DEFINICIONES FORMALES DE NUMERABILIDAD

POR GONZALO ZUBIETA R.

El objeto de esta exposición es poner de relieve el carácter relativo del concepto de numerabilidad en un sistema formal, al considerar en dicho sistema dos definiciones no equivalentes de numerabilidad, las cuales corresponden de manera igualmente legítima a la idea ordinaria.

Por su simplicidad he elegido el sistema de axiomas **NF** de Quine, [1], formulado en el sistema $\mathbf{S}_0$ que se describe en la sección 1.

Para el estudio de $\mathbf{S}_0$ he encontrado conveniente el considerarlo sumergido en un sistema **S**, el cual constituye una ampliación conservadora de $\mathbf{S}_0$. Las secciones 1, 2, y 3 están dedicadas a definiciones y teoremas relativos a **S** y a $\mathbf{S}_0$. La demostración del teorema 3.3. es esencialmente la de L. Henkin [3] con la simplificación introducida por G. Hasenjaeger [4].

1. Definición del sistema S

Los *símbolos nominales* que intervienen en la construcción de **S** se clasifican en *variables* y *constantes*.

Variables: $x, y, z, t, u, v, w, x', y', \cdots$

Constantes: $1, 2, 3, 4, 5, 6, \cdots$

Las fórmulas de **S** se definen como sigue:

1. Para símbolos nominales cualesquiera σ, τ, la expresión $(\sigma \in \tau)$ es fórmula de **S**.

2. Si Φ es fórmula de **S**, también $(\sim\Phi)$ lo es.

3. Si Φ y Ψ son fórmulas de **S**, también lo es $(\Phi \rightarrow \Psi)$.

4. Si Φ es fórmula de **S** y α una variable nominal, entonces $(\exists\alpha\Phi)$ es fórmula de **S**.

5 Sólo expresiones de las descritas en 1–4 son fórmulas de **S**.

Supondremos una numeración fija de las fórmulas de **S** en una lista, a la cual nos referiremos algunas veces.

Introducimos las siguientes abreviaturas de fórmulas:

Df. 1. $(\Phi \vee \Psi)$ abreviatura de $((\sim\Phi) \rightarrow \Psi)$.

Df. 2. $(\Phi \,\&\, \Psi)$ abreviatura de $(\sim(\Phi \rightarrow (\sim\Psi)))$

Df. 3. $(\Phi \leftrightarrow \Psi)$ abreviatura de $((\Phi \rightarrow \Psi) \,\&\, (\Psi \rightarrow \Phi))$.

Df. 4. $(\alpha)\Phi$ abreviatura de $(\sim(\exists\alpha(\sim\Phi)))$.

Una presencia dada de la variable α en la fórmula Φ está *ligada* si está contenida en una parte de Φ de la forma $(\exists\alpha\Psi)$ siendo Ψ una fórmula. Una presencia de símbolo nominal es *libre* si no está ligada. Todas las presencias de constantes en una fórmula son libres.

Llamaremos $\dot{S}$ a la clase de las fórmulas de S que no contienen presencias libres de variables (*fórmulas cerradas*), y S_0 al sistema formado por las fórmulas de S que no contienen constantes.

Una fórmula de S es tautología si se obtiene, por substitución, de una tautología del cálculo proposicional.

Dada una fórmula Φ de S, una variable α y un símbolo nominal (variable o constante) σ, usaremos la notación $\Phi \frac{\sigma}{\alpha}$ para referirnos a la fórmula Ψ que se obtiene de Φ al substituir por σ todas las presencias libres de α en Φ, siempre que las presencias resultantes de σ en Ψ sean también libres. Si alguna de las presencias resultantes de σ está ligada en Ψ, entonces hacemos $\Phi \frac{\sigma}{\alpha}$ igual a Φ.

Pasamos ahora a describir las fórmulas que adoptaremos como *axiomas* en **S**.

A1. Si Φ es tautología de S entonces Φ es axioma.

A2. Si Φ es una fórmula cualquiera de S y α una variable, entonces la fórmula $\Phi \frac{\sigma}{\alpha} \to \exists\alpha\Phi$ es un axioma.

