeq 0$. Luego, el teorema de extensión de la homotopía implica que $\bar{f}Cg \simeq l$, donde $l(W) = y_0$ es un punto de $Y$. Consideremos el siguiente diagrama conmutativo,

$$\begin{tikzcd}
& (CW, W) \arrow[dl, "k"'] \arrow[d, "l'"] \arrow[dr, "l"] & & \\
(SW, w_0) \arrow[r, "h"] & (CX \cup_f Y, y_0) \arrow[r, "i"] & (CX \cup_f Y, Y) \arrow[r, "j"] & (SX, x_0)
\end{tikzcd}$$

donde: $k$, $j$ son las transformaciones que se obtienen al identificar respectivamente, $W$, $Y$ con los puntos $w_0$, $x_0$; $i$ es la inclusión; $l'$ es la transformación definida por $l$; $h$ es la transformación inducida por $l'$ (cf. 5.1). Haciendo $t = ji$ el lema se sigue facilmente de 5.1, lo que concluye la demostración de 5.2.

Dados los espacios $W$, $X$, $Y$ y una transformación $f: X \to Y$, se tiene $t: CX \cup_f Y \to SX$ definida como en 5.2. Sea $h: SW \to CX \cup_f Y$ una transformación arbitraria. Con $h$ construímos el espacio $(CSW) \cup_h (CX \cup_f Y)$. Si identificamos el sub-espacio $Y$ de $(CSW) \cup_h (CX \cup_f Y)$ con el punto $x_0$, resulta $(CSW) \cup_{th} (SX)$. Sea

$$t': (CSW) \cup_h (CX \cup_f Y) \to (CSW) \cup_{th} (SX)$$

la transformación natural de identificación. En forma breve escribiremos

$$K = CX \cup_f Y,$$

$$L = (CSW) \cup_{th} (SX),$$

$$M = (CSW) \cup_h (CX \cup_f Y).$$

Designamos las transformaciones de inclusión con

$$k: Y \subset K, \qquad k_1: SX \subset L, \qquad k_2: K \subset M.$$

Lema 5.3. *Si $H^{n-1}(W) = 0$, entonces para cada $u \in H^n(Y)$ tal que $f^*u = 0$, existen $u' \in H^n(K)$, $u'' \in H^n(M)$ tales que $u = k^*u'$, $u' = k_2^*u''$. Por lo tanto $u = k^*k_2^*u$.*

La demostración es una aplicación directa de 3.1.

Lema 5.4. *Si $H^{q-1}(Y) = 0$, entonces $t'^*: H^q(L) \to H^q(M)$ es un monomorfismo.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $t_1'\colon(M, Y) \to (L, x_0)$ la transformación que se deriva de $t'$. Con la sucesión de cohomología del par $(M, Y)$ formamos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & H^{q-1}(Y) \arrow[r, "\delta"] & H^q(M, Y) \arrow[r, "j^*"] & H^q(M) \arrow[r, "i^*"] & H^q(Y) \arrow[r] & \cdots \\ & & & H^q(L) \arrow[ul, "t_1'^*"] \arrow[u, "t'^*"'] & & \end{tikzcd}$$

Por ser $t_1'$ un homeomorfismo relativo, $t_1'^*$ es un isomorfismo y por consiguiente $t'^*$ resulta un monomorfismo.

LEMA 5.5. *En la sucesión*

$$H^q(L) \xrightarrow{t'^*} H^q(M) \xrightarrow{k_2^*} H^q(K) \xrightarrow{k^*} H^q(Y),$$

*el núcleo de $k^*k_2^*$ es igual a la imágen de $t'^*$.*

DEMOSTRACIÓN: Se sigue observando en el diagrama usado para 5.4 que $i^* = k^*k_2^*$.

## 6. El lema principal

LEMA 6.1. *Sean $g\colon W \to X$, $f\colon X \to Y$ dos transformaciones tales que $'\theta_g^\beta\theta_f^\alpha u \neq 0$- para cierta $u \in H^n(Y)$. Supongamos $H^{n-1}(W) = 0$, $H^{n+\alpha+\beta-1}(Y) = 0$. Entonces, $fg$ es esencial si para toda $h\colon SW \to CX \cup_f Y$ y $u'' \in H^n((CSW) \cup_h (CX \cup_f Y))$ con $i^*u'' = u$ se tiene $\theta^\beta\theta^\alpha u'' = 0$, donde $i^*$ está inducido por $i\colon Y \subset (CSW) \cup_h (CX \cup_f Y)$.*

DEMOSTRACIÓN: Con las hipótesis de 6.1 supongamos que $fg \simeq 0$, y sea $h\colon SW \to CX \cup_f Y$ la transformación determinada en 5.2, tal que $Sg \simeq th$. Usando esta $h$ particular y conservando la notación de §5, consideramos los espacios $K$, $L$, $M$, y las transformaciones $k$, $k_1$, $k_2$, $t$, $t'$.