Las *reglas de inferencia* son:

I. De $\Phi \to \Psi$ y Φ obtener Ψ. (mp.)

II. Si Ψ no contiene presencias libres de la variable α, entonces de $\Phi \to \Psi$ obtener $(\exists\alpha\Phi) \to \Psi$.

Sea **K** una clase de fórmulas. Decimos que Φ es *deducible* de **K**, en símbolos $\mathbf{K} \vdash \Phi$, si existe una sucesión finita $\Phi_1, \cdots, \Phi_n, \Phi$ de fórmulas de S tal que cada elemento de la sucesión es una fórmula de **K** o un axioma que se obtiene de elementos anteriores de acuerdo con I ó II. La sucesión $\Phi_1, \cdots, \Phi_n, \Phi$ es, en este caso, una *deducción de Φ con hipótesis en* **K** ó, brevemente, una deducción de $\mathbf{K} \vdash \Phi$. Si **K** es vacía escribimos simplemente $\vdash\Phi$.

1.1. *Si la fórmula Γ no contiene presencias libres de variables y si $\mathbf{K} \cup \Gamma \vdash \Phi$, entonces $\mathbf{K} \vdash \Gamma \to \Phi$. (Teorema de la deducción.)*

Demostración. Para toda Φ deducible de $\mathbf{K} \cup \Gamma$, demostraremos, por recurrencia, que $\mathbf{K} \vdash \Gamma \to \Phi$. 1) Si Φ coincide con la fórmula Γ, entonces $\Gamma \to \Phi$ es axioma, luego $\mathbf{K} \vdash \Gamma \to \Phi$. 2) Si Φ es fórmula de **K** o axioma, entonces la siguiente es una deducción de $\mathbf{K} \vdash \Gamma \to \Phi$

$\Phi \to (\Gamma \to \Phi)$	axioma
Φ	axioma o hp. de **K**
$\Gamma \to \Phi$	mp.

3) Si $\mathbf{K} \vdash \Gamma \to (\Phi \to \Psi)$ y $\mathbf{K} \vdash \Gamma \to \Phi$, la siguiente es una síntesis de deducción de $\mathbf{K} \vdash \Gamma \to \Psi$.

$\Gamma \to (\Phi \to \Psi) \to .(\Gamma \to \Phi) \to (\Gamma \to \Psi)$	axioma
$\Gamma \to (\Phi \to \Psi)$	$\mathbf{K}\vdash$
$(\Gamma \to \Phi) \to (\Gamma \to \Psi)$	mp
$\Gamma \to \Phi$	$\mathbf{K}\vdash$
$\Gamma \to \Psi$	mp.

4) Finalmente, si $\mathbf{K} \vdash \Gamma \to (\Phi \to \Psi)$ y Ψ no contiene presencias libres de α, la siguiente es una síntesis de deducción de $\mathbf{K} \vdash \Gamma \to ((\exists\alpha\Phi) \to \Psi)$:

(1)	$\Gamma \to (\Phi \to \Psi)$	$\mathbf{K}\vdash$
(2)	$\Phi \to (\Gamma \to \Psi)$	mp con tautología
(3)	$(\exists\alpha\Phi) \to (\Gamma \to \Psi)$	II
(4)	$\Gamma \to ((\exists\alpha\Phi) \to \Psi)$	mp con tautología

1.2. *Si* $\mathbf{K} \vdash \Phi \frac{\mathbf{c}}{\alpha}$ *y si ninguna de las fórmulas de la clase* $\mathbf{K} \cup \Phi$ *contiene a la constante* $\mathbf{c}$, *entonces* $\mathbf{K} \vdash \Phi$.

Demostración. Sea $\Phi_1, \cdots, \Phi_n, \Phi \frac{\mathbf{c}}{\alpha}$ una deducción con hipótesis en $\mathbf{K}$ y ω una variable que no figura en esta deducción. Si substituimos por ω cada presencia de $\mathbf{c}$, obtenemos de la sucesión anterior una deducción $\Phi_1', \cdots, \Phi_n', \Phi \frac{\omega}{\alpha}$ con hipótesis en $\mathbf{K}$. Como, mediante las reglas y los axiomas, de $\Phi \frac{\omega}{\alpha}$ se obtiene Φ, obtenemos fácilmente una deducción de Φ con hipótesis en $\mathbf{K}$.

2. Clases consistentes

Una clase $\mathbf{K}$ de fórmulas de $\mathbf{S}$ se llama *consistente* si no existe fórmula alguna Φ tal que $\mathbf{K} \vdash \Phi$ y $\mathbf{K} \vdash \sim\Phi$.

2.1. *Si* $\mathbf{K}$ *es inconsistente entonces, para toda fórmula* Ψ *de* $\mathbf{S}$, *se tiene* $\mathbf{K} \vdash \Psi$.

En efecto, por medio del axioma $(\sim\Phi) \to (\Phi \to \Psi)$, dadas una deducción de $\mathbf{K} \vdash \Phi$ y una deducción de $\mathbf{K} \vdash (\sim\Phi)$, se obtiene una deducción de $\mathbf{K} \vdash \Psi$.

2.2. Si $\mathbf{K}_0, \mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2, \cdots$ *son clases consistentes y si* $\mathbf{K}_0 \subset \mathbf{K}_1 \subset \mathbf{K}_2 \subset \cdots$, *entonces* $\mathbf{K}_0 \cup \mathbf{K}_1 \cup \mathbf{K}_2 \cup \cdots$ *es consistente.*

Demostración. Supongamos que la clase $\mathbf{K}_0 \cup \mathbf{K}_1 \cup \mathbf{K}_2 \cup \cdots$ no es consistente y que $\Phi_1, \cdots, \Phi_n, \Phi$ y $\Psi_1, \cdots, \Psi_m, \sim\Phi$ son dos deducciones con hipótesis en dicha clase. Cada fórmula que aparece en alguna de estas sucesiones por ser elemento de $\mathbf{K}_0 \cup \mathbf{K}_1 \cup \mathbf{K}_2 \cup \cdots$, está en alguna clase $\mathbf{K}_i$; como el número de estas fórmulas es finito, tomamos la mayor de estas clases, digamos K_h; las sucesiones $\Phi_1, \cdots, \Phi_n, \Phi$ y $\Psi_1, \cdots, \Psi_m, \sim \Phi$ son deducciones con hipótesis en K_h. Luego K_h es inconsistente contra la hipótesis del teorema.

2.3. *Si la fórmula* Γ *es cerrada* (esto es, Γ no contiene presencias libres de variables) *y si* $K \cup \Gamma$ *es inconsistente, entonces* $K \vdash \sim \Gamma$.

Demostración. Si $K \cup \Gamma$ es inconsistente, entonces $K \cup \Gamma \vdash \sim \Gamma$. Luego, por **1.1**, $K \vdash \Gamma \rightarrow \sim \Gamma$ y, como $(\Gamma \rightarrow \sim \Gamma) \rightarrow \sim \Gamma$ es axioma, se tiene $K \vdash \sim \Gamma$.

Una clase K de fórmulas de $\dot{S}$ se dice que es *consistente máxima en* $\dot{S}$ si K es consistente y si por cada fórmula Φ de $\dot{S}$, la clase K contiene a Φ ó a $\sim \Phi$.

2.4. Sea K una clase consistente de fórmulas cerradas. Vamos a formar una clase K', consistente máxima en $\dot{S}$, tal que $K \subset K'$.

Partimos de una numeración $\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3, \Theta_4, \cdots$ de las fórmulas de $\dot{S}$, inducida por la numeración de las fórmulas del sistema S.

Definimos K_1 igual a $K \cup \Theta_1$, si $K \cup \Theta_1$ es consistente. De lo contrario hacemos K_1 igual a $K \cup (\sim\Theta_1)$. De cualquier manera K_1 resulta consistente en vista de 2.3.

Definimos K_2 igual a $K_1 \cup \Theta_2$ si esta clase resulta consistente. De lo contrario hacemos K_2 igual a $K_1 \cup (\sim\Theta_2)$. De cualquier manera K_2 resulta consistente.

Prosiguiendo en esta forma, se obtiene una sucesión infinita $K_1, K_2, K_3, \cdots$ de clases consistentes contenidas en $\dot{S}$ tales que K_n contiene a Θ_n ó a su negación $\sim\Theta_n$. Además

$$K \subset K_1 \subset K_2 \subset \cdots$$

Si hacemos K' igual a $K \cup K_1 \cup K_2 \cup \cdots$ tenemos: 1) K' es consistente, por 2.2; 2) K' es máxima, por construcción; 3) $K \subset K' \subset \dot{S}$.