Ahora, por 5.3, existen $u' \in H^n(K)$, $u'' \in H^n(M)$ tales que $u = k^*u'$, $u' = k_2^*u''$, $u = k^*k_2^*u'' = i^*u''$. Como $\theta_f^\alpha u \neq 0$ se tiene $\theta^\alpha u' \neq 0$ (cf. §4), luego $k_2^*\theta^\alpha u'' = \theta^\alpha k_2^* u'' \neq 0$, por lo tanto $\theta^\alpha u'' \neq 0$. Por otra parte $k^*k_2^*\theta^\alpha u'' = \theta^\alpha u = 0$, y 5.5 implica que existe $v' \in H^{n+\alpha}(L)$ tal que $t'^*v' = \theta^\alpha u''$. Se tiene que,

$$\theta^\alpha u' = k_2^*\theta^\alpha u'' = k_2^* t'^* v' = t^* k_1^* v'.$$

Puesto que $'\theta_g^\beta\theta_f^\alpha u \neq 0$, resulta $'\theta_g^\beta(S\theta_f^\alpha u) \neq 0$. Luego, de la definición de operación funcional junto con 2.3, 3.2, se sigue que $v = k_1^*v'$ es un representante de $-S\theta_f^\alpha u$. Por lo tanto, $\theta^\beta v' \neq 0$ y como $t'^*$ es un monomorfismo en la dimensión $n + \alpha + \beta$ (cf. 5.4), se sigue que $t'^*\theta^\beta v' = \theta^\beta\theta^\alpha u'' \neq 0$, en contradicción con las hipótesis de 6.1, por lo tanto $fg$ es esencial y el lema queda demostrado.

## 7. Relaciones en potencias iteradas

Con el fin de hacer algunas aplicaciones de 6.1 escribiremos explícitamente ciertas relaciones entre las $p$-potencias iteradas de Steenrod (cf. [2, 3]).

Para $p = 2$, definimos $\mathcal{P}^\alpha = \mathrm{Sq}^\alpha$. Considerando casos especiales de las fórmulas 23.8, 23.9 de [2], se obtiene

$$\mathcal{P}^\beta \mathcal{P}^\alpha = \sum_{i=1}^{\beta/p} c_i^{\beta,\alpha}\, \mathcal{P}^{\alpha+\beta-i}\mathcal{P}^i + \begin{cases} 2\mathcal{P}^{2\alpha}, & \text{si } \alpha = \beta, \\ \mathcal{P}^{\alpha+\beta}, & \text{si } \alpha > \beta, \end{cases} \tag{7.1}$$

con $\alpha \geqq \beta$, $\alpha = p^a$, $\beta = p^b$, $p \geqq 2$, donde

$$c_i^{\beta,\alpha} = (-1)^{i+1}\binom{(\alpha - i)(p-1) - 1}{\beta - ip}.$$

son coeficientes binomiales módulo $p$.

## 8. Transformaciones de esferas en esferas

Sea $f: S^k \to S^n$ una transformación de una $k$-esfera en una $n$-esfera tal que $\mathcal{P}_f^\alpha u \neq 0$, donde $u \in H^n(S^n)$ es un generador. Entonces $f$ es esencial y su esencialidad puede determinarse mediante $\mathcal{P}^\alpha$. Como es bien sabido, en este caso $\alpha = p^a$, además, si $p = 2$ se tiene $k - n = \alpha - 1$, $n \geqq \alpha$, y si $p > 2$ entonces $k - n = 2\alpha(p-1) - 1$, $n > 2\alpha$ (cf. [6; p. 342]).

Ejemplos de tales transformaciones para $p = 2$, son las transformaciones de Hopf

$$S^{15} \to S^8, \qquad S^7 \to S^4, \qquad S^3 \to S^2,$$

y sus suspensiones.