2.5. *Si* K *es consistente y* $(\exists\alpha\Phi)$ *cerrada y si la constante* $\mathbf{c}$ *no figura entre los símbolos de las fórmulas de* $K \cup \Phi$, *entonces* $K \cup \left(\exists\alpha\Phi \rightarrow \Phi \frac{\mathbf{c}}{\alpha}\right)$ *es consistente.*

Demostración. Supongamos que $K \cup \left(\exists\alpha\Phi \rightarrow \Phi \frac{\mathbf{c}}{\alpha}\right)$ es inconsistente. Por **2.3** se tiene $K \vdash \sim \left(\exists\alpha\Phi \rightarrow \Phi \frac{\mathbf{c}}{\alpha}\right)$. Por tautologías, $K \vdash \exists\alpha\Phi$ y $K \vdash \sim \Phi \frac{\mathbf{c}}{\alpha}$, luego por **1.2**, $K \vdash \sim \Phi$. Empleando las reglas y axiomas, tenemos $K \vdash (\alpha) \sim \Phi$ y también $\vdash (\alpha) \sim \Phi \rightarrow \sim (\exists\alpha\Phi)$, por lo tanto $K \vdash \sim (\exists\alpha\Phi)$, contra la hipótesis de que K es consistente.

3. El teorema de Skolem y Löwenheim

Con las fórmulas del sistema S puede hacerse la siguiente clasificación: 1) La clase 0 está integrada por las fórmulas de la forma $(\sigma \in \tau)$, *fórmulas elementales*. 2) La clase n $(n > 0)$ se compone de las fórmulas que tienen una de las formas $(\sim\Phi)$, $(\Phi \rightarrow \Psi)$, $(\exists\alpha\Phi)$, siendo Φ y Ψ fórmulas de clases anteriores a la n.

Se obtiene una *valuación del sistema* S asignando a cada fórmula cerrada de la clase 0 un valor de verdad, en forma arbitraria, y extendiendo la asignación a las fórmulas cerradas restantes de acuerdo con las tablas de verdad y con el siguiente criterio: $(\exists\alpha\Phi)$ toma el valor $\mathcal{V}$ si, y sólo si, existe por lo menos una constante $\mathbf{c}$ tal que $\Phi\frac{\mathbf{c}}{\alpha}$ toma el valor $\mathcal{V}$.

Una clase de fórmulas cerradas de S, se dice que es *verificable* (en el conjunto de los números naturales) si existe una valuación de S en la que toda fórmula de la clase toma el valor $\mathcal{V}$.

Una clase **K**, de fórmulas cerradas de S, se llama *completa* si para fórmulas cualesquiera Φ, Ψ se cumplen las tres condiciones siguientes:

1) $(\sim\Phi)$ está en **K** si, y sólo si, Φ está en $\dot{\mathbf{S}} - \mathbf{K}$.
2) $(\Phi \rightarrow \Psi)$ está en $\dot{\mathbf{S}} - \mathbf{K}$ si, y sólo si, Φ está en **K** y Ψ en $\dot{\mathbf{S}} - \mathbf{K}$.
3) $(\exists\alpha\Phi)$ está en **K** si, y sólo si, existe una constante $\mathbf{c}$ tal que $\Phi\frac{\mathbf{c}}{\alpha}$ está en **K**.

3.1. *Si* **K** *es completa entonces* **K** *es verificable.*

DEMOSTRACIÓN. Definimos la siguiente valuación. A toda fórmula elemental de **K** le asignamos el valor $\mathcal{V}$ y a las fórmulas elementales de $\dot{\mathbf{S}} - \mathbf{K}$ el valor $\mathcal{F}$. Por inducción se demuestra que, en esta valuación, a cada fórmula de **K** le corresponde el valor $\mathcal{V}$ y a cada fórmula de $\dot{\mathbf{S}} - \mathbf{K}$ el valor $\mathcal{F}$.

Un *ejemplo* de la fórmula existencial $(\exists\alpha\Phi)$ es la fórmula $\Phi\frac{\mathbf{c}}{\alpha}$, donde $\mathbf{c}$ es una constante cualquiera.

3.2. *Toda clase consistente máxima* **L** *que contiene ejemplos de cada fórmula existencial contenida en* **L**, *es completa.*

DEMOSTRACIÓN. Basta probar que **L** satisface las tres condiciones de la definición de *completa*. (1) Si $(\sim\Phi)$ está en **L** entonces Φ está en $\dot{\mathbf{S}} - \mathbf{L}$, por la consistencia de **L**; recíprocamente, si Φ está en $\dot{\mathbf{S}} - \mathbf{L}$ entonces $(\sim\Phi)$ está en **L**, por ser máxima **L**. (2) Si $(\Phi \rightarrow \Psi)$ está en $\dot{\mathbf{S}} - \mathbf{L}$ entonces $\sim(\Phi \rightarrow \Psi)$ está en **L** por (1), luego $\mathbf{L} \vdash \Phi$, $\mathbf{L} \vdash (\sim\Psi)$, por las tautologías $\sim(\Phi \rightarrow \Psi) \rightarrow \Phi$ y $\sim(\Phi \rightarrow \Psi) \rightarrow (\sim\Psi)$, y por lo tanto Φ está en **L** y Ψ en $\dot{\mathbf{S}} - \mathbf{L}$, por ser **L** consistente máxima. Recíprocamente si Φ está en **L** y Ψ en $\dot{\mathbf{S}} - \mathbf{L}$ entonces $(\sim\Psi)$ está en **L** por (1) y, debido a la tautología $\Phi \rightarrow .(\sim\Psi) \rightarrow \sim (\Phi \rightarrow \Psi)$, se tiene $\mathbf{L} \vdash \sim (\Phi \rightarrow \Psi)$, luego $(\Phi \rightarrow \Psi)$ está en $\dot{\mathbf{S}} - \mathbf{L}$, por la consistencia de **L**. (3) Si $(\exists\alpha\Phi)$ está en **L** entonces, por hipótesis, algún ejemplo $\Phi\frac{\mathbf{c}}{\alpha}$ está en **L**. Recíprocamente, si algún ejemplo $\Phi\frac{\mathbf{c}}{\alpha}$ de $(\exists\alpha\Phi)$ está en **L**, entonces, en vista del axioma $\Phi\frac{\mathbf{c}}{\alpha} \rightarrow (\exists\alpha\Phi)$, se tiene $\mathbf{L} \vdash (\exists\alpha\Phi)$, luego $(\exists\alpha\Phi)$ está en **L** por ser ésta consistente máxima.

3.3. *Si* K *es consistente y* $K \subset \dot{S}_0$ *entonces* K *es verificable.* ***(Teorema de Skolem y Löwenheim.)***

DEOMSTRACIÓN. Bastará que construyamos una clase completa agregando ciertas fórmulas cerradas a K. Esto se logra del modo siguiente:

Sean

$$\text{(B)} \qquad (\exists \alpha_1 \Phi_1),\ (\exists \alpha_2 \Phi_2),\ (\exists \alpha_3 \Phi_3),\ \cdots$$

todas las fórmulas existenciales cerradas, en el orden con que aparecen en la lista de fórmulas de S. Elegimos las constantes numéricas $\mathbf{c}_1$, $\mathbf{c}_2$, $\mathbf{c}_3$, $\cdots$ como sigue:

$$\mathbf{c}_1 = \text{constante mínima que no figura en } \Phi_1.$$

$$\mathbf{c}_2 = \text{constante mínima que no figura en } \Phi_1 \frac{\mathbf{c}_1}{\alpha_1}, \Phi_2.$$

$$\mathbf{c}_3 = \text{constante mínima que no figura en } \Phi_1 \frac{\mathbf{c}_1}{\alpha_1}, \Phi_2 \frac{\mathbf{c}_2}{\alpha_2}, \Phi_3.$$

. . . .