Ejemplos para toda $p > 2$, con $\alpha = 1$, son los elementos esenciales de la $p$-componente de $\pi_{2p}(S^3)$, isomorfa con $Z_p$ (cf. [4, 7, 11]), y sus suspensiones. Además, según trabajos de Cartan, Moore (cf. [9]) y Toda, existen también ejemplos para toda $p > 2$, con $\alpha = p$.

Para este tipo de transformaciones demostraremos lo siguiente.

Teorema 8.1. *Sean $g: S^m \to S^k$, $f: S^k \to S^n$ dos transformaciones tales que $\mathcal{P}_g^\beta \mathcal{P}_f^\alpha u \neq 0$, donde $u \in H^n(S^n)$ es un generador y $\alpha \geqq \beta$.*

*La composición $fg$ y su suspensión iterada $r$ veces son esenciales en los casos siguientes:*

(1) $p = 2$, $\alpha = \beta$, $0 \leqq r < \infty$,

(2) $p = 2$, $\alpha > \beta$, $0 \leqq r < \alpha + \beta - n$,

(3) $p = 3$, $\alpha = \beta$, $0 \leqq r < 4\alpha - n$,

(4) $p = 3$, $\alpha > \beta$, $0 \leqq r \leqq 2\alpha + 2\beta - n$,

(5) $p > 3$, $\alpha \geqq \beta$, $0 \leqq r \leqq 2\alpha + 2\beta - n$.

DEMOSTRACIÓN: Sean $g': S^{m+r} \to S^{k+r}$, $f': S^{k+r} \to S^{n+r}$ las transformaciones que se obtienen al suspender $r$ veces ($r \geqq 0$) las transformaciones $g, f$. Aplicaremos 6.1 con $W = S^{m+r}$, $X = S^{k+r}$, $Y = S^{n+r}$. El espacio $CX \cup_{f'} Y$ es el complejo celular $e^{k+r+1} \cup S^{n+r}$. Con cualquier $h: S^{m+r+1} \to e^{k+r+1} \cup S^{n+r}$ formamos $(CSW) \cup_h (CX \cup_{f'} Y)$, que resulta ser el complejo $M = e^{m+r+2} \cup e^{k+r+1} \cup S^{n+r}$. La cohomología de $M$ es diferente de cero únicamente en las dimensiones 0, $n + r$, $k + r + 1$, $m + r + 2$. Luego, si $u'' \in H^{n+r}(M)$ es un generador, se sigue usando la formula 7.1 que $\mathcal{P}^\beta \mathcal{P}^\alpha u'' = 0$ para los valores de $r$ donde 8.1 afirma que $f'g'$ es esencial, lo que demuestra 8.1.

Los casos (1), (2) del teorema 8.1 fueron publicados por el autor en [1; p. 723], sin demonstraciones.

## 9. Otros ejemplos

Supongamos que $f: S^m \to S^n$ representa un elemento de orden $k$ en $\pi_m(S^n)$ y que todas sus suspensiones $(S^r f): S^{m+r} \to S^{n+r}$ son esenciales. Designamos con $k: S^m \to S^m$ una transformación de grado $k$. Definimos $e^{m+1} \cup S^m = (CS^m) \cup_k S^m$. Luego, $e^{m+1} \cup S^m$ es el complejo que resulta al pegar a $S^m$ una $(m + 1)$-célula con grado $k$ en la frontera. Con $f$ construimos las transformaciones esenciales

$$(9.1) \qquad \begin{aligned} f' &: e^{m+1} \cup S^m \to S^n, \\ f'' &: S^{2m-n+1} \to e^{m+1} \cup S^m, \end{aligned}$$

como sigue. $f'$ es una extensión de $f$ que obviamente existe y es esencial. Para la construcción de $f''$ consideramos la suspensión $(S^{m-n} f): S^{2m-n} \to S^m$. Se tiene $k(S^{m-n} f) \simeq 0$ y usando 5.2 resulta $f''$, que es esencial puesto que $(S^{m-n+1} f) \simeq if''$.

Consideremos ahora $f: S^{2p+n-3} \to S^n$ que se obtiene suspendiendo $n - 3$ veces un representante esencial en la $p$-componente de $\pi_{2p}(S^3)$. Se tiene que $f$ es de orden $p$ y si $u \in H^n(S^n)$ es un generador, resulta $\mathcal{P}_f^1 u \neq 0$.