Definimos

$$\mathbf{L} = \mathbf{K} \cup \left(\exists \alpha_1 \Phi_1 \to \Phi_1 \frac{\mathbf{c}_1}{\alpha_1}\right) \cup \left(\exists \alpha_2 \Phi_2 \to \Phi_2 \frac{\mathbf{c}_2}{\alpha_2}\right) \cup \left(\exists \alpha_3 \Phi_3 \to \Phi_3 \frac{\mathbf{c}_3}{\alpha_3}\right) \cup \cdots$$

L es consistente en vista de **2.2,** puesto que es la unión de las clases

$$\mathbf{K},$$

$$\mathbf{K} \cup \left(\exists \alpha_1 \Phi_1 \to \Phi_1 \frac{\mathbf{c}_1}{\alpha_1}\right),$$

$$\mathbf{K} \cup \left(\exists \alpha_1 \Phi_1 \to \Phi_1 \frac{\mathbf{c}_1}{\alpha_1}\right) \cup \left(\exists \alpha_2 \Phi_2 \to \Phi_2 \frac{\mathbf{c}_2}{\alpha_2}\right),$$

. . . .

las cuales son consistentes en vista de la hipótesis y de **2.5.**

Finalmente, formamos **L′**, clase consistente máxima que contiene a **L**, según el procedimiento empleado en **2.4.** Para probar que **L′** es la clase pedida, consideremos una fórmula existencial cualquiera contenida en **L′**. Esta fórmula aparece en la lista (B) con cierto rango n y junto con esta fórmula, a saber $(\exists \alpha_n \Phi_n)$, figura en **L′** también $\left(\exists \alpha_n \Phi_n \to \Phi_n \frac{\mathbf{c}_n}{\alpha_n}\right)$. Luego $\mathbf{L}' \vdash \Phi_n \frac{\mathbf{c}_n}{\alpha_n}$ y, como **L′** es consistente máxima, $\Phi_n \frac{\mathbf{c}_n}{\alpha_n}$ está en **L′**. Esto prueba que **L′** contiene, con cada fórmula existencial, por lo menos un ejemplo de la fórmula. De lo anterior y de **3.2** se sigue que **L′** es completa y contiene a **K**.

Si α_1 , $\cdots$, α_n son, en orden alfabético, las variables que tienen presencias libres en Φ, entonces la *cerradura* de Φ es por definición la fórmula $(\alpha_1) \cdots (\alpha_n)\Phi$.

La fórmula Φ es *válida* en una valuación dada, si su cerradura toma el valor $\mathcal{V}$ en dicha valuación.

Sea **K** una clase de fórmulas cualesquiera de **S**. Decimos que una valuación dada *satisface* a **K**, si todas las fórmulas de **K** son válidas en dicha valuación.

3.4. *Si* **K** *es consistente y* $\mathbf{K} \subset \mathbf{S}_0$, *entonces existe una valuación que satisface a* **K**.

Demostración. Formamos la clase $\dot{\mathbf{K}}$ con las cerraduras de las fórmulas de **K**. Es fácil demostrar que $\dot{\mathbf{K}}$ es consistente y $\dot{\mathbf{K}} \subset \dot{\mathbf{S}}_0$. Por **3.3**, existe una valuación en la que toman el valor $\mathcal{V}$ todas las fórmulas de $\dot{\mathbf{K}}$, luego dicha valuación satisface a **K**.

4. Concepto de numerabilidad

Cada valuación de **S** determina una interpretación de las fórmulas de $\mathbf{S}_0$ como proposiciones que se refieren a conjuntos designados con las constantes 1, 2, 3, $\cdots$

En $\mathbf{S}_0$ pueden formularse los axiomas de *pertenencia* dados por Quine en [1]. La clase **Q** de estos axiomas está determinada por las dos condiciones siguientes:

4.1. La fórmula $(x \subset y) \rightarrow .(y \subset x) \rightarrow (x = y)$ está en **Q**.

4.2. Si la fórmula Φ está estratificada y la variable ω no figura en Φ, entonces la fórmula $\exists\omega(\alpha)\ (\alpha \in \omega \leftrightarrow \Phi)$ está en **Q**. (*Regla de abstracción.*)

En esta sección damos por conocido lo que se trata en [1] y [2].

Las descripciones $\{x\}$, "conjunto cuyo único miembro es x" y $\{x, y\}$, "conjunto cuyos únicos miembros son x y y", se definen en contexto, como en [1].

El concepto de *par ordenado* (x, y) puede definirse como en [1]:

D14. (x, y) abreviatura de $\{\{x\}, \{x, y\}\}$, ó, alternativamente, en la forma

D14′. (x, y) abreviatura de $\{\{x\}, \{x, \{y\}\}\}$.

De estas dos definiciones se originan dos conceptos diferentes de *función unívoca* y, por consiguiente, dos conceptos diferentes de *numerabilidad.*

Si suponemos que **Q** es consistente entonces, según **3.4**, existe una valuación de **S** que satisface a **Q**. La constante **c** representa una función unívoca si es verdadera la fórmula

$$(x)(y)(z).\ (x, z) \in \mathbf{c}\ \&\ (y, z) \in \mathbf{c} \rightarrow (x = y)$$

De hecho, resultan dos fórmulas diferentes, según que se emplee **D14** o **D14′**, y puede ocurrir que una de las fórmulas sea verdadera y la otra falsa, en la valuación. Es decir, **c** puede representar una función unívoca según una definición y no representarla según la otra.

Llamemos Φ y Φ' a las fórmulas que resultan del esquema

$$(y)(z)(t).\ (y,\ t) \in x\ \&\ (z,\ t) \in x \rightarrow (y = z)$$

al aplicar las definiciones **D14** y **D14'**, respectivamente. Φ y Φ' son fórmulas de $\mathbf{S}_0$ que contienen presencias libres únicamente de la variable "x". Puede demostrarse lo siguiente

$$\text{(1)} \qquad \mathbf{Q} \vdash \exists x(\Phi\ \&\ (y)\exists z.\ (y,\ z) \in x)$$

$$\text{(2)} \qquad \mathbf{Q} \vdash (x)(\Phi' \rightarrow \exists y(z) \sim .(y,\ z) \in x)$$

(1) dice que si se adopta **D14** como definición de par ordenado entonces se demuestra en **S** la existencia de una función unívoca que tiene por contradominio al conjunto de todas las constantes 1, 2, 3, $\cdots$ Tal función está determinada por la fórmula $(x = y)$. En (2) se afirma que si se adopta la definición **D14'**, entonces para cualquier función unívoca que se tenga, existen constantes que no figuran como valores de la función. En este caso, la fórmula $(x = y)$ no define una función, pues la fórmula que nos puede proporcionar tal definición por abstracción, no está estratificada.

(2) se demuestra empleando dentro de **S** el conocido método diagonal de Cantor. Tal método no es aplicable junto con **4.2** tratándose de **D14**, porque se tropieza con una fórmula no estratificada.

En correspondencia con las definiciones Φ, Φ' de univocidad se obtienen dos definiciones Ψ, Ψ' de numerabilidad. Ψ, Ψ' son dos fórmulas de $\mathbf{S}_0$ que contienen presencias libres únicamente de "x" y expresan el concepto "x es numerable" en dos formas distintas. Aplicando el método diagonal de Cantor, se demuestra en **S**:

$$\text{(3)} \qquad \mathbf{Q} \vdash \exists x \sim \Psi'$$

que afirma que existen conjuntos no numerables según la definición Ψ'. No se sabe si vale, lo mismo al aplicar la definición Ψ, pero si existe una demostración en S de $\mathbf{Q} \vdash \exists x \sim \Psi$, ésta no es mediante el uso de **4.2**, ya que se tropieza con una fórmula no estratificada.

Para la valuación que satisface a **Q**, pues hemos supuesto que **Q** es consistente, la fórmula cerrada $\exists x \sim \Psi'$ toma el valor $\mathcal{V}$. Por lo tanto existe un ejemplo $\Psi' \dfrac{\mathbf{c}}{x}$ de dicha fórmula que toma el valor $\mathcal{V}$, y la constante **c** tiene el carácter de no numerable de acuerdo con la definición Ψ'.

Universidad Nacional Autónoma de México e
Instituto Nacional de la Investigación Científica

Referencias

[1] W. V. Quine, The American Mathematical Monthly, vol. 44, 1937, pp. 70–80.
[2] W. V. Quine, The Journal of Symbolic Logic, vol. 2, 1937, pp. 120–124.
[3] L. Henkin, The Journal of Symbolic Logic, vol. 14, 1949, pp. 159–166.
[4] G. Hasenjaeger, The Journal of Symbolic Logic, vol. 18, 1953, pp. 42–48.