Sean

$$\begin{aligned} f' &: e^{2p+n-2} \cup S^{2p+n-3} \to S^n, \\ f'' &: S^{4p+n-5} \to e^{2p+n-2} \cup S^{2p+n-2}, \end{aligned}$$

dos transformaciones derivadas de $f$ según 9.1.

Como es bien sabido, la composición $f'f''$ es esencial y genera la $p$-componente de $\pi_{4p+n-5}(S^n) (n \geqq 3)$, que es isomorfa con $Z_p$ (cf. [8, 11]).

Por otra parte, si $u \in H^n(S^n)$ es un generador se tiene $\mathcal{P}^1_{f''}(\delta^* \mathcal{P}^1)_{f'} u = \mathcal{P}^1_{f''} \delta^* (\mathcal{P}^1_{f'} u) \neq 0$ (cf. 4.1), donde $\delta^*$ es el operador cofrontera asociado con la sucesión de coeficientes $0 \to Z_p \to Z_{p^2} \to Z_p \to 0$. Como ilustración de 6.1 se demostrará que $f'f''$ es esencial. Con $W = S^{4p+n-5}$, $X = e^{2p+n-2} \cup S^{2p+n-3}$, $Y = S^n$, formamos $CX \cup_{f'} Y = e^{2p+n-1} \cup e^{2p+n-2} \cup S^n$. Luego, con cualquier $h: SW \to CX \cup_{f'} Y$ construimos el complejo

$$M = e^{4p+n-3} \cup e^{2p+n-1} \cup e^{2p+n-2} \cup S^n.$$

Si $u'' \in H^n(M)$ es un generador, se tiene (cf. [2; 23.10])

$$\mathcal{P}^1\delta^*\mathcal{P}^1u'' = \delta^*\mathcal{P}^2u'' + \mathcal{P}^2\delta^*u'' = 0,$$

lo que demuestra que $f'f''$ es esencial.

Universidad Nacional Autónoma de México e
Instituto Nacional de la Investigación Científica

Referencias

[1] J. Adem, *The iteration of the Steenrod squares in algebraic topology*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., 38 (1952), p. 720–726.

[2] ———, *The relations on Steenrod powers of cohomology classes*, parte del volumen Algebraic Geometry and Topology, A Symposium in honor of S. Lefschetz, Princeton University Press (en prensa).

[3] H. Cartan, *Sur l'itération des opérations de Steenrod*, Comment. Math. Helv., 29 (1955), p. 40–58.

[4] ——— et J. P. Serre, *Espaces fibrés et groupes d'homotopie II*, C. R. Acad. Sci. Paris, 234 (1952), p. 393–395.

[5] S. Eilenberg and N. E. Steenrod, Foundations of algebraic topology, Princeton University Press, 1952.

[6] W. S. Massey, *Some problems in algebraic topology and the theory of fibre bundles*, Ann. of Math., 62 (1955), p. 327–359.

[7] J. C. Moore, *Some applications of homology theory to homotopy problems*, Ann. of Math., 58 (1953), p. 325–350.

[8] ———, *On homotopy groups of spaces with a single non-vanishing homology group*, Ann. of Math., 59 (1954), p. 549–557.

[9] ———, *The double suspension and p-primary components of homotopy groups of spheres*, Bol. Soc. Mat. Mex. (II), 1 (1956), p. 28–37.

[10] J. P. Serre, *Cohomologie modulo 2 des complexes d'Eilenberg-MacLane*, Comment. Math. Helv., 27 (1953), p. 198–232.

[11] ———, *Groupes d'homotopie et classes de groupes abéliens*, Ann. of Math., 58 (1953), p. 258–294.

[12] E. H. Spanier and J. H. C. Whitehead, *A first approximation to homotopy theory*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., 39 (1953), p. 655–660.

[13] N. E. Steenrod, *Products of cocycles and extension of mappings*, Ann. of Math., 48 (1947), p. 290–320.

[14] ———, *Cohomology invariants of mappings*, Ann. of Math., 50 (1949), p. 954–988.

[15] ———, *Cyclic reduced powers of cohomology classes*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., 39 (1953), p. 217–223.

[16] H. Toda, *Generalized Whitehead products and homotopy groups of spheres*, Jour. Inst. Poly., Osaka City Univ., 3 (1952), p. 43–82.